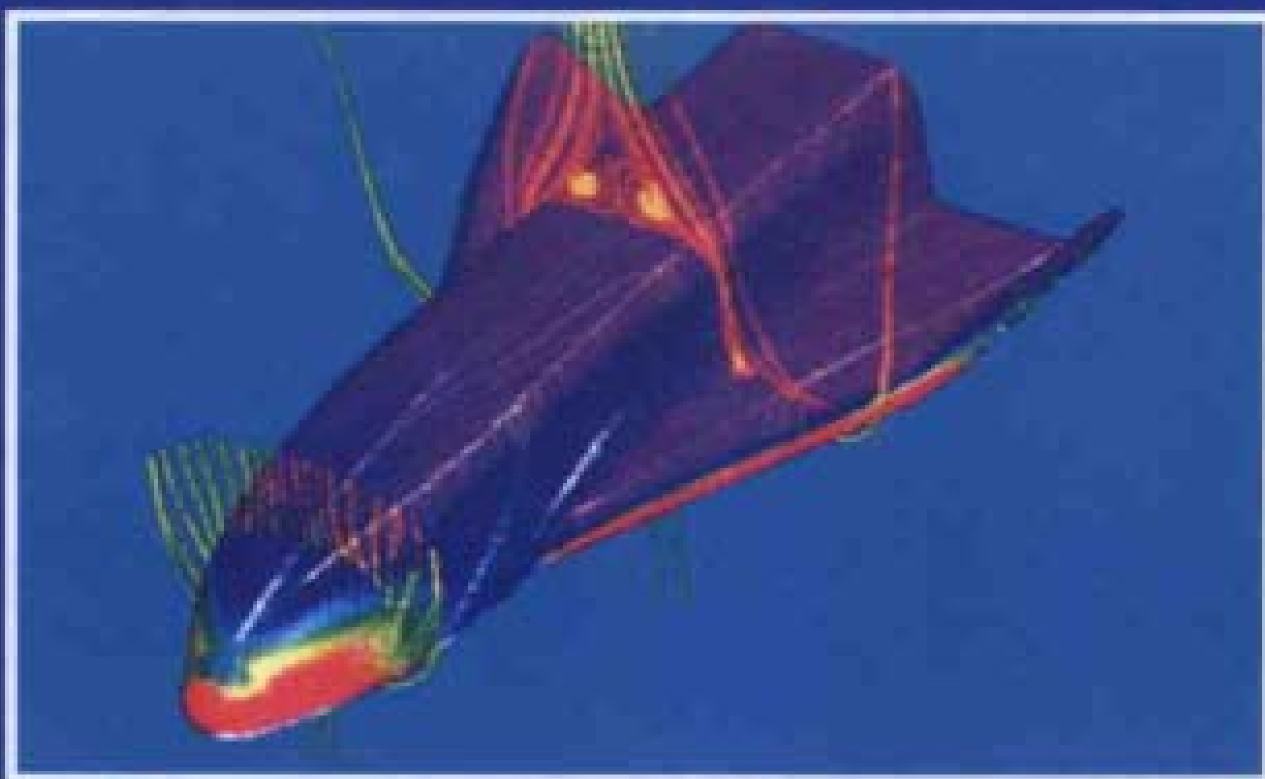
《近代空气动力学丛书》

计算流体力学
——差分方法的原理和应用

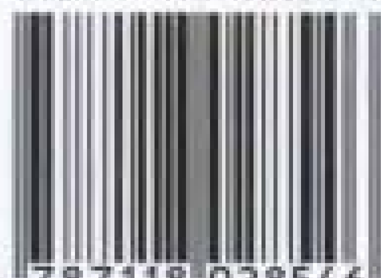
Computational Fluid Dynamics —Fundamentals and Applications of Finite Difference Methods

张涵信　沈孟育　著



国防工业出版社

责任编辑 吴芝萍



ISBN 7-118-02854-1/O·176
定价:32.00 元

近代空气动力学丛书

计算流体力学——差分方法的原理和应用

Compatutional Fluid Dynamics——Fundamentals and Applications of Finite Difference Methods

张涵信　沈孟育　著

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

计算流体力学:差分方法的原理和应用/张涵信,沈孟育著.—北京:国防工业出版社,2003.1
(近代空气动力学丛书)
ISBN 7-118-02854-1

Ⅰ.计... Ⅱ.①张...②沈... Ⅲ.计算流体力学 Ⅳ.035

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 027812 号

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路23号)
(邮政编码 100044)
腾飞胶印厂印刷
新华书店经售
*
开本 850×1168 1/32 印张 16⅜ 410 千字
2003 年 1 月第 1 版 2003 年 1 月北京第 1 次印刷
印数:1—2500 册 定价:32.00 元

致读者

本书由国防科技图书出版基金资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分，又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技和武器装备建设事业的发展，加强社会主义物质文明和精神文明建设，培养优秀科技人才，确保国防科技优秀图书的出版，原国防科工委于1988年初决定每年拨出专款，设立国防科技图书出版基金，成立评审委员会，扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是：

1. 在国防科学技术领域中，学术水平高，内容有创见，在学科上居领先地位的基础科学理论图书；在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。

2. 学术思想新颖，内容具体、实用，对国防科技和武器装备发展具有较大推动作用的专著；密切结合国防现代化和武器装备现代化需要的高新技术内容的专著。

3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值，密切结合国防现代化和武器装备现代化需要的新工艺、新材料内容的专著。

4. 填补目前我国科技领域空白并具有军事应用前景的薄弱学科和边缘学科的科技图书。

国防科技图书出版基金评审委员会在总装备部的领导下开展工作，负责掌握出版基金的使用方向，评审受理的图书选题，决定资助的图书选题和资助金额，以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书，由总装备部国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承担着记载和弘扬这些成就，积累和传播科技知识的使命。在改革开放的新形势下，原国防科工委率先设立出版基金，扶持出版科技图书，这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物，是对出版工作的一项改革。因而，评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进，这样，才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技和武器装备建设战线广大科技工作者、专家、教授，以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来，为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗！

国防科技图书出版基金

评审委员会

国防科技图书出版基金
第三届评审委员会组成人员

序

有书应有序，序者必须说明为什么要写书，写书有什么意义。

近代空气动力学丛书是1994年开始酝酿的，等书出齐肯定是下一世纪了。这是一套跨世纪的丛书，当然我们希望它能有跨世纪的意义。20世纪初始有飞机出现，莱特(W. Wright, O. Wright)兄弟于1903年发明了飞机。到30年代，低速飞机的设计已日趋成熟，而空气动力学的研究为此做出了突出的贡献。1934年开始由美国戈根海姆基金会支持、由杜朗(W. F. Durand)主编并成为航空发展基石的六卷本的空气动力学理论(Aerodynamic Theory)丛书就是很好的佐证。著名的力学家普朗特(L. Prandtl)、泰勒(G. I. Taylor)及卡门(T. von Karman)等均为该丛书撰写了重要章节。我国学者钱学森在40年代末曾称丛书中泰勒所写的可压缩性流体力学为此领域当时最佳的著作。杜朗的这一套书并不是直接为设计用的，它强调的是一个一个专题的理论基础，是为飞机设计者的技术创新服务的。第二次世界大战后，人类很快进入了超声速时代，卡门和钱学森等人在40年代末提出要编写一套现代化的空气动力学丛书，这就是由查雷(J. Charyk)做主编的由普林斯顿大学出版的高速空气动力学与喷气推进(High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion)丛书，这套丛书直到50年代后期才出齐。著名空气动力学学者钱学森、林家翘、郭永怀都是该丛书的主要作者。

进入50年代，洲际核导弹的研制成为苏美两国武器竞赛的关键项目。苏联在1957年10月4日发射了世界上第一颗人造地球卫星，显示了苏联有发射洲际导弹的能力；1961年4月12日，世界上第一位航天员加加林(Ю. А. Гагарин)乘"东方"1号飞船实现了绕地球的轨道飞行。美国提出了"阿波罗"登月计划，并于1969

年7月20日实现了两名航天员登上了月球，并顺利地返回；1981年4月12日美国“哥伦比亚”号航天飞机从地面起飞，绕地球36圈以后成功地降落在爱德华兹空军基地。另一方面，气动性能先进的苏-27和F-22等也相继出现。这些大大促进了航空航天事业的发展。作为航空航天事业的基础，近代空气动力学不仅涉及低速、跨声速、超声速，而且包括高超声速和超高速范围，此时空气中已产生离解、电离和其他化学反应。空气动力学已不再仅仅是30年代以机翼理论为代表的传统的学科，它的发展引发了多学科之间相互渗透，大大丰富了空气动力学的内涵。

过去近50年的航空航天事业的迅速发展，拉动了空气动力学各方面的研究工作，使空气动力学作为一个重要学科，全方位突出于航空航天科学的前沿。特别是半个世纪以来计算机及计算理论和技术的发展使计算流体力学(计算空气动力学)成为一个主要的分支学科；电子技术、控制技术及传感器技术的迅猛发展使气动实验技术日新月异，从以前宏观的测力测压，发展到精细流场的测量；非线性动力学的发展和拓扑分析提供了新的理论武器。在这半个世纪内虽然有空气动力学专著出版，但是没有看到30年代、50年代那样高品位的空气动力学丛书。因此，在1994年的一次有国内部分空气动力学工作者参加的座谈会上，张涵信等同志就倡议由中国的空气动力学工作者发挥集体智慧来编著一套跨世纪的近代空气动力学丛书，并很快得到原国防科工委的赞同，成立了编委会，编委会的日常管理工作挂靠在中国空气动力研究与发展中心，并在国防科技图书出版基金评审委员会和国防工业出版社的支持下开展工作。

前面这两套丛书都是世界级权威写的。30年代的丛书是世界性的，主要的作者包括了世纪性的科学家普朗特、泰勒和卡门。50年代普林斯顿大学的那套丛书，主要的作者都是当时在美国的第一流科学家。我们的丛书要继承和发扬前两套丛书的优点，显然，编著工作是十分艰巨的。

新中国成立后，在自力更生的方针指引下，由于国内空气动力

学部门和全国有关单位的大力协同，以及空气动力学工作者的努力奋斗，在钱学森和郭永怀的率领下，不仅继承了普朗特、卡门学派的优良传统，而且在钱学森发展的系统工程思想的指导下，抓住空气动力学总体、促进各学科之间的交叉，使我国的空气动力学在过去40多年的时间里得到了迅速的发展，可以说从无到有接近和达到国际先进水平，并积累了十分宝贵的经验。我们不能妄自菲薄，应该很好地加以总结，使这套丛书能充分反映新中国空气动力学工作者的重要成就。

我们并不认为这套丛书是经典性的、完美无缺的，但是认真朝这个方向努力的。我们希望这套丛书的出版不仅能够促进中国航空航天事业在21世纪的发展，并且对世界航空航天事业也有所贡献。

庄逢甘

1999年9月9日

近代空气动力学丛书编辑委员会
组成人员

前　言

空气动力学是研究空气和其他气体的运动以及与物体相互作用的科学，是航空航天技术最重要的理论基础之一。飞机和航天器的外形不断改进，性能不断提高，无不与空气动力学的发展密切相关。在新型飞行器设计中，空气动力学将起到愈发重要的作用。

我国的航空航天事业取得了举世瞩目的成就，广大空气动力学工作者为发展航空航天事业和空气动力学科学做出了突出贡献。为了促进空气动力学的进一步发展，迎接新世纪挑战，总结经验，培养人才，更好地为航空航天事业和国民经济服务，特组织编著出版近代空气动力学丛书。

近代空气动力学丛书由 20 多种单本专著组成，分理论和实验两部分。理论部分包括：跨声速空气动力学理论，无黏性高超声速空气动力学理论，稀薄气体动力学，计算流体力学——差分方法的原理与应用，计算流体力学谱方法，流体力学的有限元方法，高速气流传热与烧蚀热防护，多相湍流反应流体力学，高温非平衡空气绕流，湍流，旋涡与分离流动结构的分析，风工程与工业空气动力学，飞机设计空气动力学，发射气体动力学等。实验部分包括：风洞实验，风洞天平，风洞实验干扰与修正，脉冲风洞，近代流动显示技术等，丛书的编著坚持“五性”原则。即桥梁性：从书是基础空气动力学到空气动力学前沿过渡的桥梁。专题性：丛书分成若干单本，每一单本仅涉及一个专门领域，是专著性丛书。近代性：丛书不仅重视学科已有的成就，而且重视近代的发展。系统性：每一单本专著，均有系统地介绍该领域的知识和发展。配套性：从书的各单本专著联合在一起，基本覆盖了近代空气

动力学各领域。为了组织和推动丛书的编著,组成了以庄逢甘院士为主任委员的编辑委员会,负责制定丛书编写计划、选定编著者、审查书稿以及向国防科技图书出版基金评审委员会推荐申请资助等。中国空气动力研究与发展中心对编辑委员会的工作在人员和经费方面都给予了支持。丛书的各单本专著系通过申请国防科技图书出版基金获得资助后,由国防工业出版社列选出版。

计算流体动力学,英文名称为 Computational Fluid Dynamics,简称 CFD。它是利用计算机和数值方法求解满足定解条件的流体动力学方程以获得流动规律和解决流动问题的专门学问。计算流体动力学作为一门专门学科,大约是 20 世纪 60 年代形成的。它一出现,就得到了迅速发展,现在 CFD 已深入到与流动有关的各个技术领域。按照我们的观点,计算流体动力学的研究内容可用 5 个 M 和 1 个 A 来表述。第一个 M 是 Machine 的缩写,它表示计算机 Computer,这是进行流动计算研究必须具备的工具。当今并行计算机已大量出现,它的设计和运行与计算流体动力学的内容有密切关系。第二个 M 是 Mesh 的缩写,表示网格,有时人们也用 Grid 表示。在进行流动计算时,把流场划分成网格是必经的步骤,在此基础上,流动方程才可能被离散。现在网格生成已成为一个专门学问,贴体网格生成技术、叠合网格技术、搭接网格技术、结构和非结构混合网格技术等大量出现。第三个 M 表示 Method,即方法,这里有狭义与广义两种理解。其狭义理解,是指流体动力学方程的求解方法以及定解条件的处理方法。广义说法除包含狭义说法的内容外,还包括建立流动方程和定解条件,即形成被计算的数学问题的方法。在 CFD 中,方法研究是最活跃的,当前已提出了各式各样的计算方法,例如在气体动力学中,已发展了有限差分方法、有限元法、谱方法和样条函数法,在这四大类方法中,又有五花八门的离散格式。第四个 M 表示 Mechanism,即机理。利用 CFD 解决流动问题,特别是复杂流动问题,给出的是大量数据,有人称之为数据海洋。要从这大量数据中找出流动

机理和规律，这方面的研究是极为必要的。第五个 M 表示 Mapping，即作图，把计算结果按需要作出静态的或动态的图形或图像。第四、第五个 M 实际是 CFD 中后处理的内容，当今的发展也是丰富多彩的，目前已出现很多后处理软件系统，特别是虚拟技术的出现，给这方面的研究增添了活力。一个 A 表示 Application，即应用。以上五个 M 好比人的五个手指，将它们握在一起，就形成一个拳头，可用来解决各种流动问题。这里的应用有两方面的含义，一是用来解决各种工程上的流动问题，二是用来阐明流动自身的机理和规律。目前在这两个方面都有很大的发展。

计算流体动力学在我国学科设置的名称上叫做计算流体力学，按字面含义英文名应为 Computational Fluid Mechanics，这与 CFD 的英文名不一致。CFD 是国际上对计算流体动力学统一的名称缩写，为了和国际上统一，把计算流体力学的名称译为 CFD。在本书中，计算流体力学的名称也被采用，故在此特别说明。此外，有人将计算流体力学解决流动问题称为数值模拟（Numerical Simulation），这个名词在以后的研究中也将采用。

20 世纪 60 年代以前，求解流体动力学方程的主要方法是解析分析。解析分析方法的优点是可以建立流动物理量之间的显式关系，揭示流动内部的机理和规律；缺点是很难求解复杂的流动问题。20 世纪 60 年代计算流体动力学出现以后，由于计算机技术、网格技术、计算方法和后处理技术的迅速发展，计算流体动力学求解流动问题的能力越来越高，现在几乎任何复杂的流动，只要定解条件和流动的控制方程可以正确提出，都可进行计算，并给出相应的计算结果。在这种情况下，解析分析被冷落。然而也出现了一些新的问题：

1．对于复杂的流动问题，计算方法的有效性常常与流场的物理情况有关，如何根据流场的情况选择、改进或设计计算方法？

2．当计算方法给定后，为了获得准确解，如何设计和确定网格及网格的结点分布？

3. 如何进行边界点的计算以适应内点计算的需求?

4. 对于复杂流动问题,计算数据已成为海洋。如何从数据海洋中揭示其流动机理和规律?

这些问题均与流动的物理特征相关,因此要解决它们必须开展物理分析研究。在CFD研究中,重视物理分析是非常必要的,也就是说,计算流体动力学与分析研究必须结合起来。在CFD的发展历程中,有些成功的工作是建立在物理分析的基础上的,例如气体流动中的特征线方法、Murman-Cole迎风差分方法以及Jameson的旋转差分方法都有很强的物理背景。在求解带激波的流动时,Godunov的差分求解方法以及本书将要介绍的无波动、无自由参数和具有耗散性的差分方法(简称NND格式)也是根据物理分析建立的。近年来,由于已经认识到物理分析在CFD中的重要性,因而做了不少涉及上述问题的工作。CFD与物理分析相结合,已成为计算流体动力学发展的一个重要方向。

据我们所知,国内外已出版了不少计算流体力学的著作。这本书的特点是从物理分析出发研究计算流体力学,或者说将力学分析与数值模拟相结合来研究CFD的问题。作者将通过物理分析,提出设计数值计算方法的基本原则,从而根据这些原则,建立高精度、高分辨率的计算格式;通过物理分析,建立设计计算网格间距和结点数的原则,从而根据这些原则给出与计算格式精度协调一致的网格布置;通过物理力学分析,利用边界条件,提出运用于流场计算的边界控制方程,从而可使用和内点计算精度一致的格式去求解;通过物理分析,揭示三维复杂黏性分离流动表面流态的拓扑结构规律以及横截面流态的拓扑结构规律,从而可利用这些规律从数据海洋中揭示流动的机理和特征,并进一步作出能反映机理、特征的流动图像。以上这些内容,均是根据作者的研究成果写成的。

本书第2,3,4,9,10章由张涵信编写,第1,5,6,7,8章由沈孟育编写,在编写过程中,得到了庄逢甘院士热情的关怀和帮助。郭

华谟教授、吴望一教授对本书的内容提出了许多很好的意见。第8章中关于非结构网格和混合网格部分为张来平博士编写。此外，叶友达、黎作武、袁先旭、王振亚、刘金合、谢昱飞诸博士分别校对各章并绘制了全部图表。在此向以上同志表示衷心的感谢。

由于水平限制，本书的错误难免，敬请读者提出批评，以便改正。

著　者

2001.12.5

目　录

Contents

第 1 章　流体力学的各级近似方程及其数学性质

牛顿黏性流体运动的支配方程——Navier-Stokes 方程相当精确地描述了自然界和工程中经常遇到的许许多多流动现象。我们的讨论将限制在 Navier-Stokes 方程以及它的各级近似方程的范围内，非牛顿流体及稀薄气体流动等问题均不涉及。

由于本章的主要目的是分析流体力学各级近似方程的数学性质，而二维流动与三维流动支配方程的数学性质及其分析方法是完全类似的，为简单起见，本章中仅讨论二维流动。

1.1　流体力学的各级近似方程[1]

我们认为读者已经学过流体力学课程，因此在这里仅列出结果而不作任何推导。

1.1.1　可压缩牛顿流体二维非定常流动的 Navier-Stokes 方程

该方程可写成

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y} = 0 \tag{1.1.1}$$

式中　$\boldsymbol{U} = [\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad E_t]^{\mathrm{T}}$；

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho u v - \tau_{xy} \\ (E_t + p)u - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} + q_x \end{bmatrix};$$

$$
\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv-\tau_{xy}\\ \rho v^2+p-\tau_{yy}\\ (E_t+p)v-u\tau_{xy}-v\tau_{yy}+q_y\end{bmatrix}。
$$

式中，u、v 分别是速度矢量在 x、y 轴方向的投影；p 是压力；ρ 是密度。

$$
E_t=\rho\left[e+\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right] \tag{1.1.2}
$$

它表示单位体积流体的总能量。e 为单位质量流体所具有的内能。

$$
\left.\begin{aligned}
\tau_{xx}&=2\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\
\tau_{yy}&=2\mu\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\
\tau_{xy}&=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{1.1.3}
$$

式中，μ 是动力黏性系数；λ 是第二黏性系数，它们之间由下式联系着

$$
\mu'=\frac{2}{3}\mu+\lambda
$$

式中，μ' 称容积黏性系数。μ 和 μ' 是由分子与分子之间的相互作用规律及分子的性质所决定的。在我们感兴趣的大多数情况中，分子的内在运动没有被激发起来，此时可认为 $\mu'=0$，于是有

$$
\lambda=-\frac{2}{3}\mu \tag{1.1.4}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
q_x&=-K\partial T/\partial x\\
q_y&=-K\partial T/\partial y
\end{aligned}\right\} \tag{1.1.5}
$$

式中，K 是热传导系数；T 是温度。

方程组(1.1.1)是不封闭的，为了使它封闭，还必须补充两个状态方程以及关于 μ 和 K 的关系式。例如，对于完全气体而言，有如下两个状态方程

$$p = R\rho T \tag{1.1.6}$$

$$e = C_v T \tag{1.1.7}$$

式中，R 是气体常数，对于每一种气体来说，它是一个确定的常数；C_v 是等容比热。

根据气体运动论，可以把黏性系数 μ 和热传导系数 K 与热力学状态参数联系起来。例如，关于黏性系数的 Sutherland 公式为

$$\mu = C_1 \frac{T^{3/2}}{T + C_2} \tag{1.1.8}$$

式中，对于给定的气体来说，C_1 和 C_2 分别为常数，例如对于在中等温度下的空气而言，$C_1 = 1.458 \times 10^{-6}\,\mathrm{kg/(ms\sqrt{K})}$，$C_2 = 110.4\mathrm{K}$。

而热传导系数 K 和黏性系数 μ 之间则常常用如下普朗特数联系起来

$$P_r = \frac{C_p \mu}{K} \tag{1.1.9}$$

式中，C_p 是等压比热。而对于大多数气体来说，比值(C_p/P_r)近似为常值。例如标准状况下空气的 P_r 数等于 0.72。

应当指出，上述状态方程和关于 μ、K 的关系式都是以代数方程的形式出现的，因而它们对于偏微分方程组的数学性质并没有本质的影响。

将式(1.1.1)展开可得可压缩黏性常比热完全气体二维非定常流动的 Navier-Stokes 方程在笛卡儿坐标系中的如下表示式(假定 $\mu = \mathrm{const}$，$\lambda = \mathrm{const}$)

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \\
&\quad \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\lambda + \mu}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \\
&\quad \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\lambda + \mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \\
&\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + \gamma p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \\
&\quad \frac{\gamma\mu p}{P_r\rho^2}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}\right) - \frac{\gamma\mu}{P_r\rho}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) = \frac{R}{C_v}\Phi
\end{aligned}
\right\}
\tag{1.1.10}
$$

式中，

$$
\Phi = \mu\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \tag{1.1.11}
$$

称为“耗散函数”。

若在上述方程组中令 $\frac{\partial}{\partial t} = 0$，则可得到相应定常流动的支配方程组。

1.1.2 抛物化的 Navier-Stokes 方程

众所周知，在物面附近的流动中，沿切线方向的耗散远小于沿法线方向的耗散，故可把 Navier-Stokes 方程中包含沿主要流动方向（今以 y 表示主要流动方向的坐标）的所有二阶导数项，即 $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ 项都略去，即可得到抛物化的 Navier-Stokes 方程如下

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \\
&\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + \gamma p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\gamma\mu p}{p_r\rho^2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} - \\
&\qquad \frac{\gamma\mu}{p_r\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{R}{C_v}\Phi
\end{aligned}
\right\}
\tag{1.1.12}
$$

若在上述方程组中,令$\frac{\partial}{\partial t}=0$,即可得到相应定常流动的抛物化 Navier-Stokes 方程。

1.1.3 不可压缩牛顿流体二维非定常流动的 Navier-Stokes 方程

对于液体或低速运动的气体而言,可以采用不可压缩近似,即$\frac{D\rho}{Dt}=0$,并且能量方程可与连续方程及运动方程分开求解。此时,支配方程为

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = 0
\end{aligned}
\right\}
\tag{1.1.13}
$$

式中,ν 为运动粘性系数。若在上述方程组中令$\frac{\partial}{\partial t}=0$,则可得到不可压缩牛顿流体二维定常流动的 Navier-Stokes 方程。

1.1.4 可压缩理想完全气体二维非定常绝热流动的 Euler 方程

实验表明，在大雷诺数流动中，只在物面附近薄层中黏性的影响是重要的，而在除去此薄层外的主流区中黏性影响可以忽略，于是可以把主流区中的流体近似地认为是无黏性的理想流体。此时有 $\mu=0,\lambda=0,K=0$。其支配方程为如下 Euler 方程

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}-a^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)=0
\end{aligned}\right\}\tag{1.1.14}$$

式中，a 为声速。在上述方程组中令 $\frac{\partial}{\partial t}=0$，则可得到可压缩理想完全气体二维定常绝热流动的 Euler 方程。

1.1.5 可压缩理想流体二维非定常跨声速无旋流动的支配方程

在流体力学课程中已经证明，当物体在理想流体中作亚临界飞行时，整个流场将是无旋的；即使当物体做跨声速飞行时，激波强度不大，整个流场也可近似地当作是无旋的。因此，尽管无旋流动是很特殊的流动，但却具有很大的实用上的重要性。在无旋流动情况中，存在速度势 φ，问题得到很大简化，此时，支配方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}+2u\frac{\partial u}{\partial t}+2v\frac{\partial v}{\partial t}+(u^2-a^2)\frac{\partial u}{\partial x}+\\
&\qquad 2uv\frac{\partial u}{\partial y}+(v^2-a^2)\frac{\partial v}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial x}=u\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial y}=v
\end{aligned}\right\}\tag{1.1.15}$$

在上述方程组中令$\frac{\partial}{\partial t}=0$，即可得到可压缩理想流体二维定常跨声速无旋流动的支配方程。

1.1.6 可压缩理想流体二维非定常跨声速无旋流动的小扰动方程

如果我们所研究的流场是由于在某个均匀流动中产生的微小扰动所引起的，例如研究均匀来流绕过一个薄翼的流场，那么可以应用小扰动假设而使问题得到简化。

可压缩理想流体二维非定常跨声速无旋小扰动流动的支配方程为[①]

$$\left.\begin{aligned}&-KMa_{\infty}^{2}\frac{\partial u}{\partial t}+\left[1-Ma_{\infty}^{2}-(\gamma+1)\frac{u}{V_{\infty}}\right]\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\\&\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\tag{1.1.16}$$

式中，K 为频率参数，Ma 为马赫数，上述方程组适用于低、中频运动，即 $K<1$ 或 $K\approx1$ 的情况；下标∞表示无穷远来流参数。

在上述方程组中，令$\frac{\partial}{\partial t}=0$，则可得到可压缩理想流体二维定常跨声速无旋小扰动流动的支配方程。

1.1.7 可压缩理想流体二维定常亚声速或超声速无旋流动的小扰动方程

$$\left.\begin{aligned}&(1-Ma_{\infty}^{2})\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\\&\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\tag{1.1.17}$$

---

① 这里假定主流方向为 x 方向。

1.2 一阶拟线性偏微分方程组的分类

前一节中所述流体力学各级近似方程都可以归结为一阶拟线性偏微分方程组。下面,我们参照文献[2],给出一种具有启发性的一阶拟线性偏微分方程组的分类方法①。

设有如下一阶拟线性偏微分方程组

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\boldsymbol{A}_i\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x_i}=\boldsymbol{f} \tag{1.2.1}$$

这里,我们采用了 Einstein 的求和约定,其中 $\boldsymbol{U}=[U_1 \quad U_2 \quad \cdots \quad U_n]^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{A}_i$ 为 n 阶方阵,其元素为 t, x_i, U_i 的函数;$\boldsymbol{f}=[f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_n]^{\mathrm{T}}$,而 f_i 都是 t, x_i, U_i 的函数。

令 $\lambda_j^{(A_i)}(j=1,2,\cdots,n)$ 为矩阵 A_i 的特征值,亦即特征方程 $|A_i-\lambda^{(A_i)}I|=0$ 的根,则[3]

(1) 若这 n 个特征值全为复数,则方程(1.2.1)在 $t—x_i$ 平面上为纯椭圆型。

(2) 若这 n 个特征值为互不相等且不等于零的实数,则方程(1.2.1)在 $t—x_i$ 平面上为纯双曲型。

(3) 若这 n 个特征值全为零,则方程(1.2.1)在 $t-x_i$ 平面上为纯抛物型。

(4) 若这 n 个特征值部分为实数,部分为复数,则方程(1.2.1)在 $t-x_i$ 平面上为双曲—椭圆型,或简称椭圆型。

(5) 若这 n 个特征值全为实数,且部分为零,部分不为零,则方程(1.2.1)在 $t-x_i$ 平面上为双曲抛物型或抛物双曲型,视以抛物型为主还是以双曲型为主而定。

---

① 对于一阶拟线性偏微分方程组而言,至今尚没有一种公认的统一的分类方法,这里介绍一种便于应用的分类方法。

1.3 流体力学各级近似方程的类型

1.3.1 可压缩理想流体二维定常亚声速或超声速无旋流动的小扰动方程

方程(1.1.17)可改写成如下矩阵方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} + \boldsymbol{A} \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y} = 0 \tag{1.3.1}$$

式中

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\beta \\ -1 & 0 \end{bmatrix}。$$

这里，$\beta = 1 - Ma_{\infty}^2$。

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$$

即

$$\lambda^2 + \frac{1}{\beta} = 0 \tag{1.3.2}$$

由此可得如下结论。

(1) 当 $\beta > 0$，即 $Ma_{\infty} < 1$ 时，$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{\beta}}i$，它们都为虚数，故方程(1.3.1)为纯椭圆型。

(2) 当 $\beta < 0$，即 $Ma_{\infty} > 1$ 时，$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{1}{\beta}}$，它们为两个不相等的实数，故方程(1.3.1)为纯双曲型。

1.3.2 可压缩理想流体二维定常跨声速无旋流动的小扰动方程

当$\frac{\partial}{\partial t} = 0$时，方程(1.1.16)可改写成如下矩阵方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} + \boldsymbol{A} \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y} = 0 \tag{1.3.3}$$

式中

$$U=\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix};\quad A=\begin{bmatrix}0&1/\beta\\-1&0\end{bmatrix}。$$

这里，$\beta\equiv 1-Ma_{\infty}^{2}-(\gamma+1)\dfrac{u}{V_{\infty}}$。

由此可见，方程(1.3.3)和(1.3.1)形式上相同，而且它们的系数矩阵 A 在形式上也完全一样，所不同处只是 β 的表达式不一样。显然可得如下结论。

(1) 当 $\beta>0$ 时，$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{1}{\beta}}i$，它们都是虚数，方程(1.3.3)为纯椭圆型。

(2) 当 $\beta<0$ 时，$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{-\dfrac{1}{\beta}}$，它们是不同的实数，方程(1.3.3)为纯双曲型。

1.3.3 可压缩理想流体二维非定常跨声速无旋流动的小扰动方程

方程(1.1.16)可改写成如下矩阵方程

$$\frac{\partial U}{\partial x}+A\frac{\partial U}{\partial y}+B\frac{\partial U}{\partial t}=0\qquad(1.3.4)$$

式中

$$U=\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix};\quad A=\begin{bmatrix}0&1/\beta\\-1&0\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}-\alpha/\beta&0\\0&0\end{bmatrix}。$$

这里，$\alpha\equiv KMa_{\infty}^{2}$；

$$\beta\equiv 1-Ma_{\infty}^{2}-(\gamma+1)\frac{u}{V_{\infty}}。$$

矩阵 A 的特征方程为

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda&1/\beta\\-1&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^{2}+\frac{1}{\beta}=0\qquad(1.3.5)$$

由此得到以下结论。

(1) 当 $\beta>0$ 时，$\lambda_{(1,2)}^{(A)}=\pm\sqrt{\dfrac{1}{\beta}}i$，它们都是虚数，故方程

(1.3.4)在(x,y)平面上为纯椭圆型。

(2) 当$\beta<0$时,$\lambda_{1,2}^{(A)}=\pm\sqrt{-\frac{1}{\beta}}$,它们是互不相等的实数,故方程(1.3.4)在$(x,y)$平面上为纯双曲型。

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}-\frac{\alpha}{\beta}-\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda+\frac{\alpha}{\beta}\right)=0 \quad (1.3.6)$$

故有$\lambda_1^{(B)}=0;\lambda_2^{(B)}=-\frac{\alpha}{\beta}$。

由此知,方程(1.3.4)在$t-x$平面上为抛物双曲型方程组。

我们也可将方程(1.1.16)改写成如下矩阵方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y}+\boldsymbol{A}'\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}+\boldsymbol{B}'\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}=0 \quad (1.3.7)$$

式中

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix}0 & -1\\ \beta & 0\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{B}'=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\alpha & 0\end{bmatrix}。$$

这里,α与β的表示式与前相同。

矩阵 $\boldsymbol{A}'$的特征方程为

$$\lambda^2+\beta=0 \quad (1.3.8)$$

由此得到结论:

(1) 当$\beta>0$时,$\lambda_{1,2}^{(A')}=\pm\sqrt{\beta}i$,它们都是虚数,方程(1.3.7)在$x-y$平面上为纯椭圆型。

(2) 当$\beta<0$时,$\lambda_{1,2}^{(A')}=\pm\sqrt{-\beta}$,它们是互不相等的实数,方程(1.3.7)在$(x,y)$平面上为纯双曲型。

矩阵 $\boldsymbol{B}'$的特征方程为

$$\lambda^2=0 \quad (1.3.9)$$

故有$\lambda_{1,2}^{(B')}=0$。由此知,方程(1.3.7)在(y,t)平面上为纯抛物型。

1.3.4 可压缩理想流体二维定常跨声速无旋流动的支配方程

此时，$\frac{\partial}{\partial t}=0$，故方程(1.1.15)可简化为

$$\left.\begin{aligned}&(u^2-a^2)\frac{\partial u}{\partial x}+2uv\frac{\partial u}{\partial y}+(v^2-a^2)\frac{\partial v}{\partial y}=0\\&\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\tag{1.3.10}$$

我们可将方程(1.3.10)改写成如下矩阵方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}+\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y}=0\tag{1.3.11}$$

式中

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{2uv}{u^2-a^2} & \frac{v^2-a^2}{u^2-a^2}\\-1 & 0\end{bmatrix}。$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\lambda^2-\frac{2uv}{u^2-a^2}\lambda+\frac{v^2-a^2}{u^2-a^2}=0\tag{1.3.12}$$

故有 $\lambda_{1,2}^{(A)}=\frac{uv\pm a\sqrt{(u^2+v^2)-a^2}}{u^2-a^2}$。

由此可得如下结论。

(1) 当$(u^2+v^2)>a^2$ 时，即在超声速区，$\lambda_{1,2}^{(A)}$为两个互不相等的实数，方程(1.3.10)为纯双曲型。

(2) 当$(u^2+v^2)<a^2$ 时，即在亚声速区，$\lambda_{1,2}^{(A)}$均为复数，方程(1.3.10)为纯椭圆型。

1.3.5 可压缩理想流体二维非定常跨声速无旋流动的支配方程

首先把方程(1.1.15)化为一阶拟线性偏微分方程组。为此引进新的未知量

$$w \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

方程(1.1.15)可化为

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial w}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial t}=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{u^{2}-a^{2}} \dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{2 u v}{u^{2}-a^{2}} \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{v^{2}-a^{2}}{u^{2}-a^{2}} \dfrac{\partial v}{\partial y}+ \\ \qquad \dfrac{1}{u^{2}-a^{2}} \dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{2 u}{u^{2}-a^{2}} \dfrac{\partial u}{\partial t}=0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\end{array}\right\} \tag{1.3.13}$$

我们将方程(1.3.13)改写成如下矩阵方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}+\boldsymbol{A} \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y}+\boldsymbol{B} \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}=0 \tag{1.3.14}$$

式中

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} w \\ u \\ v \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{2 v}{u^{2}-a^{2}} & \dfrac{2 u v}{u^{2}-a^{2}} & \dfrac{v^{2}-a^{2}}{u^{2}-a^{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \dfrac{1}{u^{2}-a^{2}} & \dfrac{2 u}{u^{2}-a^{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

矩阵 **A** 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}|=-\lambda\left(\lambda^{2}-\frac{2 u v}{u^{2}-a^{2}} \lambda+\frac{v^{2}-a^{2}}{u^{2}-a^{2}}\right)=0 \tag{1.3.15}$$

故有 $\lambda_1^{(A)}=0$;$\lambda_{2,3}^{(A)}=\dfrac{uv \pm a\sqrt{(u^2+v^2)-a^2}}{u^2-a^2}$。

显然 $\lambda_1^{(A)}=0$ 是由于所引入的新未知量 $w=\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$ 而增添出来的。由此可得如下结论。

(1) 当$(u^2+v^2)<a^2$时,即在亚声速区,$\lambda_{2,3}^{(A)}$都是复数,方程(1.1.15)在(x,y)平面上是纯椭圆型的。

(2) 当$(u^2+v^2)>a^2$时,即在超声速区,$\lambda_{2,3}^{(A)}$为两个互不相等的实数,方程(1.1.15)在(x,y)平面上是纯双曲型的。

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{B}-\lambda \boldsymbol{I}| = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{2u}{u^2-a^2}\lambda + \frac{1}{u^2-a^2}\right) = 0 \tag{1.3.16}$$

故有 $\lambda_1^{(B)}=0$;$\lambda_{2,3}^{(B)}=\dfrac{1}{u\mp a}$。

由此可得结论:方程(1.1.15)在(x,t)平面上为抛物双曲型。

也可以把方程(1.1.15)化为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial t}=0\\
&\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0\\
&\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{2u}{v^2-a^2}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{u^2-a^2}{v^2-a^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2uv}{v^2-a^2}\frac{\partial v}{\partial x}+\\
&\qquad\frac{1}{v^2-a^2}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{2v}{v^2-a^2}\frac{\partial v}{\partial t}=0
\end{aligned}\right\} \tag{1.3.17}$$

它可以被写成如下矩阵方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y}+\boldsymbol{A}'\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}+\boldsymbol{B}'\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}=0 \tag{1.3.18}$$

式中

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} w\\ u\\ v\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ \dfrac{2u}{v^2-a^2} & \dfrac{u^2-a^2}{v^2-a^2} & \dfrac{2uv}{v^2-a^2}\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{B}'=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ \dfrac{1}{v^2-a^2} & 0 & \dfrac{2v}{v^2-a^2}\end{bmatrix}。$$

矩阵 $\boldsymbol{A}'$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A}' - \lambda \boldsymbol{I}| = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{2uv}{v^2 - a^2}\lambda + \frac{u^2 - a^2}{v^2 - a^2}\right) = 0 \tag{1.3.19}$$

故有 $\lambda_1^{(A')} = 0; \lambda_{2,3}^{(A')} = \dfrac{uv \pm a\sqrt{(u^2 + v^2) - a^2}}{v^2 - a^2}$。

由此可得与前完全相同的关于方程(1.1.15)在(x,y)平面上的类型的结论。

矩阵 $\boldsymbol{B}'$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{B}' - \lambda \boldsymbol{I}| = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{2v}{v^2 - a^2}\lambda + \frac{1}{v^2 - a^2}\right) = 0 \tag{1.3.20}$$

故有 $\lambda_1^{(B')} = 0; \lambda_{2,3}^{(B')} = \dfrac{1}{v \mp a}$。

由此可得结论:方程(1.1.15)在(y,t)平面上是抛物双曲型的。

综上所述可知,在包含 t(时间)轴的任意平面上,方程组(1.1.15)是抛物双曲型的;在(x,y)平面上,当 $Ma > 1$ 时,方程组(1.1.15)是纯双曲型的,而当 $Ma < 1$ 时则是纯椭圆型的。

1.3.6 可压缩理想完全气体二维定常绝热流动的 Euler 方程

此时,$\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$,方程组(1.1.14)简化为

$$\left.\begin{aligned}
&u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0\\
&u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0\\
&u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0\\
&u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + \gamma p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{1.3.21}$$

它可以被写成如下矩阵方程

$$\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}+\boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y}=0 \tag{1.3.22}$$

式中

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\rho\\u\\v\\p\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}u&\rho&0&0\\0&u&0&\dfrac{1}{\rho}\\0&0&u&0\\0&\gamma p&0&u\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}v&0&\rho&0\\0&v&0&0\\0&0&v&\dfrac{1}{\rho}\\0&0&\gamma p&v\end{bmatrix}。$$

求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{u}&-\dfrac{\rho}{u^2-a^2}&0&\dfrac{1}{u(u^2-a^2)}\\0&\dfrac{u}{u^2-a^2}&0&-\dfrac{1}{\rho(u^2-a^2)}\\0&0&\dfrac{1}{u}&0\\0&-\dfrac{\rho a^2}{u^2-a^2}&0&\dfrac{u}{u^2-a^2}\end{bmatrix}$$

今以 $\boldsymbol{A}^{-1}$左乘式(1.3.22)可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}+\boldsymbol{C}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y}=0 \tag{1.3.23}$$

式中

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\dfrac{v}{u}&-\dfrac{\rho v}{u^2-a^2}&\dfrac{\rho u}{u^2-a^2}&\dfrac{v}{(u^2-a^2)u}\\0&\dfrac{uv}{u^2-a^2}&-\dfrac{a^2}{u^2-a^2}&-\dfrac{v}{\rho(u^2-a^2)}\\0&0&\dfrac{v}{u}&\dfrac{1}{\rho u}\\0&-\dfrac{\rho v a^2}{u^2-a^2}&\dfrac{\gamma p u}{u^2-a^2}&\dfrac{uv}{u^2-a^2}\end{bmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{C}-\lambda\boldsymbol{I}| = \left(\frac{v}{u}-\lambda\right)^2\{[uv-\lambda(u^2-a^2)]^2 - a^2(u^2+v^2)+a^4\} = 0 \tag{1.3.24}$$

故有 $\lambda_{1,2}^{(C)}=\frac{v}{u}$；$\lambda_{3,4}^{(C)}=\frac{uv\pm a\sqrt{(u^2+v^2)-a^2}}{u^2-a^2}$。

由此可得如下结论。

(1) 当 $u^2+v^2>a^2$，即 $Ma>1$ 时，方程组(1.3.21)为双曲型。

(2) 当 $u^2+v^2<a^2$，即 $Ma<1$ 时，方程组(1.3.21)为双曲椭圆型。

1.3.7 可压缩理想完全气体二维非定常绝热流动的 Euler 方程

方程组(1.1.14)可以被写成如下矩阵方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}+\boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y}=0 \tag{1.3.25}$$

式中，$\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 的表示式与上一小节中完全一样。

今以矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$左乘式(1.3.25)可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}+\boldsymbol{C}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y}+\boldsymbol{D}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}=0 \tag{1.3.26}$$

式中，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 与上一小节中的相同，而 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}^{-1}$。关于矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的特征值已经分析过了，结论是：在(x,y)平面上，当 $Ma>1$ 时，方程组(1.1.14)为双曲型，当 $Ma<1$ 时为双曲椭圆型。

矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{D}-\lambda\boldsymbol{I}| = \left(\lambda-\frac{1}{u}\right)^2\left(\lambda-\frac{1}{u+a}\right)\left(\lambda-\frac{1}{u-a}\right)=0 \tag{1.3.27}$$

故有 $\lambda_{1,2}^{(D)}=\frac{1}{u}$；$\lambda_{3,4}^{(D)}=\frac{1}{u\pm a}$。

由此可得结论：在(x,t)平面上，方程组(1.1.14)为纯双曲型。

类似地可得：在(y,t)平面上，方程组(1.1.14)为纯双曲型。

综上所述可知，在包含 t（时间）轴的任意平面上，方程组(1.1.14)为纯双曲型。在(x,y)平面上，当 $Ma>1$ 时为双曲型；当 $Ma<1$ 时为双曲椭圆型。

1.3.8 可压缩理想完全气体二维定常绝热流动的人工密度化的 Euler 方程[3]

前面已经知道，对于可压缩理想完全气体二维定常绝热流动的 Euler 方程而言，在亚声速区是双曲椭圆型，而在超声速区则是双曲型。这两种不同类型的偏微分方程组具有不同的数学特性，数值求解方法也不相同。然而事先并不知道亚声速区和超声速区的确切位置，这就给数值求解造成了相当大的困难。

克服上述困难的办法之一是设法使支配方程在全场具有统一的类型。人工密度化方法的实质是使得支配方程在超声速区中也变成是双曲椭圆型的。其具体做法如下。

在对超声速区中的点(x,y)写出 x 方向和 y 方向的运动方程时，分别将 $\left(-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)_{(x,y)}=\left(-\dfrac{a^2}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x}\right)_{(x,y)}$ 近似地改为 $\left[-\left(\dfrac{a^2}{\rho}\right)_{(x,y)}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial x}\right)_{(x-\Delta x,y)}\right]$，$\left(-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}\right)_{(x,y)}=\left(-\dfrac{a^2}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial y}\right)_{(x,y)}$ 近似地改为$\left[-\left(\dfrac{a^2}{\rho}\right)_{(x,y)}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial y}\right)_{(x-\Delta x,y)}\right]$，于是可得到人工密度化的 Euler 方程如下

$$
\left.\begin{aligned}
&u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial y}=0\\
&u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}-\underset{\cdots\cdots}{\frac{a^2\Delta x}{\rho}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}}=0\\
&u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}-\underset{\cdots\cdots}{\frac{a^2\Delta x}{\rho}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x\partial y}}=0\\
&u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+\gamma p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0
\end{aligned}\right\}\qquad(1.3.28)
$$

应该说明，在 x 和 y 方向的运动方程中，下面划点线的项只在超声速区中出现，而在亚声速区中是不出现的。

下面来判别方程组(1.3.28)的类型。

首先，把方程组(1.3.28)化为一阶拟线性偏微分方程组。为此，引入

$$f \equiv \frac{\partial \rho}{\partial x} \tag{1.3.29}$$

$$g \equiv \frac{\partial \rho}{\partial y} \tag{1.3.30}$$

由式(1.3.28)，(1.3.29)，(1.3.30)可得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}(uf + vg) \\
&\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{u}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{a^2\Delta x}{\rho u}\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{a^2}{\rho u}g \\
&\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\rho u}{a^2\Delta x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\rho v}{a^2\Delta x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\Delta x}f - \frac{u}{a^2\Delta x}(uf + vg) \\
&\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial \rho}{\partial x} = f
\end{aligned}\right\} \tag{1.3.31}$$

它可以被表示成如下矩阵方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y} = \boldsymbol{F} \tag{1.3.32}$$

式中，$\boldsymbol{U} = [u \quad v \quad f \quad g \quad \rho]^{\mathrm{T}}$；

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{v}{u} & -\frac{a^2\Delta x}{\rho u} & 0 & 0 \\
-\frac{\rho v}{a^2\Delta x} & \frac{\rho u}{a^2\Delta x} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix};$$

$$
\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\rho}(uf+vg) \\ -\dfrac{a^2}{\rho u}g \\ \dfrac{f}{\Delta x}\left(1-\dfrac{u^2}{a^2}\right)-\dfrac{uvg}{a^2\Delta x} \\ 0 \\ f \end{bmatrix}。
$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$
|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=-\lambda^2(\lambda^2+1)\left(\lambda-\frac{v}{u}\right)=0 \qquad (1.3.33)
$$

故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1^{(A)}=\dfrac{v}{u}$；$\lambda_2^{(A)}=\lambda_3^{(A)}=0$；$\lambda_{4,5}^{(A)}=\pm i$。

由此可得结论：在 (x,y) 平面上，不论是在亚声速区还是在超声速区，方程组(1.3.28)总是双曲椭圆型的。

1.3.9 可压缩理想完全气体二维定常绝热流动的人工压力化的 Euler 方程[3]

人工压力化方法的实质是使得支配方程在亚声速区也变成抛物双曲型的。其具体做法如下。

在对亚声速区中的点 (x,y) 写出 x 方向的运动方程时，将 $\left(-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)_{(x,y)}$ 近似地改为 $\left[-\left(\dfrac{1}{\rho}\right)_{(x,y)}\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)_{(x-\Delta x,y)}\right]$，于是可得人工压力化的 Euler 方程如下

$$
\left.\begin{aligned}
&u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial y}=0\\
&u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\Delta x}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=0\\
&\qquad\cdots\cdots\\
&u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0\\
&u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+\gamma p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0
\end{aligned}\right\} \qquad (1.3.34)
$$

应当说明，在 x 方向的运动方程中下面划点线的项只在亚声速区中出现，而在超声速区中是不出现的。

下面，判别方程组(1.3.34)的类型。为此，引入

$$f \equiv \frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.3.35}$$

由式(1.3.34)和(1.3.35)可得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{v}{u}\frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\rho v}{\gamma p u}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\rho f}{\gamma p} \\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{\gamma p}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{uf}{\gamma p} \\
&\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{u}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho u}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial p}{\partial x} = f \\
&\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\rho v}{\Delta x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\rho u}{\Delta x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\rho u v}{\gamma p \Delta x}\frac{\partial p}{\partial y} = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{u^2}{\gamma p}\right)\frac{\rho}{\Delta x} f
\end{aligned}\right\} \tag{1.3.36}$$

它可以被表示成如下矩阵方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y} = \boldsymbol{F} \tag{1.3.37}$$

式中 $\boldsymbol{U} = [\rho \quad u \quad v \quad p \quad f]^{\mathrm{T}}$；

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}
\frac{v}{u} & 0 & 0 & -\frac{\rho v}{\gamma p u} & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{v}{\gamma p} & 0 \\
0 & 0 & \frac{v}{u} & \frac{1}{\rho u} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{\rho v}{\Delta x} & \frac{\rho u}{\Delta x} & \frac{\rho u v}{\gamma p \Delta x} & 0
\end{bmatrix}$$

$$
\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\dfrac{\rho f}{\gamma p}\\ -\dfrac{uf}{\gamma p}\\ 0\\ f\\ \left(\dfrac{1}{\rho}-\dfrac{u^2}{\gamma p}\right)\dfrac{\rho}{\Delta x}f\end{bmatrix}。
$$

矩阵 **A** 的特征方程为

$$
|\mathbf{A}-\lambda \boldsymbol{I}| = -\lambda^3\left(\lambda-\frac{v}{u}\right)^2 = 0 \qquad (1.3.38)
$$

故矩阵 **A** 的特征值为$\lambda_1^{(A)}=\lambda_2^{(A)}=\dfrac{v}{u}$;$\lambda_3^{(A)}=\lambda_4^{(A)}=\lambda_5^{(A)}=0$。

由此可得结论:在(x,y)平面上,不论是在亚声速区还是超声速区,方程组(1.3.34)总是抛物双曲型的。

1.3.10 不可压缩牛顿流体二维定常流动的Navier-Stokes 方程

此时有$\dfrac{\partial}{\partial t}=0$,方程组(1.1.13)简化为

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\\
&u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0\\
&u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=0
\end{aligned}\right\} \qquad (1.3.39)
$$

为了将方程组(1.3.39)化成一阶拟线性偏微分方程组,引进

$$
f\equiv\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (1.3.40)
$$

$$
g\equiv\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (1.3.41)
$$

$$
h\equiv\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (1.3.42)
$$

由式(1.3.39)～(1.3.42)可得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{1}{\nu}(uh-vf)\\
&\frac{\partial p}{\partial x}-\mu\frac{\partial g}{\partial y}+\mu\frac{\partial h}{\partial y}=-\rho(uf+vg)\\
&\frac{\partial u}{\partial x}=f\\
&\frac{\partial v}{\partial x}=h
\end{aligned}\right\}\tag{1.3.43}$$

它可被写成如下矩阵方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}+\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y}=\boldsymbol{F}\tag{1.3.44}$$

式中 $\boldsymbol{U}=[f\quad g\quad h\quad p\quad u\quad v]^{\mathrm{T}}$;

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\-1&0&0&0&0&0\\1&0&0&-\dfrac{1}{\mu}&0&0\\0&-\mu&\mu&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix};\ \boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}0\\0\\\dfrac{1}{\nu}(uh-vf)\\-\rho(uf+vg)\\f\\h\end{bmatrix}。$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|A-\lambda I|=\lambda^2(\lambda^2+1)^2=0\tag{1.3.45}$$

故有 $\lambda_{1,2}^{(A)}=0;\lambda_{3,4}^{(A)}=i;\lambda_{5,6}^{(A)}=-i$。

显然,两个特征根 $\lambda_{1,2}^{(A)}=0$ 是由于所引入的两个新变量 $f=\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $h=\frac{\partial v}{\partial x}$ 而增添出来的,而四个虚特征值则是对应于不可压缩定常 Navier-Stokes 方程的。由此可得结论:不可压缩定常 Navier-

Stokes 方程是纯椭圆型的。

1.3.11 不可压缩牛顿流体二维非定常流动的 Navier-Stokes 方程

首先将方程组(1.1.13)化为一阶拟线性偏微分方程组。由式(1.1.13),(1.3.40),(1.3.41),(1.3.42)可得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{1}{\nu}\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{1}{\nu}(uh-vf)\\
&\frac{\partial p}{\partial x}-\mu\frac{\partial g}{\partial y}+\mu\frac{\partial h}{\partial y}+\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-\rho(uf+vg)\\
&\frac{\partial u}{\partial x}=f\\
&\frac{\partial v}{\partial x}=h
\end{aligned}\right\}\tag{1.3.46}$$

它可被写成如下矩阵方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}+\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y}+\boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}=\boldsymbol{F}\tag{1.3.47}$$

式中,$\boldsymbol{U}$,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{F}$ 的表示式与上一小节中的完全一样。

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-\frac{1}{\nu}\\
0&0&0&0&\rho&0\\
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}$$

关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值已经分析过了,结论是:在(x,y)平面上,方程组(1.1.13)为纯椭圆型。而矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{B}-\lambda \boldsymbol{I}| = \lambda^6 = 0 \tag{1.3.48}$$

于是有 $\lambda_i^{(B)}=0(i=1,2,\cdots,6)$。由此可得结论:在$(x,t)$平面上,方程组(1.1.13)为纯抛物型。

类似地可得:在(y,t)平面上,方程组(1.1.13)为纯抛物型。

综上所述可知:在包含时间 t 轴的任何平面上,不可压缩非定常 Navier-Stokes 方程是纯抛物型的,而在(x,y)平面上则是纯椭圆型的。

1.3.12 抛物化的可压缩定常 Navier-Stokes 方程

此时,$\frac{\partial}{\partial t}=0$,方程组(1.1.12)简化为

$$\left.\begin{aligned}
&u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0\\
&u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\
&u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0\\
&u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+\gamma p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\gamma\mu p}{Pr\rho^2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}-\\
&\quad\frac{\gamma\mu}{Pr\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\frac{R}{C_v}\Phi
\end{aligned}\right\} \tag{1.3.49}$$

为了将此方程组化为一阶拟线性偏微分方程组,引进

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_x\equiv\frac{\partial \rho}{\partial x},\ u_x\equiv\frac{\partial u}{\partial x},\ v_x\equiv\frac{\partial v}{\partial x},\ p_x\equiv\frac{\partial p}{\partial x}\\
&\rho_y\equiv\frac{\partial \rho}{\partial y},\ u_y\equiv\frac{\partial u}{\partial y},\ v_y\equiv\frac{\partial v}{\partial y},\ p_y\equiv\frac{\partial p}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{1.3.50}$$

由式(1.3.49)及(1.3.50)可得

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho_x}{\partial x} + \frac{v}{u}\frac{\partial \rho_x}{\partial y} + \frac{\rho}{u}\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\rho^2}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\rho^2}{\lambda + 2\mu}\frac{v}{u}\frac{\partial u}{\partial y} + \\
&\qquad \frac{\rho}{(\lambda + 2\mu)u}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{u}(2\rho_x u_x + v_x\rho_y + \rho_x v_y) \\
&\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\rho u}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\rho v}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\rho u}{\mu}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\rho v}{\mu}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial p_x}{\partial x} - \frac{Pr\rho u}{\gamma\mu}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{Prp\rho}{\mu}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{p\rho}{(\lambda + 2\mu)u}\Big[u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \\
&\qquad v\frac{\partial u}{\partial y}\Big] + \frac{vp}{u\rho}\frac{\partial \rho_x}{\partial y} + \frac{p}{u}\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{Pr\rho v}{\gamma\mu}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{Prp\rho}{\mu}\frac{\partial v}{\partial y} - \\
&\qquad - \frac{Pr\rho R}{\gamma\mu C_v}\Phi - \frac{p}{\rho u}[2\rho_x u_x + v_x\rho_y + \rho_x v_y] \\
&\frac{\partial \rho_y}{\partial x} - \frac{\partial \rho_x}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial p_y}{\partial x} - \frac{\partial p_x}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho_x \\
&\frac{\partial u}{\partial x} = u_x \\
&\frac{\partial v}{\partial x} = v_x \\
&\frac{\partial p}{\partial x} = p_x
\end{aligned}\right\}
\tag{1.3.51}
$$

它可被改写成如下矩阵方程

$$\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}+\boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y}=\boldsymbol{F} \tag{1.3.52}$$

式中，

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\rho_x\\ u_x\\ v_x\\ p_x\\ \rho_y\\ u_y\\ v_y\\ p_y\\ \rho\\ u\\ v\\ p\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{u}(2\rho_x u_x+v_x\rho_y+\rho_x v_y)\\ 0\\ 0\\ -\dfrac{Pr\rho R}{\gamma\mu C_v}\Phi-\dfrac{p}{\rho u}(2\rho_x u_x+v_x\rho_y+\rho_x v_y)\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ \rho_x\\ u_x\\ v_x\\ p_x\end{bmatrix};$$

$\boldsymbol{A}=$

$$\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&\dfrac{\rho^2}{\lambda+2\mu}&0&\dfrac{\rho}{(\lambda+2\mu)u}\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&-\dfrac{\rho u}{\lambda+2\mu}&0&-\dfrac{1}{\lambda+2\mu}\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&-\dfrac{\rho u}{\mu}&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&\left(\dfrac{p\rho}{\lambda+2\mu}-\dfrac{Prp\rho}{\mu}\right)&0&\left(\dfrac{p}{(\lambda+2\mu)u}-\dfrac{Pr\rho u}{\gamma\mu}\right)\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix};$$

$$
\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}
\frac{v}{u} & 0 & \frac{\rho}{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho^2 v}{(\lambda+2\mu)u} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho v}{\lambda+2\mu} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho v}{\mu} & -\frac{1}{\mu} \\
\frac{vp}{u\rho} & 0 & \frac{p}{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p\rho v}{(\lambda+2\mu)u} & -\frac{Prp\rho}{\mu} & -\frac{Pr\rho v}{\gamma\mu} \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}。
$$

以 $\boldsymbol{A}^{-1}$左乘式(1.3.52)可得

$$
\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}+\boldsymbol{C}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y}=\boldsymbol{S} \tag{1.3.53}
$$

$\boldsymbol{A}^{-1}=$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho^2}{\lambda+2\mu} & 0 & -\frac{\rho}{(\lambda+2\mu)u} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho u}{\lambda+2\mu} & 0 & \frac{1}{\lambda+2\mu} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho u}{\mu} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{Prp\rho}{\mu}-\frac{p\rho}{\lambda+2\mu}\right) & 0 & \left(\frac{Pr\rho u}{\gamma\mu}-\frac{p}{(\lambda+2\mu)u}\right) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{F} =$$

$$\begin{bmatrix}
-\dfrac{1}{u}(2\rho_x u_x + v_x\rho_y + \rho_x v_y) - \dfrac{\rho^2}{\lambda + 2\mu}u_x - \dfrac{\rho}{(\lambda + 2\mu)u}p_x \\
\dfrac{\rho u}{\lambda + 2\mu}u_x + \dfrac{1}{\lambda + 3\mu}p_x \\
\dfrac{\rho u}{\mu}v_x \\
-\dfrac{Pr\rho R}{\gamma\mu C_v}\Phi - \dfrac{p}{\rho u}(2\rho_x u_x + v_x\rho_y + \rho_x v_y) + \left(\dfrac{Pr p\rho}{\mu} - \dfrac{p\rho}{\lambda + 2\mu}\right)u_x + \\
\quad \left(\dfrac{Pr\rho u}{\gamma\mu} - \dfrac{p}{(\lambda + 2\mu)u}\right)p_x \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
\rho_x \\
u_x \\
v_x \\
p_x
\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} =$$

$$\begin{bmatrix}
\dfrac{v}{u} & 0 & \dfrac{\rho}{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\rho^2 v}{(\lambda + 2\mu)u} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\rho v}{\lambda + 2\mu} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\rho v}{\mu} & -\dfrac{1}{\mu} \\
\dfrac{vp}{u\rho} & 0 & \dfrac{p}{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{p\rho v}{(\lambda + 2\mu)u} & -\dfrac{Pr p\rho}{\mu} & -\dfrac{Pr\rho v}{\gamma\mu} \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{C} - \lambda \boldsymbol{I}| = \lambda^{11}\left(\lambda - \frac{v}{u}\right) = 0 \qquad (1.3.54)$$

故有 $\lambda_1 = \frac{v}{u}$；$\lambda_i = 0(i = 2,3,4,\cdots,12)$。

由此可得结论：抛物化的可压缩定常 Navier-Stokes 方程是双曲抛物型方程。

1.3.13 抛物化的可压缩非定常 Navier-Stokes 方程

由式(1.1.12)和(1.3.50)可得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho_x}{\partial x} + \frac{\rho^2}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\rho}{(\lambda + 2\mu)u}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v}{u}\frac{\partial \rho_x}{\partial y} + \frac{\rho}{u}\frac{\partial v_x}{\partial y} + \\
&\qquad \frac{\rho^2 v}{(\lambda + 2\mu)u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{u}\frac{\partial \rho_x}{\partial t} + \frac{\rho^2}{(\lambda + 2\mu)u}\frac{\partial u}{\partial t} = \\
&\qquad -\frac{1}{u}(2\rho_x u_x + v_x\rho_y + \rho_x v_y) \\
&\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\rho u}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\rho v}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \\
&\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\rho u}{\mu}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\rho v}{\mu}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\
&\frac{\partial p_x}{\partial x} + \left(\frac{p\rho}{\lambda + 2\mu} - \frac{Pr p\rho}{\mu}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{p}{(\lambda + 2\mu)u} - \frac{Pr\rho u}{\gamma\mu}\right)\frac{\partial p}{\partial x} + \\
&\qquad \frac{vp}{u\rho}\frac{\partial \rho_x}{\partial y} + \frac{p}{u}\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{p\rho v}{(\lambda + 2\mu)u}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{Pr p\rho}{\mu}\frac{\partial v}{\partial y} - \\
&\qquad \frac{Pr\rho v}{\gamma\mu}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{p}{\rho u}\frac{\partial \rho_x}{\partial t} + \frac{p\rho}{(\lambda + 2\mu)u}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{Pr\rho}{\gamma\mu}\frac{\partial p}{\partial t} = \\
&\qquad -\frac{Pr\rho R}{\gamma\mu C_v}\Phi - \frac{p}{\rho u}(2\rho_x u_x + v_x\rho_y + \rho_x v_y) \\
&\frac{\partial \rho_y}{\partial x} - \frac{\partial \rho_x}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0
\end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial p_y}{\partial x} - \frac{\partial p_x}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho_x \\
&\frac{\partial u}{\partial x} = u_x \\
&\frac{\partial v}{\partial x} = v_x \\
&\frac{\partial p}{\partial x} = p_x
\end{aligned}\right\} \tag{1.3.55}$$

它可被改写成如下矩阵方程

$$\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} + \boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y} + \boldsymbol{D}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} = \boldsymbol{F} \tag{1.3.56}$$

式中，$\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的表示式和上一小节中的完全相同，而

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix}
\frac{1}{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho^2}{(\lambda+2\mu)u} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho}{\lambda+2\mu} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho}{\mu} & 0 \\
\frac{p}{\rho u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p\rho}{(\lambda+2\mu)u} & 0 & -\frac{Pr\rho}{\gamma\mu} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

以矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$左乘式(1.3.56)可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} + \boldsymbol{C}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y} + \boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} = \boldsymbol{S} \tag{1.3.57}$$

式中矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和列向量 $\boldsymbol{S}$ 的表示式和上一小节中的完全相同，而 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}$。

关于矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的特征值已经分析过了，结论是：在 (x,y) 平面上，方程组(1.1.12)是双曲抛物型方程。而矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{E}-\lambda\boldsymbol{I}| = \lambda^{11}\left(\lambda-\frac{1}{u}\right)=0 \tag{1.3.58}$$

故有 $\lambda_1^{(E)}=\frac{1}{u}$；$\lambda_i^{(E)}=0(i=2,3,4,\cdots,12)$。

由此可得结论：在 (x,t) 平面上，方程组(1.1.12)是双曲抛物型方程组。

类似地可得：在 (y,t) 平面上，方程组(1.1.12)也是双曲抛物型方程组。

综上所述，在通过时间 t 轴的任何平面上，抛物化的可压缩非定常 Navier-Stokes 方程是双曲抛物型方程组。在 (x,y) 平面上也是双曲抛物型方程组。

1.3.14 可压缩黏性常比热完全气体二维定常流动的 Navier-Stokes 方程

此时，$\frac{\partial}{\partial t}=0$，方程组(1.1.10)简化为

$$\left.\begin{aligned}
&u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0\\
&u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\\
&\qquad\frac{\lambda+\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0\\
&u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\lambda+\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0\\
&u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+\gamma p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\gamma\mu p}{Pr\rho^2}\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\right)-\\
&\qquad\frac{\gamma\mu}{Pr\rho}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)=\frac{R}{C_v}\Phi
\end{aligned}\right\}$$

(1.3.59)

为了将方程组(1.3.59)化为一阶拟线性偏微分方程组，引进一些新的未知量，参见式(1.3.50)。

由式(1.3.59)及(1.3.50)可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho_x}{\partial x}+\frac{\rho^2}{\lambda+2\mu}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\rho}{(\lambda+2\mu)u}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{v}{u}\frac{\partial \rho_x}{\partial y}+\\
&\qquad\frac{\mu\rho}{(\lambda+2\mu)u}\frac{\partial v_x}{\partial y}-\frac{\mu\rho}{(\lambda+2\mu)u}\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\rho^2 v}{(\lambda+2\mu)u}\frac{\partial u}{\partial y}=\\
&\qquad-\frac{1}{u}(2\rho_x u_x+\rho_y v_x+\rho_x v_y)\\
&\frac{\partial u_x}{\partial x}-\frac{\rho u}{\lambda+2\mu}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial v_x}{\partial y}+\\
&\qquad\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial u_y}{\partial y}-\frac{\rho v}{\lambda+2\mu}\frac{\partial u}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{\rho u}{\mu}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{\partial v_y}{\partial y}-\frac{\rho v}{\mu}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial p_x}{\partial x}+\left(\frac{p\rho}{\lambda+2\mu}-\frac{Pr\,p\rho}{\mu}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{p}{(\lambda+2\mu)u}-\frac{Pr\,\rho u}{\gamma\mu}\right)\frac{\partial p}{\partial x}+\\
&\qquad\frac{pv}{\rho u}\frac{\partial \rho_x}{\partial y}+\frac{p\mu}{(\lambda+2\mu)u}\frac{\partial v_x}{\partial y}-\frac{p}{\rho}\frac{\partial \rho_y}{\partial y}-\frac{p\mu}{(\lambda+2\mu)u}\frac{\partial u_y}{\partial y}+\\
&\qquad\frac{\partial p_y}{\partial y}+\frac{p\rho v}{(\lambda+2\mu)u}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{Pr\,p\rho}{\mu}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{Pr\,\rho v}{\gamma\mu}\frac{\partial p}{\partial y}=\\
&\qquad-\frac{Pr\,\rho R}{\gamma\mu C_v}\Phi-\frac{p}{\rho u}(2\rho_x u_x+v_x\rho_y+\rho_x v_y)\\
&\frac{\partial \rho_y}{\partial x}-\frac{\partial \rho_x}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial p_y}{\partial x}-\frac{\partial p_x}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial \rho}{\partial x}=\rho_x
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= u_x \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= v_x \\
\frac{\partial p}{\partial x} &= p_x
\end{aligned}\right\} \tag{1.3.60}
$$

它可被改写成如下矩阵方程

$$
\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} + \boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y} = \boldsymbol{F} \tag{1.3.61}
$$

式中，$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的表示式与上一小节中的完全相同，因此 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的表示式也和上一小节中的完全相同。

$\boldsymbol{B} =$

$$
\begin{bmatrix}
\frac{v}{u} & 0 & \frac{\mu\rho}{(\lambda+2\mu)u} & 0 & 0 & -\frac{\mu\rho}{(\lambda+2\mu)u} & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho^2 v}{(\lambda+2\mu)u} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} & 0 & 0 & \frac{\mu}{\lambda+2\mu} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho v}{\lambda+2\mu} & 0 & 0 \\
0 & \frac{\lambda+\mu}{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda+2\mu}{\mu} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho v}{\mu} & -\frac{1}{\mu} \\
\frac{pv}{\rho u} & 0 & \frac{p\mu}{(\lambda+2\mu)u} & 0 & -\frac{p}{\rho} & -\frac{p\mu}{(\lambda+2\mu)u} & 0 & 1 & 0 & \frac{p\rho v}{(\lambda+2\mu)u} & -\frac{Prpe}{\mu} & -\frac{Pr\rho v}{\gamma\mu} \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

以矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 左乘式(1.3.61)可得

$$
\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} + \boldsymbol{C}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y} = \boldsymbol{S} \tag{1.3.62}
$$

式中，列向量 $\boldsymbol{S}$ 的表示式和上一小节中的完全相同。而 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1}$

$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$。

矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{C} - \lambda \boldsymbol{I}| = -\lambda^5\left(\frac{v}{u} - \lambda\right)(\lambda^2 + 1)^3 = 0 \quad (1.3.63)$$

故有

$$\lambda_i^{(C)} = 0 \qquad (i = 1,2,3,4,5)$$

$$\lambda_6^{(C)} = v/u$$

$$\lambda_i^{(C)} = + i \qquad (i = 7,8,9)$$

$$\lambda_i^{(C)} = - i \qquad (i = 10,11,12)$$

由此可得结论:可压缩黏性常比热完全气体二维定常流动的 Navier-Stokes 方程是双曲椭圆型方程组。

1.3.15 可压缩黏性常比热完全气体二维非定常流动的 Navier-Stokes 方程

由式(1.1.10)及(1.3.50)可得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho_x}{\partial x} + \frac{\rho^2}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\rho}{(\lambda + 2\mu)u}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v}{u}\frac{\partial \rho_x}{\partial y} + \\
&\qquad \frac{\mu\rho}{(\lambda + 2\mu)u}\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\rho\mu}{(\lambda + 2\mu)u}\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\rho^2 v}{(\lambda + 2\mu)u}\frac{\partial u}{\partial y} + \\
&\qquad \frac{1}{u}\frac{\partial \rho_x}{\partial t} + \frac{\rho^2}{(\lambda + 2\mu)u}\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{u}(2\rho_x u_x + v_x\rho_y + \rho_x v_y) \\
&\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\rho u}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial u_y}{\partial y} - \\
&\qquad \frac{\rho v}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \\
&\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\rho u}{\mu}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\lambda + \mu}{\mu}\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\rho v}{\mu}\frac{\partial v}{\partial y} - \\
&\qquad \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial v}{\partial t} = 0
\end{aligned}\right\}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial p_x}{\partial x}+\left(\frac{p\rho}{\lambda+2\mu}-\frac{prp\rho}{\mu}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{p}{(\lambda+2\mu)u}-\frac{pr\rho u}{\gamma\mu}\right)\frac{\partial p}{\partial x}+\\
&\qquad\frac{pv}{\rho u}\frac{\partial\rho_x}{\partial y}+\frac{p\mu}{(\lambda+2\mu)u}\frac{\partial v_x}{\partial y}-\frac{p}{\rho}\frac{\partial\rho_y}{\partial y}-\frac{p\mu}{(\lambda+2\mu)u}\frac{\partial u_x}{\partial y}+\\
&\qquad\frac{\partial p_y}{\partial y}+\frac{p\rho v}{(\lambda+2\mu)u}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{prp\rho}{\mu}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{pr\rho v}{\gamma\mu}\frac{\partial p}{\partial y}+\\
&\qquad\frac{p}{\rho u}\frac{\partial\rho_x}{\partial t}+\frac{p\rho}{(\lambda+2\mu)u}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{pr\rho}{\gamma\mu}\frac{\partial p}{\partial t}=\\
&\qquad\quad\frac{pr\rho R}{\gamma\mu C_v}\Phi-\frac{p}{\rho u}(2\rho_x u_x+v_x\rho_y+\rho_x v_y)\\
&\frac{\partial\rho_y}{\partial x}-\frac{\partial\rho_x}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial p_y}{\partial x}-\frac{\partial p_x}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial\rho}{\partial x}=\rho_x\\
&\frac{\partial u}{\partial x}=u_x\\
&\frac{\partial v}{\partial x}=v_x\\
&\frac{\partial p}{\partial x}=p_x
\end{aligned}\right\}
\tag{1.3.64}
$$

它可被改写成如下矩阵方程

$$
\boldsymbol{A}\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial x}+\boldsymbol{B}\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial y}+\boldsymbol{D}\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial t}=\boldsymbol{F}\tag{1.3.65}
$$

式中，$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的表示式与上一小节中的完全相同。而

$$
\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}
\frac{1}{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho^2}{(\lambda+2\mu)u} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho}{\lambda+2\mu} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho}{\mu} & 0 \\
\frac{p}{\rho u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p\rho}{(\lambda+2\mu)u} & 0 & -\frac{Pr\rho}{\gamma\mu} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

以 $\boldsymbol{A}^{-1}$左乘式(1.3.65)可得

$$
\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}+\boldsymbol{C}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y}+\boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}=\boldsymbol{S} \tag{1.3.66}
$$

式中矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和列向量 $\boldsymbol{S}$ 的表示式和上一小节中的完全相同。而 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}$。

关于矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的特征值已经分析过了,结论是:在(x,y)平面上,方程组(1.1.10)是椭圆型的。

矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的特征方程为

$$
|\boldsymbol{E}-\lambda \boldsymbol{I}|=\lambda^{11}\left(\lambda-\frac{1}{u}\right) \tag{1.3.67}
$$

故有 $\lambda_1^{(E)}=\frac{1}{u}$;$\lambda_i^{(E)}=0(i=2,3,\cdots,12)$。

由此可得结论:在(x,t)平面上,方程组(1.1.10)是双曲抛物型方程组。

类似地可以证明,在(y,t)平面上,方程组(1.1.10)也是双曲

抛物型方程组。

综上所述，在包含时间 t 轴的任何平面上，可压缩黏性常比热完全气体二维非定常流动的 Navier-Stokes 方程是双曲抛物型方程组，而在 (x,y) 平面上则为双曲椭圆型方程组。

1.4 流体力学问题的定解条件的提法

根据前面的讨论可知，流体力学各级近似方程均可归结为一阶拟线性偏微分方程组。

正确的定解条件一般说来应该这样规定：保证所研究的偏微分方程组的定解问题是适定的，意即解存在、唯一，并且连续依赖于定解条件。

应该指出，对于普遍的一阶拟线性偏微分方程组而言，定解条件的正确提法仍然是一个没有完全解决的问题。

在本节中，我们只是通过一些简单的典型例子，启发性地来讨论这个问题，更详细和系统的阐述将在第 7 章中给出。

1.4.1 椭圆型偏微分方程边值问题的提法

以 Laplace 方程作为椭圆型偏微分方程的模型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (x,y) \in D \tag{1.4.1}$$

三种典型的边界条件的提法如下（求解域见图 1-1）。

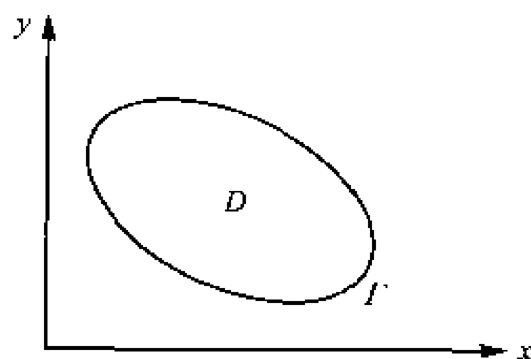


图 1-1 求解域

(1) 第一类边界条件

$$u|_{\Gamma} = f(x,y) \tag{1.4.2}$$

式{(1.4.1),(1.4.2)}称为 Laplace 方程的第一边值问题或 Dirichlet 问题。

(2) 第二类边界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = f(x,y) \tag{1.4.3}$$

式{(1.4.1),(1.4.3)}称为 Laplace 方程的第二边值问题或 Neumann 问题。

(3) 第三类边界条件

$$\left(k\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)_{\Gamma} = f(x,y) \tag{1.4.4}$$

式{(1.4.1),(1.4.4)}称为 Laplace 方程的第三边值问题或 Robin 问题。

在偏微分方程理论中已经证明了上述 Dirichlet 问题、Neumann 问题和 Robin 问题都是适定的。

上述三类边界条件提法的共同特点是,要求在封闭区域的整个边界上规定边界条件。这个结论可推广到椭圆型偏微分方程组的普遍情况。

1.4.2 双曲型偏微分方程初值、边值问题的提法

以如下单向波方程作为双曲型偏微分方程的模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.4.5}$$

式中 a 为常数。显然,方程(1.4.5)的普遍解为

$$u(x,t) = \varphi(x - at) \tag{1.4.6}$$

式中 φ 为任意的一次可微函数。

由此可知,当 $x - at = k = \text{const}$ 时,u 保持不变。而当 k 取不同值时,$x - at = k$ 代表(x,t)平面上的一族直线,它们是方程(1.4.5)的特征线。在此情况下,沿着每一条特征线 u 保持常值。

换句话说,沿着每一条特征线传播的扰动不随时间而变化。

首先来讨论纯初值问题。今给定如下初值条件

$$u(x,0)=f(x)\qquad(-\infty<x<+\infty)\tag{1.4.7}$$

初值问题{(1.4.5),(1.4.7)}的解为

$$u(x,t)=f(x-at)\tag{1.4.8}$$

它可以用图 1-2 表示出来。

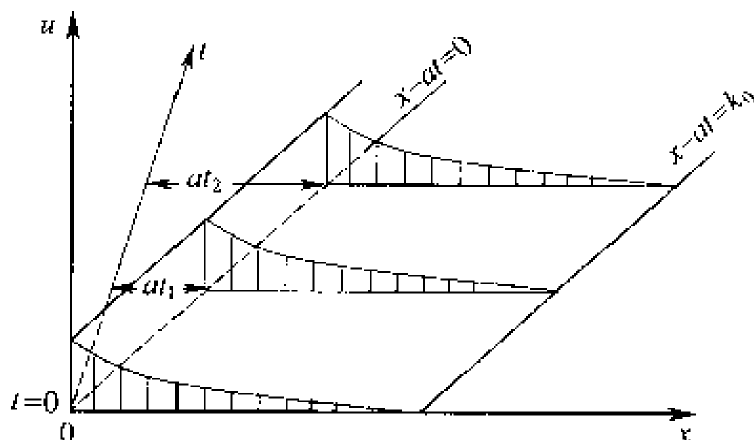


图 1-2　初值问题{(1.4.5),(1.4.7)}的解

由上述知,式(1.4.8)可看作一个向右传播的"波"(当 $a>0$ 时),因为 $u(x,t)$ 在 $t=t_1$ 时的剖面只是 $t=0$ 时的剖面 $u(x,0)=f(x)$ 向右以速度 a 移动了 at_1 这么长一段距离而已。

显然,纯初值问题{(1.4.5),(1.4.7)}是适定的。

其次,讨论初边值问题的提法。当 $a>0$ 时,特征线向右倾斜(见图 1-3(a)),所以除了初始条件 $u(x,0)=f(x)$ 之外,只能在左边界上规定边界条件 $u(x_1,t)=\psi(t)$,而在右边界上的 u 值将由初值和左边值完全决定,故在右边界上不能规定边界条件。

当 $a<0$ 时,特征线向左倾斜(见图 1-3(b))。此时,除了初始条件之外,只能在右边界上规定边界条件,而在左边界上的 u 值将由初值和右边值完全决定,故在左边界上不能规定边界条件。

综上所述可得如下结论:对于单向波方程(1.4.5)而言,要求在开区域的部分边界(这里为叙述方便,将 t 视为普通的自变量,因此不再区分初始条件和边界条件)上规定边界条件。具体地说,

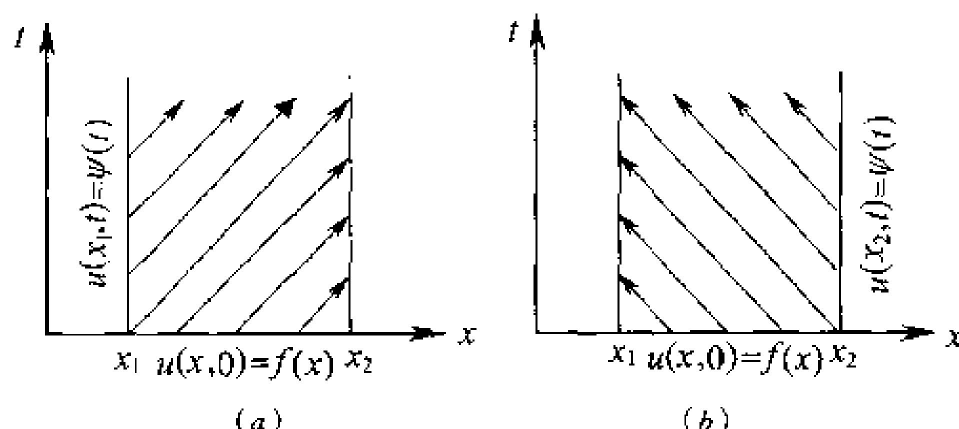


图 1-3 特征线走向与初边值提法

(a) $a>0$; (b) $a<0$。

如果特征线自边界走向求解域内部,则在该边界上应规定边界条件;反之,若特征线自求解域内部走向边界,则在该边界上不能规定边界条件。

上述结论可以推广到双曲型偏微分方程组的普遍情况。

下面以可压缩理想完全气体一维非定常流动的 Euler 方程为例作进一步说明。

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0\\
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0\\
&\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+a^2\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0
\end{aligned}\right\}\tag{1.4.9}
$$

方程组(1.4.9)的三条特征线的斜率分别是

$$
\left.\begin{aligned}
&C^+:\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u+a\\
&C^-:\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u-a\\
&C^0:\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u
\end{aligned}\right\}\tag{1.4.10}
$$

现在讨论方程组(1.4.9)在(x,t)平面中区域 R 上的定解条件。R 定义为 $0\leqslant x\leqslant L,0\leqslant t\leqslant t_0$ 的矩形区域(参见图 1-4)。

为便于讨论,我们先假定 $u>0$。

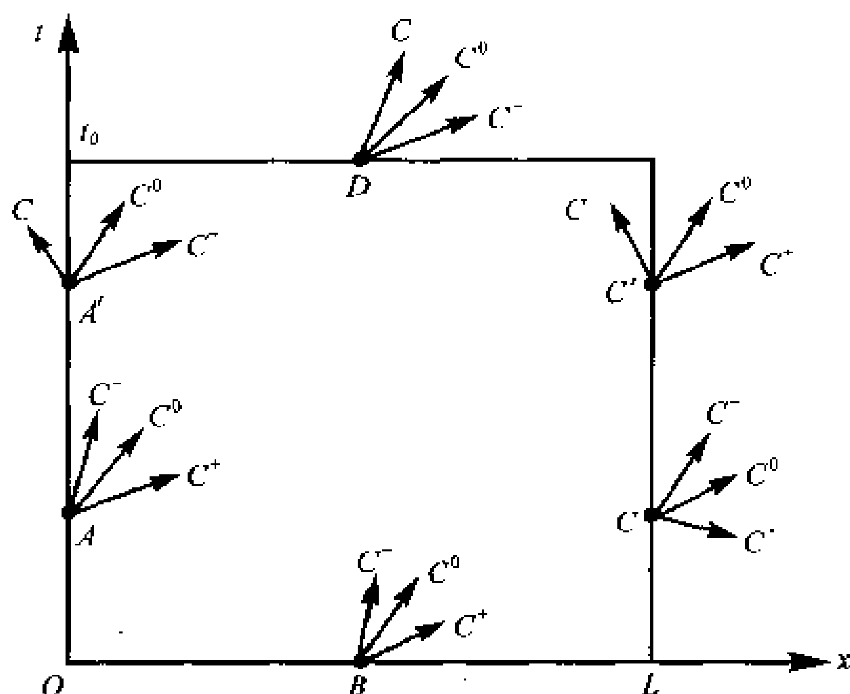


图 1-4　一维非定常流动 Euler 方程的初、边值条件的提法

在 $x=0$ 边界上某点 A 处，若流动是超声速的，即 $u_A>a$，则其上三条特征线 C^+，C^- 及 C^0 都指向求解域内部，于是在 A 点要规定三个边界条件。如果在 $x=0$ 边界上某点 A'处流动是亚声速的，即 $u_{A'}<a$，则其上两条特征线 C^0 和 C^+ 指向求解域内部，而另一条特征线 C 指向求解域外部，于是在 A'点处只能规定两个边界条件。

在 $t=0$ 上的任一点 B 处，不论流动是超声速还是亚声速，其上三条特征线都指向求解域内部，故在 B 点上必须规定三个初始条件。

在 $x=L$ 上某点 C 处，若 $u_C>a$，则其上三条特征线都指向求解域外部，故在 C 点处不能规定任何边界条件。如果在 $x=L$ 上某点 C'处流动是亚声速的，即 $u_{C'}<a$，则其上两条特征线 C^0 及 C^+ 指向求解域外部；而另一条特征线 C^- 指向求解域内部，故在 C'点处要求规定一个边界条件。

在 $t=t_0$ 上任一点 D 处，不论 $u_D>a$ 还是 $u_D<a$，其上三条特征线都指向区域的外部，故在 D 点处不能规定任何定解条件。

根据上面的讨论知，对于双曲型方程组而言，我们根据特征线

的走向可以决定求解域边界上任一点处定解条件的数目。至于规定怎样的具体的定解条件,则需要针对所研究的具体问题根据物理上的考虑来决定。

1.4.3 抛物型偏微分方程初值、边值问题的提法

以一维热传导方程作为抛物型方程的模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.4.11}$$

从物理上考虑,如果已知物体在初始时刻的温度分布以及物体在边界上的温度状况(或热交换状况),就可以完全确定物体在以后时刻的温度。因此,除了初始条件

$$u(x,0) = f(x) \tag{1.4.12}$$

以外,还必须规定边界条件。

三种典型的边界条件的提法如下(参见图 1-5)。

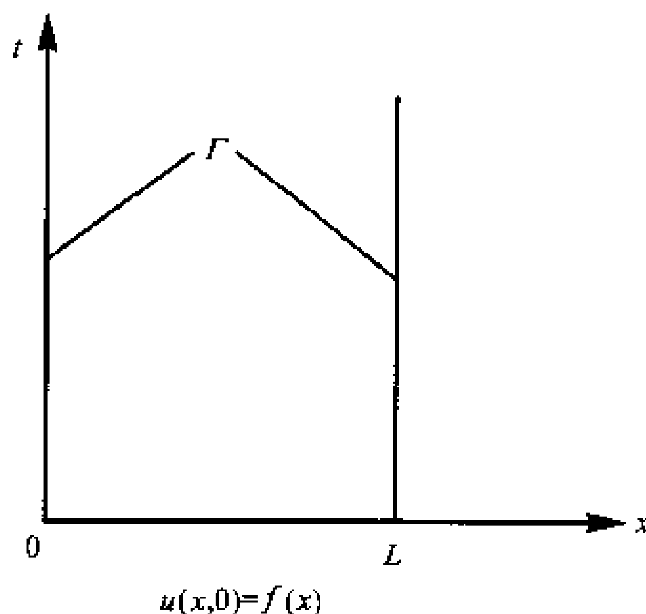


图 1-5 一维热传导方程的初、边值条件的提法
(这里 Γ 包括 $x=0$ 及 $x=L$ 两条直线)

(1) 第一类边界条件

$$u|_{\Gamma} = g(t) \tag{1.4.13}$$

(2) 第二类边界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = g(t) \tag{1.4.14}$$

这里，n 表示 Γ 的法向。

(3) 第三类边界条件

$$\left(k\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right)_{\Gamma}=g(t) \tag{1.4.15}$$

式中，f,g,k,h 都是已知函数。

在偏微分方程理论中已经证明了上述三种初、边值问题{(1.4.11)，(1.4.12)，(1.4.13)}，{(1.4.11)，(1.4.12)，(1.4.14)}，{(1.4.11)，(1.4.12)，(1.4.15)}都是适定的。

上述三类初、边值条件提法的共同特点是：要求在开区域的所有边界上规定定解条件。这个结论可推广到抛物型偏微分方程组的普遍情况。

1.5 弱解与熵增条件

这里，我们用一个简单的例子来引进拟线性偏微分方程弱解的概念。

今考察如下一阶拟线性双曲型方程的初值问题。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)=0 \qquad (t>0,\ -\infty<x<+\infty) \tag{1.5.1}$$

$$u_{|t=0}=\varphi(x) \tag{1.5.2}$$

1.5.1 古典解

在包含 $t=0$ 的上半平面 $t\geqslant 0$ 中连续，而在不包含 $t=0$ 的上半平面 $t>0$ 中满足方程(1.5.1)，且在 $t=0$ 上满足初始条件(1.5.2)的函数 $u(x,t)$ 称为初值问题{(1.5.1)，(1.5.2)}的古典解。

1.5.2 强间断的存在

显然，方程(1.5.1)的一般解为

$$u(x,t)=F(Z) \tag{1.5.3}$$

式中，F 为任意可微函数，而 $Z \equiv x - tu(x,t)$，故初值问题 $\{(1.5.1),(1.5.2)\}$ 的解为

$$u(x,t) = \varphi[x - tu(x,t)] \tag{1.5.4}$$

由此解可知

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varphi'(Z)}{1 + t\varphi'(Z)} \tag{1.5.5}$$

如果初始函数 $\varphi(x)$ 是光滑的，但给得这样，当 $t \to t_1$ 时，$1 + t\varphi'(Z) \to 0$，则 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{t \to t_1} \to \infty$。这就表明，在初始时刻为光滑的流场中，随着时间的推进，当 $t \to t_1$ 时，流场中出现了强间断。此时古典解失去意义，为此必须把解的概念加以扩充。

1.5.3 弱解

今考察如下守恒形式的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(x,t,u)}{\partial x} + g(x,t,u) = 0 \tag{1.5.6}$$

式中 f 和 g 都是给定的函数。

以 R 表示求解域中的任意一个子区域。若 $u(x,t)$ 对任意一个在区域 R 的边界上为零的连续可微函数 w 都满足如下积分等式

$$\iint_R \left[\frac{\partial w}{\partial t}u + \frac{\partial w}{\partial x}f - gw\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0 \tag{1.5.7}$$

则称 $u(x,t)$ 是方程(1.5.6)的弱解。

下面导出强间断条件。假定穿过 (x,t) 平面上一曲线 Γ 时，$u(x,t)$ 有强间断，但它在此曲线的两边都满足方程(1.5.6)。设 $u(x,t)$ 是弱解，那么它应该满足积分等式(1.5.7)。倘若选取这样的区域 R，它包含着间断线的一部分(参见图 1-6)，那么可以从积分区域中挖去一个包含间断线的无限小子区域(如图 1-6 中阴影线所示)，从而以两个新的积分区域代替原区域 R。在每一个新积分区域中 $u(x,t)$ 是可微的。应用 Green 公式及方程

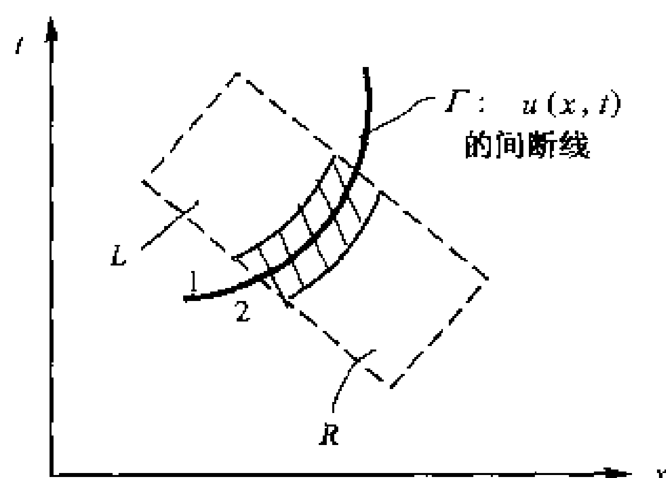


图 1-6　强间断条件推导用图

(1.5.6)，可将等式(1.5.7)化成沿着包含在区域 R 内的部分间断线的积分

$$\int w[(u_1 - u_2)\mathrm{d}x - (f_1 - f_2)\mathrm{d}t] = 0 \qquad (1.5.8)$$

式中，下标“1”和“2”分别表示间断线两侧处的值(如图 1-6 所示)。

因为式(1.5.8)对于在 R 的边界上为零的任意一个连续可微函数 $w(x,t)$ 都是成立的，所以在间断线的任一点上应有如下关系式成立

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(u_1 - u_2) = f_1 - f_2 \qquad (1.5.9)$$

式中，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 是间断线的斜率。

式(1.5.9)就是我们所要推导的强间断条件。由此得到了关于弱解的另一个定义：在间断线 Γ 上满足强间断条件式(1.5.9)，而在除去间断线之外的求解域内处处满足方程(1.5.6)的函数 $u(x,t)$ 称为方程(1.5.6)的弱解。

1.5.4 熵条件

应该指出，按上述所定义的弱解并不是唯一的。

对于如下双曲型拟线性偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0 \tag{1.5.10}$$

Олейник 提出了如下熵条件

$$\frac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}\leqslant\frac{f(u_1)-f(u_2)}{u_1-u_2}\leqslant\frac{f(u)-f(u_2)}{u-u_2} \tag{1.5.11}$$

式中，$f(u)=f'(u)u=\lambda(u)u$，$\lambda(u)$是方程(1.5.10)的特征线的斜率；下标"1"和"2"分别表示激波前和激波后的状态。

这个熵条件式(1.5.11)保证了方程(1.5.10)的弱解是唯一的，并且是物理解。

由微分中值定理知

$$\frac{f(u)-f(u_1)}{u-u_1}=\lambda_1$$

$$\frac{f(u)-f(u_2)}{u-u_2}=\lambda_2$$

而由式(1.5.9)知

$$\frac{f(u_1)-f(u_2)}{u_1-u_2}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\equiv D$$

式中，D 是激波的斜率。

于是，Олейник 熵条件式(1.5.11)可改写成

$$\lambda_1\leqslant D\leqslant\lambda_2 \tag{1.5.11'}$$

下面，从热力学第二定律来导出上述熵条件。

由斜激波的关系式知

$$\frac{S_2-S_1}{C_v}=\ln\left[\frac{p_2}{p_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma}\right]=$$

$$\ln\left\{\left[1+\frac{2\gamma}{\gamma+1}(Ma_1^2\sin^2\beta-1)\right]\left[\frac{(\gamma-1)Ma_1^2\sin^2\beta+2}{(\gamma+1)Ma_1^2\sin^2\beta}\right]^{\gamma}\right\} \tag{1.5.12}$$

及

$$Ma_2^2\sin^2(\beta-\delta)=\frac{1+\dfrac{\gamma-1}{2}Ma_1^2\sin^2\beta}{\gamma Ma_1^2\sin^2\beta-\dfrac{\gamma-1}{2}} \tag{1.5.13}$$

式中 S 是熵，其中下标 1 和 2 分别表示激波前和激波后，参见图 1-7。

图 1-7 激波斜率和激波前、后特征线的斜率

因为在双曲型方程的范围内进行讨论，故 $Ma_1>1$，$Ma_2>1$。

由热力学第二定律知，当穿过激波时熵增大（当激波强度为零，即 $Ma_1\sin\beta=1$ 时，熵不变）。

由 $\dfrac{S_2-S_1}{C_v}\geqslant 0$ 可得：$Ma_1\sin\beta\geqslant 1$，即 $\sin\beta\geqslant\dfrac{1}{Ma_1}=\sin\mu_1$，从而得到 $\tan\beta\geqslant\tan\mu_1$，即

$$D\geqslant\lambda_1 \tag{1.5.14}$$

又由式(1.5.13)知，当 $Ma_1\sin\beta\geqslant 1$ 时有 $Ma_2^2\sin^2(\beta-\delta)\leqslant 1$，故有 $\sin(\beta-\delta)\leqslant\dfrac{1}{Ma_2}=\sin\mu_2$，从而可得 $\tan\beta\leqslant\tan(\mu_2+\delta)=\lambda_2$，即

$$D\leqslant\lambda_2 \tag{1.5.15}$$

综上所述可知，当激波强度大于或等于零，即 $Ma_1\sin\beta\geqslant 1$ 时，有下列不等式成立

$$\lambda_1 \leqslant D \leqslant \lambda_2$$

这样,我们从热力学第二定律导出了 Олейник 熵条件,也就是说,Олейник 熵条件实际上可由穿过激波时的熵增条件得到。

第2章 模型方程及其差分计算的分析理论

2.1 流体力学各级近似的模型方程

在第1章内,介绍了流体力学的各级近似方程。那就是:当描述流体力学最一般的运动时用 Navier-Stokes 方程;如果在流动的区域内,黏性的作用可以忽略不计时,可以用 Euler 方程描述其运动;如果无黏性流动可视为无旋的,则 Euler 方程可简化为全速势方程;如果无旋流动中物体对均匀来流的流场扰动是小的,全速势方程可以线化为更简单的方程(称之为线化方程)。在计算流体力学的发展历史中,人们最先研究的是线化方程,有限基本解法是解决线化方程最有效的方法,目前已发展得相当成熟。其次,全速势方程的研究也已相当深入。当前人们把相当的注意力集中到 Euler 方程以及 Navier-Stokes 方程的求解上。

在求解流体力学的各级近似方程时,为了能够定性了解流动的物理特征,人们常常根据问题特征将方程简化,建立所谓"模型方程"。在建立模型方程时,必须注意以下两点:第一,所给出的方程确实是便于解析分析的简单方程;第二,所给出的方程确实保持了原方程或原问题的本质或特征。目前,针对流体力学的方程,已经提出了各种模型方程,现分述如下。

2.1.1 Euler 方程的模型方程

对于定常亚声速流动,第1章分析指出,Euler 方程具有椭圆型性质,因此采用最简单的椭圆型方程来作为它的模型方程。在

二维情况下,这个方程可写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2.1.1}$$

大家知道,如果流动是无旋的,且当来流流场受物体的扰动很小时,定常 Euler 方程可以用以下方程来近似

$$(1 - Ma_\infty^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

这里 Ma_∞是来流马赫数,u 是速度势。显然如果引入

$$\bar{y} = (1 - Ma_\infty^2)^{-\frac{1}{2}} y$$

则上面的方程可转换成式(2.1.1)的形式。因此式(2.1.1)作为定常亚声速流动 Euler 方程的模型方程是能反映原方程的本质的。

对于定常超声速流动或非定常流动,同样的理由可以说明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{2.1.2}$$

可作为 Euler 方程的模型方程。这里 a 是常数,t,x 为两个自变量。

可以证明式(2.1.2)可由下式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.1.3}$$

得到。事实上将式(2.1.3)对 t 求导后得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0$$

由式(2.1.3)解出$\frac{\partial u}{\partial t} = -a\frac{\partial u}{\partial x}$,代入上式后即得式(2.1.2)。因此在很多文献中,人们常常将式(2.1.3)作为定常超声速流动或非定常流动 Euler 方程的模型方程。

当 a 为常数时,式(2.1.3)是线性方程。为了考虑非线性的影响,不少人将 a 视为 u 的函数,这就得到如下方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.1.4}$$

在特殊情况下,若取 $a = u$,则有

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.1.5}$$

2.1.2 Navier-Stokes 方程的模型方程

在求解 Navier-Stokes 方程时，很多人利用抛物化近似，即采用抛物化 Navier-Stokes 方程。在流体力学中，Prandtl 建立的边界层方程是最简单的抛物化黏性流动方程。为了分析抛物化 Navier-Stokes 方程的性质，1948 年 Burgers 引入如下非线性方程作为其模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.1.6}$$

这里方程右端代表黏性项的贡献，而左端代表对流项的贡献。我们称之为 Burgers 方程。显然当 $b = 0$ 时，式(2.1.6)即给出式(2.1.5)，所以式(2.1.5)有时也被称为无黏性 Burgers 方程。

在文献中，有的还采用如下方程作为模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.1.7}$$

这里 $a(u)$是 u 的已知函数。例如在研究黏性气体穿过正激波的运动时，可取

$$a(u) = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} u_\infty \left(1 - \frac{u_\infty u_2}{u^2}\right)$$

$$b = \nu$$

式中 u_∞、u_2 为激波前、后气体运动的速度；γ 为气体绝热指数；u 为气体运动速度；ν 为运动黏性系数。

2.2 方程的离散化及构造差分格式的方法

以下研究流体力学方程的差分解法。作为差分求解的第一步，必须把连续的求解域用有限的离散点来代替。例如，设 D 是

流体力学微分方程组的求解域，通过适当的坐标变换，将 D 转换成规则的区域，例如在二维情况下，将它转换成一个矩形域，同时微分方程亦作相应的变换。设变换后的坐标为 x、y，求解域为 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$，$u(x,y)$是待求的函数。如图 2-1 所示，将求解域划分成若干规则的等距网格，其 x、y 方向的网格间距分别为 Δx、Δy，沿 x 方向网格的节点号用 i 表示，沿 y 方向网格的节点号用 j 表示。设网格节点号为 i,j 的坐标为(x_i, y_j)，其上的物理量用 $u_{i,j}=u(x_i,y_j)$表示。在微分方程的求解问题中，x、y 是连续变化的，可取求解域内任一点的值，用差分求解时，x、y 仅取网格节点上的值，显然，这就将问题离散化了。与此相应，微分方程必须用差分方程代替，因为在离散的区域内，导数的计算只能用差商近似。下面研究如何由微分方程来建立差分方程。这里介绍一种构造差分格式最常用的方法——Taylor 级数展开法。

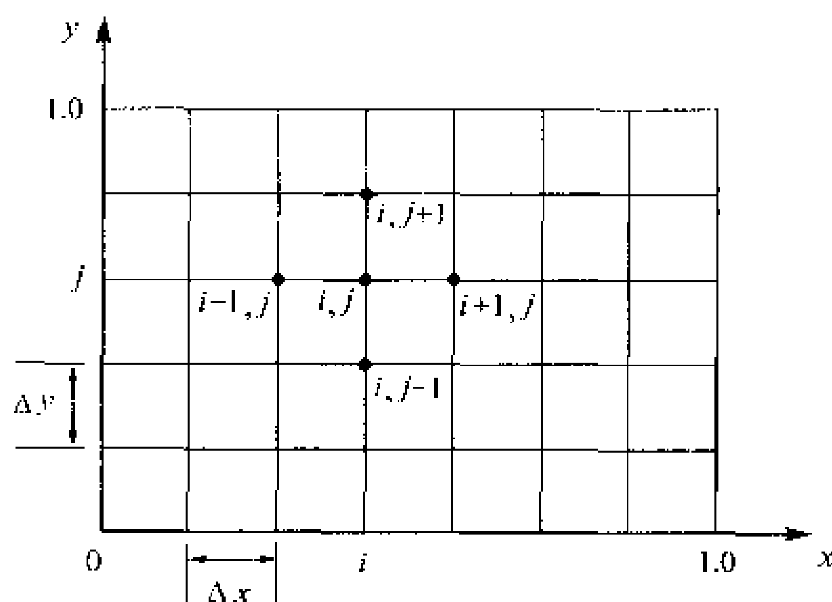


图 2-1　差分计算用网格

作为例子，现在来研究模型方程(2.1.3)。设方程(2.1.3)的求解域为 $t\geqslant 0$ 和 $-\infty<x<\infty$，n 是 t 方向网格的节点号，i 是 x 方向的网格节点号。由于方程(2.1.3)在求解域内任一点皆成立，将它用于节点(n,i)，于是有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n + a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n = 0 \tag{2.2.1}$$

2.2.1　一阶显式差分格式的建立

引入如下符号

$$u(x_i, t_n) = u_i^n$$

利用 Taylor 级数展开式，有

$$u_{i+1}^n = u_i^n + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n \Delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n \Delta x^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^n \Delta x^3 + \cdots \tag{2.2.2}$$

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n \Delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n \Delta x^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^n \Delta x^3 + \cdots \tag{2.2.3}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n \Delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n \Delta t^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^n \Delta t^3 + \cdots \tag{2.2.4}$$

由式(2.2.2)可得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.2.5}$$

这里 $O(\Delta x)$表示 Δx 一次和一次以上的小量项。并称$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}$为$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i$的一阶前向差商。

由式(2.2.3)得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.2.6}$$

式中　$\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}$称为$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i$的一阶后向差商。

由式(2.2.4)得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \qquad (2.2.7)$$

这里 $O(\Delta t)$表示 Δt 的一次和一次以上小量项。

将式(2.2.5)、式(2.2.7)代入式(2.2.1)得

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right) + O(\Delta t\Delta x)$$

将式(2.2.6)、式(2.2.7)代入式(2.2.1)得

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right) + O(\Delta t\Delta x)$$

式中 $O(\Delta t\Delta x)$表示 Δt、Δx 二次和二次以上的小量项。因此,准确到 Δt、Δx 的一阶精度,有

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right) \qquad (2.2.8)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right) \qquad (2.2.9)$$

式(2.2.8)或式(2.2.9)就是时间、空间准确到一阶精度的式(2.1.3)的差分计算格式,或称式(2.1.3)的一阶精度的差分方程。

式(2.2.8)、式(2.2.9)表明,式(2.1.3)的一阶精度的差分方程形式上是不惟一的。本章第 7 节将要讲述差分方程计算过程中的稳定性。那里将指出,如果 $a>0$ 采用式(2.2.9)、$a<0$ 采用式(2.2.8)作为式(2.1.3)的差分方程,稳定性条件是可以满足的。如此选择的差分格式称之为迎风(或上风)格式。

由式(2.2.8)、式(2.2.9)可以看出,对于式(2.1.3)的初值问题,若 $t=t_n$ 时 u_i^n 已知,式(2.2.8)或式(2.2.9)仅含一个未知量 u_i^{n+1},它可以直接被计算出来。以后称直接可解出未知量的差分格式,或者说只含一个未知量而且它可用已知量计算的差分格式,叫做显式差分格式。显然式(2.2.8)、式(2.2.9)是显式格式。由于格式中仅涉及两个时间层 t_n 和 t_{n+1}的值,因此它们又叫两层一阶显式格式。

2.2.2 二阶显式差分格式的建立

1. 两层一步二阶显式格式

由式(2.2.4)有

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n \Delta t + \frac{1}{2}\Delta t^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n + O(\Delta t^3)$$

(2.2.10)

将式(2.1.3)对时间求导，然后再利用式(2.1.3)消去$\frac{\partial u}{\partial t}$易得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

将此式用于节点(i,n)，然后与式(2.2.1)一起代入式(2.2.10)易得

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\Delta t\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n + \frac{1}{2}a^2\Delta t^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n + O(\Delta t^3)$$

(2.2.11)

由式(2.2.2)和式(2.2.3)可得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \qquad (2.2.12)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \qquad (2.2.13)$$

以后称$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}$为$\frac{\partial u}{\partial x}$的二阶中心差商；称$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}$为$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$的二阶中心差商。将式(2.2.12)、式(2.2.13)代入式(2.2.11)得

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right) \qquad (2.2.14)$$

这里略去了Δt、Δx的三阶以上的所有小量项，因此它是准确到二

阶精度的二层显式格式。因为它是 Lax-Wendroff 于 1960 年首先给出的，而且只须经过一步就可求出 u_i^{n+1}，所以亦称为一步显式 Lax-Wendroff 格式。

2. 二层两步二阶显式格式

首先由式(2.2.14)出发来建立二步格式。事实上式(2.2.14)可写成

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left\{\left[\frac{1}{2}\left(u_{i+1}^n + u_i^n\right) - \frac{1}{2}\frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)\right] - \left[\frac{1}{2}\left(u_i^n + u_{i-1}^n\right) - \frac{1}{2}\frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right)\right]\right\}$$

显然，该式可写成如下两步格式

$$\begin{cases} u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\left(u_{i+1}^n + u_i^n\right) - \dfrac{a\left(\dfrac{1}{2}\Delta t\right)}{\Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right) \\ u_i^{n+1} = u_i^n - \dfrac{a\Delta t}{\Delta x}\left(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) \end{cases} \tag{2.2.15}$$

格式(2.2.15)是 Lax-Wendroff 给出的，所以叫做两步 Lax-Wendroff 显式格式。

还可以利用另外的方法建立两步显式格式。事实上，如果记一阶前向差商为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_f}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.2.16}$$

记一阶后向差商为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_b}\right)_i^n = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.2.17}$$

则 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ 的二阶中心差商可表示为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_c}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_f}\right)_i^n + \left(\frac{\partial u}{\partial x_b}\right)_i^n\right] + O(\Delta x^2) \qquad (2.2.18)$$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$的二阶中心差商可表示为

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n = \left(\frac{\partial}{\partial x_f}\frac{\partial u}{\partial x_b}\right)_i^n + O(\Delta x^2) =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_b}\frac{\partial u}{\partial x_f}\right)_i^n + O(\Delta x^2) \qquad (2.2.19)$$

将式(2.2.18)、式(2.2.19)代入式(2.2.11)，准确到二阶精度得

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2}a\Delta t\left(\frac{\partial u}{\partial x_f} + \frac{\partial u}{\partial x_b}\right)_i^n +$$

$$\frac{1}{2}(a\Delta t)^2\left(\frac{\partial}{\partial x_f}\frac{\partial u}{\partial x_b}\right)_i^n \qquad (2.2.20)$$

或者

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2}a\Delta t\left(\frac{\partial u}{\partial x_f} + \frac{\partial u}{\partial x_b}\right)_i^n +$$

$$\frac{1}{2}(a\Delta t)^2\left(\frac{\partial}{\partial x_b}\frac{\partial u}{\partial x_f}\right)_i^n \qquad (2.2.21)$$

式(2.2.20)或式(2.2.21)亦可写成

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}u_i^n + \frac{1}{2}\left[\left(1 - a\Delta t\frac{\partial}{\partial x_f}\right)\left(1 - a\Delta t\frac{\partial}{\partial x_b}\right)u\right]_i^n \qquad (2.2.22)$$

或者

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}u_i^n + \frac{1}{2}\left[\left(1 - a\Delta t\frac{\partial}{\partial x_b}\right)\left(1 - a\Delta t\frac{\partial}{\partial x_f}\right)u\right]_i^n \qquad (2.2.23)$$

由式(2.2.22)，若引入

$$\overline{u_i^{n+1}} = \left(1 - a\Delta t\frac{\partial}{\partial x_b}\right)u_i^n$$

则有

$$u_i^{n+1}=\frac{1}{2}\left[u^n+\left(1-a\Delta t\frac{\partial}{\partial x_f}\right)\overline{u^{n+1}}\right]_i$$

将前向、后向的差商表达式代入上两式，可得二阶精度的两步显式格式为

$$\begin{cases}\overline{u_i^{n+1}}=u_i^n-\dfrac{a\Delta t}{\Delta x}\left(u_i^n-u_{i-1}^n\right)\\ u_i^{n+1}=\dfrac{1}{2}\left[u_i^n+\overline{u_i^{n+1}}-\dfrac{a\Delta t}{\Delta x}\left(\overline{u_{i+1}^{n+1}}-\overline{u_i^{n+1}}\right)\right]\end{cases}\tag{2.2.24}$$

同样，由式(2.2.23)出发，可得以下二阶精度的显式差分算式

$$\begin{cases}\overline{u_i^{n+1}}=u_i^n-\dfrac{a\Delta t}{\Delta x}\left(u_{i+1}^n-u_i^n\right)\\ u_i^{n+1}=\dfrac{1}{2}\left[u_i^n+\overline{u_i^{n+1}}-\dfrac{a\Delta t}{\Delta x}\left(\overline{u_i^{n+1}}-\overline{u_{i-1}^{n+1}}\right)\right]\end{cases}\tag{2.2.25}$$

比较式(2.2.24)、式(2.2.25)容易看出，式(2.2.24)的第一步先取 x 方向的后向差分，然后第二步取 x 方向的前向差分，而式(2.2.25)则相反，第一步取前向差分，而第二步取后向差分。由于格式(2.2.24)、(2.2.25)是 Mac Cormack 首先提出的，所以称它为 MacCormack 二步二阶精度的显式格式。

3. 三层一步二阶精度的显式格式

利用 Taylor 展开公式，u_i^{n-1} 可表示为

$$u_i^{n-1}=u_i^n-\Delta t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n\Delta t^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^n\Delta t^3+\cdots$$

将式(2.2.4)减去此式得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n=\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n-1}}{2\Delta t}+O(\Delta t^2)$$

将此式和式(2.2.12)一起代入式(2.2.1)，准确到二阶精度，可得如下差分计算格式

$$u_i^{n+1}=u_i^{n-1}-\frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(u_{i+1}^n-u_{i-1}^n\right)\tag{2.2.26}$$

由于在式(2.2.26)中，包含了 t_{n-1}，t_n，t_{n+1} 三个时间层的物

理量,所以称它为三层二阶显式格式。这个格式文献中常叫做跳蛙(Leap Frog)格式。

2.2.3 三阶显式差分格式的建立

为了构造两层三阶显式格式,我们从以下 Taylor 展开式出发

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n \Delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n \Delta t^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^n \Delta t^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)_i^n \Delta t^4 + \cdots$$

利用方程(2.1.3)易得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = -a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n,$$

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^n = -a^3\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^n, \quad \left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)_i^n = a^4\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i^n。$$

代入上式后得

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\Delta t\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n + \frac{1}{2}(a\Delta t)^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n - \frac{1}{6}(a\Delta t)^3\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^n + \frac{1}{24}(a\Delta t)^4\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i^n + \cdots \tag{2.2.27}$$

利用 Taylor 展开式,可以导出以下关于 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n$、$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n$、$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^n$ 的差商表达式

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n = \frac{1}{12\Delta x}(-u_{i+2}^n + 8u_{i+1}^n - 8u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) + O(\Delta x^4)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n = \frac{1}{4\Delta x^2}(u_{i+2}^n - 2u_i^n + u_{i-2}^n) + O(\Delta x^2)$$

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^n = \frac{1}{2\Delta x^3}(u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + 2u_{i-1}^n - u_{i-2}^n) + O(\Delta x^2)$$

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i^n = \frac{1}{\Delta x^4}(u_{i+2}^n - 4u_{i+1}^n + 6u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) + O(\Delta x^2)$$

将上述诸式代入式(2.2.27),准确到三阶精度可得

$$
\begin{aligned}
u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{12\Delta x}(-u_{i+2}^n + 8u_{i+1}^n - 8u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) + \\
\frac{1}{8}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2(u_{i+2}^n - 2u_i^n + u_{i-2}^n) - \\
\frac{1}{12}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^3(u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + 2u_{i-1}^n - u_{i-2}^n) \\
\frac{\omega}{24}(u_{i+2}^n - 4u_{i+1}^n + 6u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n)
\end{aligned}
$$

式中 $\omega = -\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^4$。由于该式最后一项是四阶小量项，因此当 ω 取任何有限值时，原则上都不影响三阶格式的精度。

经整理，上式进一步可写成

$$
\begin{aligned}
u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{3}{8}\frac{a\Delta t}{\Delta x}\Bigg\{\Bigg[u_{i+1}^n - \frac{1}{2}\frac{a\Delta\tau}{\Delta x}(u_{i+2}^n - u_i^n) + \\
\frac{1}{2}\left(\frac{a\Delta\tau}{\Delta x}\right)^2(u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + u_i^n)\Bigg] - \\
\Bigg[u_{i-1}^n - \frac{1}{2}\frac{a\Delta\tau}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-2}^n) + \\
\frac{1}{2}\left(\frac{a\Delta\tau}{\Delta x}\right)^2(u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n)\Bigg]\Bigg\} \\
\frac{1}{24}\frac{a\Delta t}{\Delta x}(-2u_{i+2}^n + 7u_{i+1}^n - 7u_{i-1}^n + 2u_{i-2}^n) - \\
\frac{\omega}{24}(u_{i+2}^n - 4u_{i+1}^n + 6u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) \quad (2.2.28)
\end{aligned}
$$

式中 $\Delta\tau = \frac{2}{3}\Delta t$。

引入

$$
u_i^{(1)} = u_i^n - \frac{a\Delta\tau}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n)
$$

$$
u_i^{(2)} = \frac{1}{2}\left[u_i^n + u_i^{(1)} - \frac{a\Delta\tau}{\Delta x}(u_i^{(1)} - u_{i-1}^{(1)})\right]
$$

经运算后式(2.2.28)可写成

$$
u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{3}{8}\frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^{(2)} - u_{i-1}^{(2)}) -
$$

$$\frac{1}{24}\frac{a\Delta t}{\Delta x}(-2u_{i+2}^{n}+7u_{i+1}^{n}-7u_{i-1}^{n}+2u_{i-2}^{n})-$$

$$\frac{1}{24}\omega(u_{i+2}^{n}-4u_{i+1}^{n}+6u_{i}^{n}-4u_{i-1}^{n}+u_{i-2}^{n})$$

将 $\Delta\tau=\frac{2}{3}\Delta t$ 代入以上诸式，即可得到如下三阶三步显式格式

第一步：$$u_{i}^{(1)}=u_{i}^{n}-\frac{2}{3}\sigma(u_{i+1}^{n}-u_{i}^{n}) \tag{2.2.29}$$

第二步：$$u_{i}^{(2)}=\frac{1}{2}\left[u_{i}^{n}+u_{i}^{(1)}-\frac{2}{3}\sigma(u_{i}^{(1)}-u_{i-1}^{(1)})\right] \tag{2.2.30}$$

第三步：$$u_{i}^{n+1}=u_{i}^{n}-\frac{3}{8}\sigma(u_{i+1}^{(2)}-u_{i-1}^{(2)})-\frac{\sigma}{24}(-2u_{i+2}^{n}+7u_{i+1}^{n}-7u_{i-1}^{n}+2u_{i-2}^{n})-\frac{\omega}{24}(u_{i+2}^{n}-4u_{i+1}^{n}+6u_{i}^{n}-4u_{i-1}^{n}+u_{i-2}^{n}) \tag{2.2.31}$$

式中 $\sigma=\frac{a\Delta t}{\Delta x}$，称为 Courant 数，该三步格式是 Warming、Kutler 和 Lomax 于 1973 年提出的，所以称它为 Warming-Kutler-Lomax 格式，或简称 WKL 格式。

与此类似，1970 年 Rusanov 以及 Burstein 和 Mirin 导出了另外一个三阶三步格式

第一步：$$u_{i+\frac{1}{2}}^{(1)}=\frac{1}{2}(u_{i}^{n}+u_{i+1}^{n})-\frac{1}{3}\sigma(u_{i+1}^{n}-u_{i}^{n})$$

第二步：$$u_{i}^{(2)}=u_{i}^{n}-\frac{2}{3}\sigma(u_{i+\frac{1}{2}}^{(1)}-u_{i-\frac{1}{2}}^{(1)})$$

第三步：$$u_{i}^{n+1}=u_{i}^{n}-\frac{\sigma}{24}(-2u_{i+2}^{n}+7u_{i+1}^{n}-7u_{i-1}^{n}+2u_{i-2}^{n})-\frac{3}{8}\sigma(u_{i+1}^{(2)}-u_{i-1}^{(2)})-\frac{\omega}{24}(u_{i+2}^{n}-4u_{i+1}^{n}+$$

$$6u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n)$$

称该三步格式为 Rusanov (Burstein-Mirin)格式。

以上利用 Taylor 级数展开式的方法建立了一阶、二阶和三阶显式格式，利用同样的方法，还可以建立其他形式的显式格式。这里就不再进一步叙述了。如上所述，在显式格式中，仅包含一个未知量，该未知量可用已知量直接求出。下面研究另一种类型的差分格式，在这种差分格式中，包含多个待求的未知量，它们不能从已知量直接求出，而必须通过求解代数方程组才能确定，这种类型的格式，称之为隐式格式。

2.2.4 时间一中心隐式格式的建立

下面利用 Taylor 级数展开法建立一个最常用和较简单的隐式差分格式。由 Taylor 级数展开式易知

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n \Delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n \Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

$$u_i^n = u_i^{n+1} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{n+1} \Delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^{n+1} \Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

两式相减并除以 2 后得

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{2}\Delta t\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{n+1}\right] - \frac{1}{4}\Delta t^2\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^{n+1} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n\right] + O(\Delta t^3)$$

根据 Taylor 展开式

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^{n+1} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n = O(\Delta t)$$

准确到二阶精度，上式给出

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{2}\Delta t\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{n+1}\right] + O(\Delta t^3)$$

利用方程(2.1.3)，该式又可写成

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2}a\Delta t\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^{n+1}\right] + O(\Delta t^3)$$

利用 Taylor 级数展开式可以得到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^{n+1} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

将此二式代入上式，准确到二阶精度，可得如下差分格式

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{4}\frac{a\Delta t}{\Delta x}[(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + (u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})] \tag{2.2.32}$$

该格式叫做时间—中心隐式格式。

以上以模型方程(2.1.3)为例，给出了建立各种差分格式的方法。这种方法原则上适用于任何方程。因为在流体力学的方程中，包含有物理量的一阶、二阶导数，所以构造差分格式的关键在于给出各阶导数的差商表达式，这可由 Taylor 级数的展开式得到。为了以后应用方便，表 2-1 给出了一阶导数的差商表达式[1,2]，表 2-2、表 2-3 是二阶和高阶导数的差商表达式[1,2]。

表 2-1　一阶导数$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i$的差商表达式

名　称	表　达　式
一阶前向差商	$[(f_{i+1} - f_i)/\Delta x] + O(\Delta x)$
一阶后向差商	$[(f_i - f_{i-1})/\Delta x] + O(\Delta x)$
二阶前向差商	$\frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$
二阶后向差商	$\frac{3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$
二阶中心差商	$\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$

（续）

名　称	表　达　式
三阶前向差商	$\frac{1}{6\Delta x}(-11f_i+18f_{i+1}-9f_{i+2}+2f_{i+3})+O(\Delta x^3)$
三阶后向差商	$\frac{1}{6\Delta x}(11f_i-18f_{i-1}+9f_{i-2}-2f_{i-3})+O(\Delta x^3)$
四阶前向差商	$\frac{1}{12\Delta x}(-25f_i+48f_{i+1}-36f_{i+2}+f_{i+3}-3f_{i+4})+O(\Delta x^4)$
四阶后向差商	$\frac{1}{12\Delta x}(25f_i-48f_{i-1}+36f_{i-2}-f_{i-3}+3f_{i-4})+O(\Delta x^4)$
四阶中心差商	$\frac{1}{12\Delta x}(-f_{i+2}+8f_{i+1}-8f_{i-1}+f_{i-2})+O(\Delta x^4)$

表 2-2　二阶导数$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$的差商表达式

名　称	表　达　式
一阶精度的差商	$\frac{1}{\Delta x^2}(f_i-2f_{i+1}+f_{i+2})+O(\Delta x)$
	$\frac{1}{\Delta x^2}(f_i-2f_{i-1}+f_{i-2})+O(\Delta x)$
二阶精度的差商	$\frac{1}{\Delta x^2}(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1})+O(\Delta x^2)$
	$\frac{1}{\Delta x^2}(2f_i-5f_{i+1}+4f_{i+2}-f_{i+3})+O(\Delta x^2)$
	$\frac{1}{\Delta x^2}(2f_i-5f_{i-1}+4f_{i-2}-f_{i-3})+O(\Delta x^2)$
四阶精度的差商	$\frac{1}{12\Delta x^2}(-f_{i+2}+16f_{i+1}-30f_i+16f_{i-1}-f_{i-2})+O(\Delta x^4)$

表 2-3　二阶混合导数及高阶导数的某些差商表达式

名　称	表　达　式
$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{ij}$的差商	$\frac{u_{i+2,j}-2u_{i+1,j}+2u_{i-1,j}-u_{i-2,j}}{2\Delta x^3}+O(\Delta x^2)$
	$\frac{1}{2\Delta x^3}(-3u_{i+4,j}+14u_{i+3,j}-24u_{i+2,j}+18u_{i+1,j}-5u_{i,j})+O(\Delta x^2)$
	$\frac{1}{2\Delta x^3}(5u_{i,j}-18u_{i-1,j}+24u_{i-2,j}-14u_{i-3,j}+3u_{i-4,j})+O(\Delta x^2)$
$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{ij}$的差商	$\frac{1}{\Delta x^4}(u_{i+2,j}-4u_{i+1,j}+6u_{i,j}-4u_{i-1,j}+u_{i-2,j})+O(\Delta x^2)$
$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{ij}$的差商	$\frac{1}{\Delta x \Delta y}[(u_{i+1,j}-u_{i+1,j-1})-(u_{i,j}-u_{i,j-1})]+O(\Delta x,\Delta y)$

（续）

名　称	表 达 式
	$\dfrac{1}{\Delta x \Delta y}[(u_{i,j+1}-u_{i,j})-(u_{i-1,j+1}-u_{i-1,j})]+O(\Delta x,\Delta y)$ $\dfrac{1}{\Delta x \Delta y}[(u_{i,j}-u_{i,j-1})-(u_{i-1,j}-u_{i-1,j-1})]+O(\Delta x,\Delta y)$ $\dfrac{1}{\Delta x \Delta y}[(u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j})-(u_{i,j+1}-u_{i,j})]+O(\Delta x,\Delta y)$ $\dfrac{1}{2\Delta x \Delta y}[(u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1})-(u_{i,j+1}-u_{i,j-1})]+O(\Delta x,\Delta y^2)$ $\dfrac{1}{2\Delta x \Delta y}[(u_{i,j+1}-u_{i,j-1})-(u_{i-1,j+1}-u_{i-1,j-1})]+O(\Delta x,\Delta y^2)$ $\dfrac{1}{2\Delta x \Delta y}[(u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j})-(u_{i-1,j+1}-u_{i-1,j})]+O(\Delta x^2,\Delta y)$ $\dfrac{1}{2\Delta x \Delta y}[(u_{i+1,j}-u_{i+1,j-1})-(u_{i-1,j}-u_{i-1,j-1})]+O(\Delta x^2,\Delta y)$ $\dfrac{1}{4\Delta x \Delta y}[(u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1})-(u_{i-1,j+1}-u_{i-1,j-1})]+O(\Delta x^2,\Delta y^2)$

2.3　若干典型的差分格式

利用上节构造差分格式的方法，可以给出诸模型方程的各种差分格式。本节给出若干典型的结果[1,2]。

2.3.1　模型方程$\dfrac{\partial u}{\partial t}+a\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$的差分格式

其典型的差分格式可见表 2-4。

表 2-4　模型方程$\dfrac{\partial u}{\partial t}+a\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$的若干典型差分格式

格式名称	格式表达式
一阶精度的显式迎风格式	$u_i^{n+1}=u_i^n-\begin{cases}\dfrac{a\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n-u_i^n), & a<0\\ \dfrac{a\Delta t}{\Delta x}(u_i^n-u_{i-1}^n), & a>0\end{cases}$
时间一阶空间二阶精度的显式迎风格式	$u_i^{n+1}=u_i^n-\begin{cases}\dfrac{a\Delta t}{2\Delta x}(-3u_i^n+4u_{i+1}^n-u_{i+2}^n), & a<0\\ \dfrac{a\Delta t}{2\Delta x}(3u_i^n-4u_{i-1}^n+u_{i-2}^n), & a>0\end{cases}$

（续）

格式名称	格式表达式
时间一阶空间二阶精度的 Lax 显式格式	$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$
二阶精度的一步 Lax-Wendroff 显式格式	$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{1}{2}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$
二阶精度的跳蛙(Leap Frog)格式	$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$
二阶精度的两步 Lax-Wendroff 显式格式	$u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_i^n) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n)$ $u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\right)$
二阶精度的两步 MacCormack 显式格式	$\overline{u_i^{n+1}} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n)$ $u_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left[u_i^n + \overline{u_i^{n+1}} - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(\overline{u_i^{n+1}} - \overline{u_{i-1}^{n+1}}\right)\right]$
三阶精度的多步 Warming-Kutler-Lomax 显式格式	$u_i^{(1)} = u_i^n - \frac{2}{3}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)(u_{i+1}^n - u_i^n)$ $u_i^{(2)} = \frac{1}{2}\left[u_i^n + u_i^{(1)} - \frac{2}{3}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)(u_i^{(1)} - u_{i-1}^{(1)})\right]$ $u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{3}{8}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)(u_{i+1}^{(2)} - u_{i-1}^{(2)}) - \frac{1}{24}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)(-2u_{i+2}^n + 7u_{i+1}^n - 7u_{i-1}^n + 2u_{i-2}^n) - \frac{\omega}{24}(u_{i+2}^n - 4u_{i+1}^n + 6u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n)$
三阶精度的多步 Rusanov (Burstein-Mirin) 显式格式	$u_{i+\frac{1}{2}}^{(1)} = \frac{1}{2}(u_i^n + u_{i+1}^n) - \frac{1}{3}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)(u_{i+1}^n - u_i^n)$ $u_i^{(2)} = u_i^n - \frac{2}{3}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)(u_{i+\frac{1}{2}}^{(1)} - u_{i-\frac{1}{2}}^{(1)})$ $u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{3}{8}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)(u_{i+1}^{(2)} - u_{i-1}^{(2)}) - \frac{1}{24}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)(-2u_{i+2}^n + 7u_{i+1}^n - 7u_{i-1}^n + 2u_{i-2}^n) - \frac{\omega}{24}(u_{i+2}^n - 4u_{i+1}^n + 6u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n)$
二阶精度的时间—中心隐式格式	$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{4}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)[(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + (u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})]$

2.3.2 模型方程$\frac{\partial u}{\partial t}=b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$的差分格式

这个方程可视为模型方程(2.1.7)中 $a=0$ 的情形。以后将要证明,在二阶精度范围内,求解式(2.1.7)可归结为依次求解如下两方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a(u)\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.3.1}$$

因此研究热传导方程(2.3.1),不仅对求解热传导问题有直接意义,对求解式(2.1.7)及 Burgers 方程也有重要意义。下面给出式(2.3.1)的某些典型的计算格式,见表 2-5。

表 2-5 模型方程$\frac{\partial u}{\partial t}=b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$的若干典型差分格式

格式名称	格式表达式
时间一阶精度,空间二阶精度的显式格式	$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}=b\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{\Delta x^2}+O(\Delta t,\Delta x^2)$
二阶精度的三层 Richardson 显式格式	$\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n-1}}{2\Delta t}=b\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{\Delta x^2}+O(\Delta t^2,\Delta x^2)$
DuFort-Frankel 二阶显式格式[①]	$\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n-1}}{2\Delta t}=b\frac{u_{i+1}^n-u_i^{n+1}-u_i^{n-1}+u_{i-1}^n}{\Delta x^2}+O\left(\Delta t^2,\Delta x^2,\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)$
时间一阶精度,空间二阶精度的隐式格式(Laasonen 格式)	$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}=b\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}+O(\Delta t,\Delta x^2)$
二阶精度的 Crank-Nicolson 隐式格式	$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}=b\frac{(u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n)+(u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1})}{2\Delta x^2}+O(\Delta t^2,\Delta x^2)$

（续）

格式名称	格式表达式
显、隐式混合格式	$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}=b\frac{\theta(u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1})+(1-\theta)(u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n)}{\Delta x^2}$ 参数 $\theta\in(0,1)$，$\theta=0$ 时为本表第一栏的显式格式 $\theta=\frac{1}{2}$时为 Crank-Nicolson 隐式格式 $\theta=1$ 时，为 Laasonen 隐式格式
Richtmyer 和 Morton 的混合隐式格式	$(1+\theta)\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}-\theta\frac{u_i^n-u_i^{n-1}}{\Delta t}=b\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$
① 有人亦称此格式为半隐式，它形式上似隐式，但实际上是显式。	

2.3.3 模型方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$的差分格式

典型的计算格式可见表 2-6。

表 2-6 模型方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$的两个典型差分格式

格式名称	格式表达式
五点格式	$\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{\Delta y^2}+$ $O(\Delta x^2,\Delta y^2)=0$
九点格式	$u_{i+1,j+1}+u_{i-1,j+1}+u_{i+1,j-1}+u_{i-1,j-1}-$ $2\frac{(\Delta x)^2-5(\Delta y)^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})+$ $2\frac{5\Delta x^2-\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}(u_{i,j+1}+u_{i,j-1})-$ $20u_{i,j}+O(\Delta x^4,\Delta y^4)=0$

2.4 差分方程和微分方程的差别以及差分方程的修正方程式[3]

2.4.1 差分方程和微分方程的差别以及差分方程的修正方程式的概念

现在来研究差分方程和微分方程的差别。为便于说明问题，

下面来研究方程(2.1.3)的一阶差分格式

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+a\frac{u_i^n-u_{i-1}^n}{\Delta x}=0 \quad (a>0) \qquad (2.4.1)$$

利用 Taylor 级数展开式易知

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}=\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n+\frac{1}{2}\Delta t\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n+\frac{1}{3!}\Delta t^2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^n+\frac{1}{4!}\Delta t^3\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)_i^n+\cdots$$

$$\frac{u_{i-1}^n-u_i^n}{\Delta x}=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n+\frac{1}{2}\Delta x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n-\frac{1}{3!}\Delta x^2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^n+\frac{1}{4!}\Delta x^3\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i^n+\cdots$$

将此二式代入式(2.4.1),为简单起见略去上标和下标,则得

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}a\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{3!}a\Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{1}{4!}a\Delta x^3\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\cdots-\frac{1}{2}\Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{1}{3!}\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}-\frac{1}{4!}\Delta t^3\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}+\cdots \qquad (2.4.2)$$

这就是与差分方程(2.4.1)等价的微分方程式。与原微分方程(2.1.3)比较,不难看出,式(2.4.2)的右端就是差分方程(2.4.1)与微分方程(2.1.3)的差别,我们称它为截断误差(Truncation error)。

任何一个微分方程的差分方程,其内的差商都可用 Taylor 级数表示,这样都可得到一个与差分方程对应的新的微分方程,该新微分方程与原微分方程的差别,就是差分方程的截断误差。

式(2.4.2)右端既包含关于 x 的各阶导数项,也包含了关于 t 的各阶导数项。下面消去这些关于 t 的导数项。事实上,式(2.4.2)给出

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{3!}\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+\frac{1}{4!}\Delta t^3\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}+\cdots=$$

$$-a\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}a\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{3!}a\Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{1}{4!}a\Delta x^3\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\cdots$$

由此可得以下算子运算关系

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta t\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{1}{3!}\Delta t^2\frac{\partial^3}{\partial t^3}+\frac{1}{4!}\Delta t^3\frac{\partial^4}{\partial t^4}+\cdots\right)^n=$$

$$\left(-a\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}a\Delta x\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{3!}a\Delta x^2\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{1}{4!}a\Delta x^3\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\cdots\right)^n \tag{2.4.3}$$

式中 $n=1,2,3,4,\cdots$。利用式(2.4.3),可以建立$\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial^2}{\partial t^2},\frac{\partial^3}{\partial t^3},\cdots$与$\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial^2}{\partial x^2},\frac{\partial^3}{\partial x^3}\cdots$之间的关系。例如当 $n=4$ 时,

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}=a^4\frac{\partial^4}{\partial x^4}+O(\Delta x,\Delta t) \tag{2.4.4}$$

当 $n=3$ 时,

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}+\frac{3}{2}\Delta t\frac{\partial^4}{\partial t^4}=-a^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{3}{2}a^3\Delta x\frac{\partial^4}{\partial x^4}+O(\Delta x^2,\Delta t^2) \tag{2.4.5}$$

当 $n=2$ 时,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta t\frac{\partial^3}{\partial t^3}+\frac{7}{12}\Delta t^2\frac{\partial^4}{\partial t^4}=$$

$$a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-a^2\Delta x\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{7}{12}a^2\Delta x^2\frac{\partial^4}{\partial x^4}+O(\Delta t^3,\Delta x^3) \tag{2.4.6}$$

将式(2.4.4)代入式(2.4.5)得

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}=-a^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{3a^3}{2}\Delta x\left(1-\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)\frac{\partial^4}{\partial x^4}+O(\Delta t^2,\Delta x^2) \tag{2.4.7}$$

将式(2.4.4)、式(2.4.7)代入式(2.4.6)得

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-a^2\Delta x\left(1-\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^3}+$$

$$\left[-\frac{3}{2}a^3\Delta t\Delta x\left(1-\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)+\frac{7}{12}a^2\Delta x^2\left(1-\frac{a^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)\right]\frac{\partial^4}{\partial x^4}+$$

$$O(\Delta t^3,\Delta x^3) \tag{2.4.8}$$

将式(2.4.8)、式(2.4.7)、式(2.4.4)代入式(2.4.2),整理后得

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\nu_2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\nu_3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\nu_4\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\cdots=$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\nu_n\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \tag{2.4.9}$$

式中 $\nu_2=\frac{1}{2}a\Delta x(1-\sigma)$;

$\nu_3=-\frac{a\Delta x^2(1-\sigma)(1-2\sigma)}{6}$;

$\nu_4=\frac{1}{24}a\Delta x^3(1-\sigma)[1-6\sigma(1-\sigma)]$;

$\vdots$

$\sigma=a\Delta t/\Delta x$,称为 Courant 数。

式(2.4.9)就是右端用关于 x 的各阶导数表达的与差分方程(2.4.1)等价的微分方程式,称它为差分方程(2.4.1)的修正方程式。其右端项

$$\sum_{n=2}^{\infty}\nu_n\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$$

是差分方程(2.4.1)的截断误差。

2.4.2 某些典型差分方程的修正方程式

利用和上面相同的方法,可以导出某些典型差分方程的修正方程式。

1. 方程$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$的某些差分方程的修正方程式

设修正方程式可用式(2.4.9)表示,不同的差分格式,ν_n 是不同的。

对于二阶精度的一步 Lax-Wendroff 显式格式

$$\nu_2 = 0$$

$$\nu_3 = -\frac{a\Delta x^2}{6}(1 - \sigma^2)$$

$$\nu_4 = -\frac{a\Delta x^3}{8}\sigma(1 - \sigma^2)$$

$$\vdots$$

二阶精度的跳蛙(LeapFrog)格式

$$\nu_2 = 0$$

$$\nu_3 = \frac{a\Delta x^2}{6}(\sigma^2 - 1)$$

$$\nu_4 = 0$$

$$\nu_5 = -\frac{a\Delta x^4}{120}(9\sigma^4 - 10\sigma^2 + 1)$$

$$\vdots$$

二阶精度的两步 Lax-Wendroff 显式格式

$$\nu_2 = 0$$

$$\nu_3 = -\frac{a\Delta x^2}{6}(1 - \sigma^2)$$

$$\nu_4 = -\frac{a\Delta x^3}{8}\sigma(1 - \sigma^2)$$

$$\vdots$$

二阶精度的二步 Mac Cormack 显式格式

$$\nu_2 = 0$$

$$\nu_3 = -\frac{a\Delta x^2}{6}(1 - \sigma^2)$$

$$\nu_4 = -\frac{a\Delta x^3}{8}\sigma(1 - \sigma^2)$$

$$\vdots$$

三阶精度的多步 Warming-Kutler-Lomax 显式格式

$$\nu_2 = 0$$

$$\nu_3 = 0$$

$$\nu_4 = \frac{a\Delta x^2}{24}\left(\frac{\omega}{\sigma} - 4\sigma + \sigma^3\right)$$

$$\nu_5 = \frac{a\Delta x^4}{120}(-5\omega + 4 + 15\sigma^2 - 4\sigma^4)$$

$$\vdots$$

三阶精度的多步 Rusanov(Burstein－Mirin)显式格.

$$\nu_2 = 0$$

$$\nu_3 = 0$$

$$\nu_4 = -\frac{a\Delta x^3}{24}\left(\frac{\omega}{\sigma} - 4\sigma + \sigma^3\right)$$

$$\nu_5 = \frac{a\Delta x^4}{120}(-5\omega + 4 + 15\sigma^2 - 4\sigma^4)$$

$$\vdots$$

二阶精度的时间-中心隐式格式

$$\nu_2 = 0$$

$$\nu_3 = -\left(\frac{a^3\Delta t^2}{12} + \frac{a\Delta x^2}{6}\right)$$

$$\nu_4 = 0$$

$$\nu_5 = -\left(\frac{a\Delta x^4}{120} + \frac{a^3\Delta t^2\Delta x^2}{24} + \frac{a^4\Delta t^4}{80}\right)$$

$$\vdots$$

2. 方程$\frac{\partial u}{\partial t} = b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$的某些差分方程的修正方程式

对于时间一阶精度,空间二阶精度的显式格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = b\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

其修正方程式是

$$\frac{\partial u}{\partial t} - b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(-\frac{1}{2}b^2\Delta t + \frac{b\Delta x^2}{12}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} +$$

$$\left(\frac{1}{3}b^3\Delta t^2 - \frac{1}{12}b^2\Delta t\Delta x^2 + \frac{1}{360}b\Delta x^4\right)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \cdots$$

对于时间一阶精度，空间二阶精度的隐式差分格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = b\,\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

其修正方程式是

$$\frac{\partial u}{\partial t} - b\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{2}b^2\Delta t + \frac{b\Delta x^2}{12}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{3}b^3\Delta t^2 + \frac{1}{12}b^2\Delta t\Delta x^2 + \frac{1}{360}b\Delta x^4\right)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \cdots$$

对于 DuFort-Frankel 二阶显式格式(见表 2-5 第三行)修正方程式是

$$\frac{\partial u}{\partial t} - b\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{12}b\Delta x^2 - b^3\,\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{360}b\Delta x^4 - \frac{1}{3}b^3\Delta t^2 + 2b^5\,\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4}\right)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \cdots$$

对于二阶精度的 Crank-Nicolson 隐式格式(表 2-5 第五行)，修正方程式是

$$\frac{\partial u}{\partial t} - b\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{b\Delta x^2}{12}\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{12}b^3\Delta t^2 + \frac{1}{360}b\Delta x^4\right)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \cdots$$

对于显隐式混合格式(表 2-5 第六行)，修正方程式是

$$\frac{\partial u}{\partial t} - b\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left[\left(\theta - \frac{1}{2}\right)b^2\Delta t + \frac{b\Delta x^2}{12}\right]\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \left[\left(\theta^2 - \theta + \frac{1}{3}\right)b^3\Delta t^2 + \frac{1}{6}\left(\theta - \frac{1}{2}\right)b^2\Delta t\Delta x^2 + \frac{1}{360}b\Delta x^4\right]\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \cdots$$

对于 Richtmyer-Morton 的混合隐式格式，修正方程式是

$$\frac{\partial u}{\partial t} - b\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left[-\left(\theta - \frac{1}{2}\right)b^2\Delta t + \frac{1}{12}b\Delta x^2\right]\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \cdots$$

3. 方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$的差分格式的修正方程式

例如对于五点差分方程

$$\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{\Delta y^2}=0$$

其修正方程是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{12}\left(\Delta x^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\Delta y^2\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)+\cdots$$

2.5 半离散化的差分方程及其修正方程式[3]

在求解气体的非定常运动时,有一种算法是将方程组中的空间导数项用差商代替,而时间的导数仍保留原来的形式,这就得到了一组关于时间为自变量的常微分方程组,称这种离散化为半离散化,相应得到的方程叫做半离散化的差分方程。如果将差分方程中的差商用 Taylor 级数表述,所得到的与差分方程对应的微分方程叫做半离散化差分方程的修正方程式。

作为例子,这节仍讨论方程(2.1.3)。由于空间导数的差商随精度和依赖点数的不同而具有不同的形式,半离散化的差分方程和修正方程式也是不同的。下面给出某些半离散化的差分方程及其修正方程式。

2.5.1 半离散化的一阶迎风格式及其修正方程式

其差分方程如下。

若 $a>0$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i=-\frac{a}{\Delta x}(u_i-u_{i-1}) \tag{2.5.1}$$

若 $a<0$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i = -\frac{a}{\Delta x}(u_{i+1} - u_i) \qquad (2.5.2)$$

与式(2.5.1)相应的修正方程式是

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}a\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{3!}a\Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{1}{4!}a\Delta x^3\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \cdots \quad (a > 0) \qquad (2.5.3)$$

与式(2.5.2)相应的修正方程式是

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}a\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{3!}a\Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{1}{4!}a\Delta x^3\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \cdots \quad (a < 0) \qquad (2.5.4)$$

2.5.2 半离散化的二阶迎风格式及其修正方程式

利用二阶精度的$\frac{\partial u}{\partial x}$的后向和前向差商表达式，半离散化的二阶迎风差分格式如下。

$a>0$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i = -\frac{a}{2\Delta x}(3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2})$$

$a<0$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i = -\frac{a}{2\Delta x}(-3u_i + 4u_{i+1} - u_{i+2})$$

相应的半离散化的差分方程的修正方程式如下。

$a>0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{3}a\Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{1}{4}a\Delta x^3\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \cdots$$

$a<0$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{3}a\Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{1}{4}a\Delta x^3\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\cdots$$

2.5.3 半离散化的二阶中心格式及其修正方程式

其差分方程为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i=-\frac{a}{2\Delta x}(u_{i+1}-u_{i-1})$$

相应的修正方程式是

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{a}{3!}\Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{a}{5!}\Delta x^4\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+\cdots=$$

$$-a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\Delta x^{2n}\frac{\partial^{(2n+1)}u}{\partial x^{(2n+1)}}$$

根据以上分析,半离散化差分方程的修正方程式可统一表达为:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{n=2}^{\infty}\nu_n\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\qquad(2.5.5)$$

表 2-7 给出了各种格式中的 ν_n。

表 2-7 三个格式的修正方程式中的 ν_2,ν_3 及 ν_4 的表达式

格式名称	a	ν_2	ν_3	ν_4
半离散化的一阶迎风格式	>0	$\frac{1}{2}a\Delta x$	$-\frac{1}{6}a\Delta x^2$	$\frac{1}{24}a\Delta x^3$
	<0	$-\frac{1}{2}a\Delta x$	$-\frac{1}{6}a\Delta x^2$	$-\frac{1}{24}a\Delta x^3$
半离散化的二阶迎风格式	>0	0	$\frac{1}{3}a\Delta x^2$	$-\frac{1}{4}a\Delta x^3$
	<0	0	$\frac{1}{3}a\Delta x^2$	$\frac{1}{4}a\Delta x^3$
半离散化的二阶中心格式	>0	0	$-\frac{1}{6}a\Delta x^2$	0
	<0	0	$-\frac{1}{6}a\Delta x^2$	0

2.6 差分解的误差问题[2]

上两节的研究表明,当采用离散方法求解微分方程时,由于网

格间距或步长总不能取为零,差分方程真实代表的微分方程(即修正方程式)和原微分方程是有差异的,因此即使能够求出差分方程的精确解,该解与原微分方程的解也是有差异的。如果再考虑到离散过程中边界条件的表述上还会引起差异,以及当差分方程不能解析求解而必须数值求解时,还会引起数值上的误差,于是用数值方法给出的差分解和原微分方程的解是有误差的,本节对这些误差进行分类。

2.6.1 差分方程的截断误差

这个概念在2.4节内我们已经介绍过了,它定义为微分方程与它的差分表示式之间的差别,亦可视为修正方程式与微分方程式之间的差别。

2.6.2 边界条件的离散误差

它是离散后的差分方程的边界条件与微分方程的边界条件之间的差别。

差分方程的截断误差和边界条件的离散误差是采用离散化方法不可避免要产生的,文献中常把这两种误差统称为离散误差。

2.6.3 舍入误差(Round-off error)

当用数值方法求解差分方程时,在计算机上,任何一个物理量只能用有限位数的数字表示,换句话说,要舍去物理量有限位数以后的数字,这样计算中就要引起误差,这种误差,称之为舍入误差。

显然,差分方程数值解的误差是由舍入误差和离散误差构成,或者说是由舍入误差、截断误差和边界离散误差构成。在通常的计算中,离散误差随网格变细而减小,但由于网格变细时,离散点数增多,舍入误差随之加大。因此如何选择最优的网格,使之总误差最小,是计算中必须注意的问题。

2.7 差分方程和熵增条件

大家知道,流体在运动过程中必须满足热力学第二定律,也就是说,对于绝热运动的流体,其运动过程中熵总是增加或者不变的。这就是流体运动的熵增条件。在流体力学中已经证明,Navier-Stokes 方程所描述的流动,熵增条件是自动得到满足的。对于 Euler 方程所描述的流动,如果流场内不出现激波,流动也自动满足熵增条件(熵的个体导数为零)。但如果流场内存在激波,对 Euler 方程必须附加熵增条件。

当用差分方法求解流体运动的方程组时,由于差分方程真实代表的微分方程是其修正方程式,而不是原来的 Navier-Stokes 方程或 Euler 方程,这就提出如下问题:用修正方程描述黏性流动和无黏性,无激波的流动时,熵增条件是否还能自动满足?在激波存在的情况下,原来的熵增条件是否要作修正?在选择差分计算格式时,必须注意这些问题,一定要选择能使其修正方程式自动满足熵增条件的那些计算格式。否则,如果差分计算中不满足熵增条件,我们就得不到接近实际的物理解。这个问题,在本章 2.12 节内还要进一步讨论。

2.8 差分方程的相容性、稳定性、收敛性以及 Lax 等价定理[1,2]

2.8.1 相容性(Consistency)

如果偏微分方程和它的差分表达式之间的差别即截断误差(T.E),随网格变细而减少,或者说当网格间距或步长趋于零时,截断误差亦趋于零,即

$$\lim_{\Delta x\to 0}(\mathrm{T.E}) = 0$$

则称该偏微分方程的差分表达式即差分方程是相容的。

现在来检查表 2-4、表 2-5 和表 2-6 所给出差分表达式的相容性。通过修正方程式容易看到,如果 $\Delta t\to 0,\Delta x\to 0$,除 DuFort-Frankel 格式外,所有差分表达式都趋于微分方程,因此都是相容的。对于 DuFort-Frankel 格式,当 Δx、Δt 趋于零且 $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ 也趋于零时,才是相容的。

应该指出,一个可用的偏微分方程的差分表达式,必须是相容的。否则在网格间距或步长趋于零的情况下,差分方程不能趋于原微分方程,差分方程的解就不能代表原微分方程的解,这就失去了差分求解的意义。

2.8.2 稳定性(Stability)

严格说来,数值稳定性的概念仅适用于可推进求解的问题,例如双曲型方程的初值问题。所谓差分方程是稳定的,它的含义是:

在利用推进方法数值推进求解差分方程的过程中,如果初始误差的增长有界,则称差分方程或差分格式是稳定的,否则称为不稳定的。

为了深入了解稳定性的含义,对稳定性定义中提到的"误差"问题作一说明。设偏微分方程的精确解为 A,偏微分方程的差分表达式的精确解为 D,偏微分方程的差分表达式的数值解为 N,根据 2.6 节的研究,其

$$\text{离散误差} = A - D$$

$$\text{舍入误差} = D - N$$

$$\text{总误差} = (A - D) + (D - N)$$

显然,舍入误差是计算过程中产生的,如果计算过程中因舍入误差而引起总误差的增长,称计算格式是强不稳定的;反之,总误差随计算过程减小,则称为强稳定的。如果计算过程中仅研究舍入误差的变化,当舍入误差随计算过程增长时,称为弱不稳定;相反,当舍入误差随计算过程减小时,称为弱稳定。本书如不加注

明,仅研究弱稳定性。在下节,将给出分析弱稳定性的方法和判断弱稳定性的条件。

2.8.3 收敛性(Convergence)

如果网格间距或步长趋于零,差分方程的真解趋于具有同样边界和起始条件的微分方程的真解,则称计算用的差分方程或差分格式是收敛的。

2.8.4 Lax 等价定理

Lax 很早就注意了收敛性问题,他研究了偏微分方程的起始值问题,他发现,如果以下条件存在:(1) 起始值问题是适定的(即微分方程的起始值问题的解存在,惟一、连续依赖于初值);(2) 偏微分方程是线性的,且系数不明显依赖于 t;(3) 偏微分方程的差分表达式(即差分方程)是线性的,且满足相容性条件,则稳定性是收敛性的必要和充分条件。这里不去重复 Lax 的证明,有兴趣的读者可参考 Richtmyer 和 Morton(1967)的著作。

根据以上研究,可以得到以下结论:一个可用的差分格式,除了满足相容性要求外,还必须满足稳定性和收敛性条件。

2.9 判定稳定性的 Fourier 或 Von Neumann 分析方法[2]

这节我们利用 Fourier 分析方法研究起始值问题的稳定性,因为该方法是 Von Neumann 最先使用的,所以亦称为 Von Neumann 分析方法。先研究线性单个标量方程,再研究线性向量方程(方程组)。

2.9.1 单个标量方程的起始值问题

作为例子,我们研究方程(2.1.3)的一阶迎风差分表达式,并设 $a>0$,此时差分方程为

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+a\frac{u_i^n-u_{i-1}^n}{\Delta x}=0 \tag{2.9.1}$$

采用上节关于 D、N 的符号,设 ε 是数值解的舍入误差,显然差分方程的数值解 N 可表示为

$$N=D+\varepsilon$$

N 满足式(2.9.1)。由于 D 是差分方程的真解,D 也应满足式(2.9.1)。鉴于方程(2.9.1)是线性方程,ε 也必须满足式(2.9.1),即

$$\varepsilon_i^{n+1}=\varepsilon_i^n-\frac{a\Delta t}{\Delta x}(\varepsilon_i^n-\varepsilon_{i-1}^n) \tag{2.9.2}$$

现在考虑任意瞬时舍入误差在网格点上的分布。假设 $\varepsilon(x,t)$ 可表示为

$$\varepsilon(x,t)=\sum_m b_m(t)e^{ik_m x}$$

该式表明,误差函数 $\varepsilon(x,t)$ 中包含了多种频率的波,k_m 是第 m 种成分的波数,$b_m(t)$ 是其振幅。由于式(2.9.2)是线性方程,根据叠加原理,可以分别研究单个成分的增长规律,即研究形式

$$\varepsilon=b_m(t)e^{ik_m x} \tag{2.9.3}$$

的解。该式给出

$$\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n}=\dfrac{b_m(t_{n+1})}{b_m(t_n)}\equiv G\\[2ex]\dfrac{\varepsilon_{i-1}^n}{\varepsilon_i^n}=e^{-ik_m\Delta x}\end{cases} \tag{2.9.4}$$

式中 G 表示振幅的增长倍数,也叫放大因子。

将式(2.9.3)或式(2.9.4)代入式(2.9.2),易得

$$G=1-\frac{a\Delta t}{\Delta x}(1-e^{-ik_m\Delta x})$$

该式亦可写成

$$G=1-\sigma[1-\cos(k_m\Delta x)]-i\sigma\sin(k_m\Delta x)$$

这样,放大因子的模的平方是

$$|G|^2 = [1-\sigma+\sigma\cos(k_m\Delta x)]^2+\sigma^2\sin^2(k_m\Delta x)$$

经整理得

$$|G|^2 = 1-2\sigma(1-\sigma)(1-\cos k_m\Delta x) \qquad (2.9.5)$$

因为式(2.1.3)是齐次常系数方程，此时根据稳定性的定义，当误差的振幅随计算过程增长时，差分格式是不稳定的；而误差的振幅不随计算过程增长时，差分格式是稳定的。这表明，差分格式的稳定条件是

$$|G|\leqslant 1 \qquad (2.9.6)$$

由式(2.9.5)，式(2.9.6)成立的条件是

$$\sigma = \frac{a\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$$

这就是格式(2.9.1)应该满足的稳定条件，常称它为 Courant-Friedrichs-Lewy(CFL)准则。Fourier 分析方法是稳定性分析最常应用的方法，表 2-4、表 2-5 中所给出的各种差分格式，都可用该方法分析，其分析的步骤和方法如下。

(1) 首先给出误差方程。这只要将差分方程中的 u 换成 ε 即可得到。

(2) 假设 ε 可用式(2.9.3)表达，由此可得如下表达式

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n} = G$$

$$\frac{\varepsilon_i^{n-1}}{\varepsilon_i^n} = \frac{1}{G}$$

$$\frac{\varepsilon_{i+1}^n}{\varepsilon_i^n} = \frac{\varepsilon_{i+1}^{n+1}}{\varepsilon_i^{n+1}} = e^{ik_m\Delta x}$$

$$\frac{\varepsilon_{i-1}^n}{\varepsilon_i^n} = \frac{\varepsilon_{i-1}^{n+1}}{\varepsilon_i^{n+1}} = e^{-ik_m\Delta x}$$

$$\frac{\varepsilon_{i+2}^n}{\varepsilon_i^n} = \frac{\varepsilon_{i+2}^{n+1}}{\varepsilon_i^{n+1}} = e^{2ik_m\Delta x}$$

$$\frac{\varepsilon_{i-2}^{n}}{\varepsilon_{i}^{n}} = \frac{\varepsilon_{i-2}^{n+1}}{\varepsilon_{i}^{n+1}} = e^{-2ik_m\Delta x}$$

$$\vdots$$

(3) 将此诸表达式代入误差方程，整理后即可得到决定增长因子 G 的方程。

(4) 分析此方程，根据条件 $|G| \leqslant 1$ 即可得到稳定条件。如果 $|G| > 1$，则格式是不稳定的。

2.9.2 方程组的起始值问题

作为例子，研究以下线性方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{2.9.7}$$

式中 a 为常量。

采用时间一阶空间二阶精度的 Lax 显式格式，则式(2.9.7)的差分表达式为

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \dfrac{a\Delta t}{2\Delta x}(v_{i+1}^n - v_{i-1}^n) \\ v_i^{n+1} = \dfrac{1}{2}(v_{i+1}^n + v_{i-1}^n) - \dfrac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \end{cases} \tag{2.9.8}$$

设误差函数为 ε_u 和 ε_v，由于式(2.9.8)是线性的，故它们满足以下方程

$$\begin{cases} \varepsilon_{u_i}^{n+1} = \dfrac{1}{2}(\varepsilon_{u_{i+1}}^n + \varepsilon_{u_{i-1}}^n) - \dfrac{a\Delta t}{2\Delta x}(\varepsilon_{v_{i+1}}^n - \varepsilon_{v_{i-1}}^n) \\ \varepsilon_{v_i}^{n+1} = \dfrac{1}{2}(\varepsilon_{v_{i+1}}^n + \varepsilon_{v_{i-1}}^n) - \dfrac{a\Delta t}{2\Delta x}(\varepsilon_{u_{i+1}}^n - \varepsilon_{u_{i-1}}^n) \end{cases} \tag{2.9.9}$$

同单个标量方程的情况一样，假设以下关系成立

$$\frac{\varepsilon_{u_i}^{n+1}}{\varepsilon_{u_i}^{n}} = \lambda, \qquad \frac{\varepsilon_{v_i}^{n+1}}{\varepsilon_{v_i}^{n}} = \lambda,$$

$$\frac{\varepsilon_{u_{i+1}}^{n}}{\varepsilon_{u_i}^{n}} = e^{ik_m\Delta x}, \qquad \frac{\varepsilon_{v_{i+1}}^{n}}{\varepsilon_{v_i}^{n}} = e^{ik_m\Delta x}。$$

$$\frac{\varepsilon_{u_{i-1}}^{n}}{\varepsilon_{u_i}^{n}} = e^{-ik_m\Delta x} \qquad \frac{\varepsilon_{v_{i-1}}^{n}}{\varepsilon_{v_i}^{n}} = e^{-ik_m\Delta x}$$

式中 λ 是误差放大因子。

将此诸式代入式(2.9.9),整理后得

$$-\left[\lambda - \frac{1}{2}(e^{ik_m\Delta x} + e^{-ik_m\Delta x})\right]\varepsilon_{u_i}^{n} - \frac{\sigma}{2}(e^{ik_m\Delta x} - e^{-ik_m\Delta x})\varepsilon_{v_i}^{n} = 0$$

$$-\frac{\sigma}{2}(e^{ik_m\Delta x} - e^{-ik_m\Delta x})\varepsilon_{u_i}^{n} - \left[\lambda - \frac{1}{2}(e^{ik_m\Delta x} + e^{-ik_m\Delta x})\right]\varepsilon_{v_i}^{n} = 0$$

这是线性齐次方程组,由于 $\varepsilon_{u_i}^{n}, \varepsilon_{v_i}^{n}$ 为非零解,因此必有

$$\begin{vmatrix} -\lambda + \frac{1}{2}(e^{ik_m\Delta x} + e^{-ik_m\Delta x}), & -\frac{\sigma}{2}(e^{ik_m\Delta x} - e^{-ik_m\Delta x}) \\ -\frac{\sigma}{2}(e^{ik_m\Delta x} - e^{-ik_m\Delta x}), & -\lambda + \frac{1}{2}(e^{ik_m\Delta x} + e^{-ik_m\Delta x}) \end{vmatrix} = 0 \tag{2.9.10}$$

由此可得

$$[\lambda - \cos(k_m\Delta x)]^2 + \sigma^2\sin^2(k_m\Delta x) = 0$$

这就得到了决定 λ 的方程,它有两个根

$$\begin{cases} \lambda_1 = \cos(k_m\Delta x) + i\sigma\sin(k_m\Delta x) \\ \lambda_2 = \cos(k_m\Delta x) - i\sigma\sin(k_m\Delta x) \end{cases} \tag{2.9.11}$$

由此可知

$$|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = \cos^2(k_m\Delta x) + \sigma^2\sin^2(k_m\Delta x)$$

该式表明,当

$$|\sigma| \leqslant 1 \tag{2.9.12}$$

时,$|\lambda_1| = |\lambda_2| \leqslant 1$,格式(2.9.8)是稳定的,式(2.9.12)就是其稳

定条件。

还可以用更简便的方法分析此问题。事实上,若引入

$$V = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} \varepsilon_u \\ \varepsilon_v \end{pmatrix}$$

则式(2.9.7)和式(2.9.9)分别可写成

$$\frac{\partial V}{\partial t} + B\frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$E_i^{n+1} = \frac{1}{2}(E_{i+1}^n + E_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}B(E_{i+1}^n - E_{i-1}^n) \tag{2.9.13}$$

式中

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

设

$$E_{i+1}^n = E_i^n e^{ik_m\Delta x}$$

$$E_{i-1}^n = E_i^n e^{-ik_m\Delta x}$$

代入式(2.9.13)得

$$E_i^{n+1} = GE_i^n \tag{2.9.14}$$

式中

$$G = \begin{bmatrix} \cos(k_m\Delta x) & -\sigma i\sin(k_m\Delta x) \\ -\sigma i\sin(k_m\Delta x) & \cos(k_m\Delta x) \end{bmatrix}$$

由式(2.9.14)易知,G 是误差的放大矩阵(或增长矩阵),其特征方程恰为式(2.9.10),特征根为式(2.9.11),于是可求得稳定条件为 $|\sigma|\leqslant 1$。

综上所述,分析差分方程组稳定性的方法和步骤可归结如下。

(1) 给出向量形式的误差 E 的方程。

(2) 设

$$E_{i+1}^n = e^{ik_m\Delta x}E_i^n$$

$$E_{i-1}^n = e^{-ik_m\Delta x}E_i^n$$

$$E_{i+2}^n = e^{i2k_m\Delta x}E_i^n$$

$$E_{i-2}^n = e^{-i2k_m\Delta x}E_i^n$$

$$\vdots$$

将上述诸式代入误差方程，整理后得

$$E_i^{n+1} = GE_i^n$$

(3) 求 G 的特征值，并令其各特征值的模小于或等于 1，从中可建立稳定条件。

2.9.3 具有边界条件的起始值问题

作为例子，研究方程(2.3.1)，并采用如下差分表达式

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \tag{2.9.15}$$

式中 $r = \dfrac{b\Delta t}{\Delta x^2}$。

设在计算域内，网格节点为 $i = 0, 1, 2, \cdots, m, m+1$。并设在 $i = 0$ 和 $i = m+1$ 的边界上，$u_0(t)$，$u_{m+1}(t)$ 是已给的。此外还给出了初始条件。

令误差函数为 $\varepsilon(x, t)$，显然它满足的方程是

$$\varepsilon_i^{n+1} = r\varepsilon_{i-1}^n + (1-2r)\varepsilon_i^n + r\varepsilon_{i+1}^n$$

由于 $u_0(t)$ 和 $u_{m+1}(t)$ 已知，故在边界上

$$\begin{cases} \varepsilon_0^n = 0 \\ \varepsilon_{m+1}^n = 0 \end{cases}$$

这样误差方程给出

$$\varepsilon_1^{n+1} = 0 + (1-2r)\varepsilon_1^n + r\varepsilon_2^n$$

$$\varepsilon_2^{n+1} = r\varepsilon_1^n + (1-2r)\varepsilon_2^n + r\varepsilon_3^n$$

$$\varepsilon_3^{n+1} = r\varepsilon_2^n + (1-2r)\varepsilon_3^n + r\varepsilon_4^n$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_{m-1}^{n+1} = r\varepsilon_{m-2}^n + (1-2r)\varepsilon_{m-1}^n + r\varepsilon_m^n$$

$$\varepsilon_m^{n+1} = r\varepsilon_{m-1}^n + (1-2r)\varepsilon_m^n + 0$$

引入

$$G = \begin{pmatrix} 1-2r & r & 0 & & & 0 \\ r & 1-2r & r & & & \\ & r & 1-2r & r & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & r & 1-2r & r & \\ & & 0 & r & 1-2r & \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon^n = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^n \\ \varepsilon_2^n \\ \vdots \\ \varepsilon_m^n \end{pmatrix} \qquad \varepsilon^{n+1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{n+1} \\ \varepsilon_2^{n+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_m^{n+1} \end{pmatrix}$$

则得

$$\varepsilon^{n+1} = G\varepsilon^n \tag{2.9.16}$$

不难看出 G 是误差的放大矩阵(增长矩阵)。求其特征值,并令其特征值的模不大于 1,从而可给出稳定条件,为节省篇幅,这里就不进一步讨论特征值的求法和稳定条件建立的细节了。

2.10 差分方程的稳定性与修正方程式中耗散项的关系,稳定性的启发性分析方法[3]

这节仅讨论双曲型方程的模型问题,即研究方程(2.1.3)。根据 2.4 和 2.5 节的研究,式(2.1.3)的任一差分计算格式,都可用修正方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=2}^{\infty} \nu_n \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$$

表示。只是不同的格式,ν_n 不同而已。如果假设误差函数为 $\varepsilon(x,t)$,显然 ε 应该满足的方程是

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+a\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}=\sum_{n=2}^{\infty}\nu_n\frac{\partial^n \varepsilon}{\partial x^n} \tag{2.10.1}$$

这里方程式右端的偶阶导数项称之为耗散项，而奇阶导数项称之为色散项(也叫弥散项)。假设初始时刻 $t=0$ 误差的分布情况为

$$\varepsilon = A\mathrm{e}^{ikx} \tag{2.10.2}$$

式中 A,k 为已给的实常数。现在来研究 $t>0$ 时误差发展的规律。

容易验证，方程(2.10.1)、(2.10.2)给出的初值问题的解是

$$\varepsilon = A\mathrm{e}^{ik(x-at)}\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{i\beta t} \tag{2.10.3}$$

式中

$$\alpha = \sum_{m=1}^{\infty}\nu_{2m}k^{2m}(-1)^m \tag{2.10.4}$$

$$\beta = \sum_{m=1}^{\infty}\nu_{2m+1}k^{2m+1}(-1)^m \tag{2.10.5}$$

由式(2.10.3)、式(2.10.4)、式(2.10.5)容易看出以下结果。

(1) 在修正方程式(2.10.1)中，仅右端的偶阶导数项影响误差的振幅，而奇阶导数项仅影响误差的相位和振动频率。

(2) 若某差分计算格式的修正方程式，其 ν_{2m} 满足 $\nu_{2m}(-1)^m<0(m=1,2,3,\cdots)$，则误差增长的振幅是随时间增大而减小的。当 $t\to\infty$ 时，误差 $\varepsilon\to 0$，因此该差分计算格式是稳定的。

(3) 若某差分计算格式的修正方程式，其 $\nu_{2m}=0(m=1,2,3\cdots)$，则误差增长的振幅不随时间而改变，但误差的振动频率可以有较大的变化，即初始时刻具有较低频率的误差，经若干时间步的差分运算后，可能变成具有高频的振动误差(有人也叫锯齿形振动误差)。

具有这种特点的差分计算格式，有人称它为中性稳定的格式。由于它的修正方程式的耗散项全为零，所以亦称为无耗散的计算格式。鉴于在计算中高频振荡的锯齿形误差，也常常能导至计算失败，因此人们总希望计算格式中能出现起稳定作用但不降低格式精度的耗散项。例如对于半离散化的差分格式，当空间导数采

用二阶中心差商近似时，$\nu_{2m}=0(m=1,2,3\cdots)$，此时为了增强格式的稳定性和抑制锯齿形波动，常常在格式中附加 $\nu_4<0$ 的四阶耗散项。

(4) 对于一阶差分格式，若

$$\nu_2>0$$

$$\sum_{m=2}^{\infty}\nu_{2m}k^{2m}(-1)^m<\nu_2$$

则 ε 随 t 增加而减小，因而格式是稳定的。

(5) 对于二阶差分格式($\nu_2=0$)，若

$$\nu_4<0$$

$$\sum_{m=3}^{\infty}\nu_{2m}k^{2m}(-1)^m<-\nu_4k^4$$

则 ε 随 t 增加而减小，格式是稳定的。根据结论(4)、(5)，我们容易得到 Hirt 曾经建议的稳定性的启发性分析方法。事实上，由 2.4、2.5 节的分析可以得到，当 Δt 和 Δx 很小时(σ 假设为常量)，ν_{2m}随 m 增大而减小。这样，对于一阶格式，如果 $\nu_2>0$，就可能有 $\sum_{m=2}^{\infty}\nu_{2m}k^{2m}(-1)^m<\nu_2$；对于二阶格式，如果 $\nu_4<0$，就可能有 $\sum_{m=3}^{\infty}\nu_{2m}k^{2m}(-1)^m<-\nu_4k^4$。在这种情况下，对于一阶格式，只要判断 ν_2 就可分析其稳定性了，如果 $\nu_2>0$，格式是稳定的；对于二阶格式，只要判断 ν_4 就可分析其稳定性，如果 $\nu_4<0$，格式是稳定的。依此方法，可分析更高阶差分格式的稳定性。应该指出，上述判断稳定性的分析方法，其严格成立条件，是建筑在结论(4)、(5) 中第二个条件成立的前提之上的。因为在 Hirt 的判断法则中，没有保证满足这个条件，所以就不能保证在任何情况下这种判断结论都是正确的，因此称这种判断方法为启发性的，以区别于更为准确的判断法则。

2.11 若干典型格式的稳定性条件

利用前两节分析稳定性的方法，可给出各种差分方程的稳定性条件。作为例子，在这节中，给出某些典型的结果。

2.11.1 模型方程$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$的若干典型格式的稳定性条件

其典型的差分格式的稳定性条件见表 2-8。

表 2-8 模型方程$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$的若干典型格式的稳定性条件

格式名称	格式表达式	稳定性条件
显式一阶迎风格式	$u_i^{n+1}=u_i^n-\begin{cases}\frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n-u_i^n), & a<0\\ \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_i^n-u_{i-1}^n), & a>0\end{cases}$	$\frac{\lvert a\rvert\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$
Lax 格式	$u_i^{n+1}=\frac{1}{2}(u_{i+1}^n+u_{i-1}^n)-\frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n-u_{i-1}^n)$	$\frac{\lvert a\rvert\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$
Lax-Wendroff 格式	$u_i^{n+1}=u_i^n-\frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n-u_{i-1}^n)+\frac{1}{2}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2(u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n)$	$\frac{\lvert a\rvert\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$
Leap Frog 格式	$u_i^{n+1}=u_i^{n-1}-\frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n-u_{i-1}^n)$	$\frac{\lvert a\rvert\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$
两步 Lax-Wendroff 格式	$u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(u_{i+1}^n+u_i^n)-\frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n-u_i^n)$ $u_i^{n+1}=u_i^n-\frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right)$	$\frac{\lvert a\rvert\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$
Mac-Cormack 格式	$\overline{u_i^{n+1}}=u_i^n-\frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n-u_i^n)$ $u_i^{n+1}=\frac{1}{2}\left\{u_i+\overline{u_i^{n+1}}-\frac{a\Delta t}{\Delta x}(\overline{u_i^{n+1}}-\overline{u_{i-1}^{n+1}})\right\}$	$\frac{\lvert a\rvert\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$

（续）

格式名称	格式表达式	稳定性条件
Rusanov 格式	$u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u^n_{i+1}+u^n_i) - \frac{1}{3}\sigma(u^n_{i+1}-u^n_i)$ $u^{(2)}_i = u^n_i - \frac{2}{3}\sigma(u^{(1)}_{i+\frac{1}{2}} - u^{(1)}_{i-\frac{1}{2}})$ $u^{n+1}_i = u^n_i - \frac{1}{24}\sigma(-2u^n_{i+2}+7u^n_{i+1}-7u^n_{i-1}+2u^n_{i-2}) - \frac{3}{8}\sigma(u^{(2)}_{i+1}-u^{(2)}_{i-1}) - \frac{\omega}{24}(u^n_{i+2}-4u^n_{i+1}+6u^n_i-4u^n_{i-1}+u^n_{i-2})$	$\frac{\|a\|\Delta t}{\Delta x}=\|\sigma\|\leqslant 1$ $4\sigma^2-\sigma^4\leqslant\omega\leqslant 3$
Warming-Kutler-Lomax 格式	$u^{(1)}_i = u^{(n)}_i - \frac{2}{3}\sigma(u^n_{i+1}-u^n_i)$ $u^{(2)}_i = \frac{1}{2}\left[u^n_i + u^{(1)}_i - \frac{2}{3}\sigma(u^{(1)}_i - u^{(1)}_{i-1})\right]$ $u^{n+1}_i = u^n_i - \frac{1}{24}\sigma(-2u^n_{i+2}+7u^n_{i+1}-7u^n_{i-1}+2u^n_{i-2}) - \frac{3}{8}\sigma(u^{(2)}_{i+1}-u^{(2)}_{i-1}) - \frac{\omega}{24}(u^n_{i+2}-4u^n_{i+1}+6u^n_i-4u^n_{i-1}+4u^n_{i-2})$	$\|\sigma\|\leqslant 1$ $4\sigma^2-\sigma^4\leqslant\omega\leqslant 3$
时间中心隐式格式	$u^{n+1}_i = u^n_i - \frac{a\Delta t}{4\Delta x}[(u^n_{i+1}-u^n_{i-1})+(u^{n+1}_{i+1}-u^{n+1}_{i-1})]$	σ 任意，无条件稳定

2.11.2 模型方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 若干典型格式的稳定性条件

其典型的差分格式及稳定性条件见表 2-9。

表 2-9 模型方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的若干典型格式的稳定性条件

格式名称	格式表达式	稳定性条件
简单显式格式	$u^{n+1}_i = u^n_i + r(u^n_{i+1}-2u^n_i+u^n_{i-1})$ $r = b\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$	$0\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}$
Richardson 格式	$u^{n+1}_i = u^{n-1}_i + 2r(u^n_{i+1}-2u^n_i+u^n_{i-1})$	无条件不稳定
DuFort-Frankel 格式	$u^{n+1}_i = u^{n-1}_i + 2r(u^n_{i+1}-u^{n+1}_i-u^{n-1}_i+u^n_{i-1})$	无条件稳定

（续）

格式名称	格式表达式	稳定性条件
Laasonen 格式	$u_i^{n+1}=u_i^n+r(u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1})$	无条件稳定
Crank-Nicolson 格式	$u_i^{n+1}=u_i^n+\frac{r}{2}[(u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n)+(u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1})]$	无条件稳定
组合格式	$u_i^{n+1}=u_i^n+r[\theta(u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1})+(1-\theta)(u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n)]$	$\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant 1$ 无条件稳定；$0\leqslant\theta<\frac{1}{2}$ 稳定条件为 $0\leqslant r\leqslant\frac{1}{2-4\theta}$

2.12 激波上、下游差分解的波动问题

前面研究了差分方程及其修正方程式，由于存在截断误差，我们可以看到以下问题。

(1) 对于可推进求解的起始值问题，必须注意其计算过程是否稳定。必须选择那些根据稳定性分析确知是稳定的差分计算格式。诚然，上面介绍的稳定性分析方法对线性方程才是完全适用的，对于非线性方程，由于仅通过冻结其方程中导数前的系数，才能使用这种分析方法，因而所给出的稳定性条件是参照性的，实际非线性问题的稳定性条件可能和线性分析是有差别的，但是线性分析方法毕竟还是一个分析稳定性的重要手段。一个不稳定的差分计算格式，当初场存在微小的具有波动的误差时，这个微小的波动误差将随计算过程不断放大，最后导致计算失败。对于一个中性稳定的差分计算格式，例如半离散化的中心格式，计算过程中可能会出现频率逐渐增高的锯齿形波动，这也是希望避免的。

总之，这些情况表明，由于截断误差存在，必须避免推进求解过程中的“波动误差”的发展。

(2) 差分方程的精确解并不是原微分方程的精确解，而是其

修正方程式的精确解。修正方程式中修正项的存在,导致差分解和原微分方程解之间的差别。由于差分格式的不同,修正项可以是各式各样的。设原微分方程的解是没有波动的,其差分解也可能出现波动,即使当解达到定常时也可能有波动。在进行带激波流动的计算时,激波上、下游差分解常出现波动,其原因就在于此。下面来分析这个问题。

2.12.1 解析分析

现在来考察由一维定常 Navier-Stokes 方程描述的正激波流动。其支配方程组为[4]

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\rho u) = 0 \\
&\rho u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{4}{3}\mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\rho u\left(h + \frac{u^2}{2}\right) - \mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{h}{Pr} + \frac{4}{3}\cdot\frac{u^2}{2}\right)\right] = 0 \\
&p = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\rho h \\
&\frac{\mu}{\mu_\infty} = \left(\frac{h}{h_\infty}\right)^n
\end{aligned}\right\} \tag{2.12.1}
$$

式中 p,ρ,h,u 分别是压力、密度、焓、速度;μ 是动力黏性系数;$Pr=\frac{\mu C_p}{K}$为 Prandtl 数,C_p 是等压比热,K 为导热系数;下标∞表示 $x=-\infty$处的来流参数。

正激波流动的边界条件如下。

在 $x=-\infty$处,$\rho=\rho_\infty$,$p=p_\infty$,$h=h_\infty$,$u=u_\infty$,且$\frac{\partial^n q}{\partial x^n}=0$,$n=1,2,\cdots,\infty$,$q$ 代表ρ,p,h,u 等。

在 $x=\infty$处,$\rho=\rho_2$,$p=p_2$,$h=h_2$,$u=u_2$,它们的值由无黏完全气体的正激波关系式决定,例如 $u_2=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(1+\frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{Ma_\infty^2}\right)u_\infty$,并且

$\frac{\partial^n q}{\partial x^n}=0, n=1,2,\cdots,\infty$。

连续方程有如下积分

$$\rho u = \rho_\infty u_\infty$$

在 $Pr=3/4$ 的近似假设(与空气的 $Pr=0.72$ 相接近)下,能量方程有如下积分

$$h + \frac{u^2}{2} = h_\infty + \frac{u_\infty^2}{2}$$

于是有

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{\rho_\infty u_\infty}{u}\left(h_\infty + \frac{u_\infty^2}{2} - \frac{u^2}{2}\right)$$

考虑到 $h_\infty=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty}=\frac{1}{\gamma-1}a_\infty^2$,可得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\frac{\gamma - 1}{2\gamma}\rho_\infty u_\infty\left[1 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \cdot \frac{u_\infty u_2}{u^2}\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

于是有

$$\rho u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\gamma + 1}{2\gamma}\rho_\infty u_\infty\left[1 - \frac{u_\infty u_2}{u^2}\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

将它代入动量方程可得如下描述正激波流动的基本方程

$$\frac{\gamma + 1}{2\gamma}\rho_\infty u_\infty\left[1 - \frac{u_\infty u_2}{u^2}\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\nu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) \quad (2.12.2)$$

式中 $\nu=\frac{4}{3}\mu$。

为了模拟修正方程式中 ν_n 的影响,这里仅以附加二阶和三阶导数项为例来研究一维 Navier-Stokes 方程所描述的正激波流动。其基本方程为

$$\frac{\gamma + 1}{2\gamma}\rho_\infty u_\infty\left(1 - \frac{u_\infty u_2}{u^2}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(\nu + \nu_2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right] +$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\nu_3 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}\right] \tag{2.12.3}$$

式中 ν_2 和 ν_3 为相应附加导数项的系数，假设为常量。应该指出，当 ν_2 和 ν_3 都为零时，式(2.12.3)是精确的描述定常正激波流动的 Navier-Stokes 方程。当 $\nu_3=0$，而 $\nu_2\neq 0$ 时，式(2.12.3)模拟了某个一阶差分格式的修正方程式；当 $\nu_2=0$，$\nu_3\neq 0$ 时，式(2.12.3)模拟了某个二阶格式的修正方程式。因此，通过求解式(2.12.3)，可研究二阶、三阶附加项对解的影响。

事实上，如果以无黏性正激波前、后的物理量分布作为迭代求解的初值，文献中已经证明，当 $\nu_2=\nu_3=0$ 时，式(2.12.3)具有光滑的激波解(图 2-2 的实线)，其激波区很薄，激波区以外，诸物理量迅速接近无黏性正激波上、下游的值。如果 ν_2，ν_3 不为零，虽然式(2.12.3)的解在远离激波的区域仍接近无黏性正激波上、下游的值，但在激波附近，解可能出现波动。现分析如下[5]。

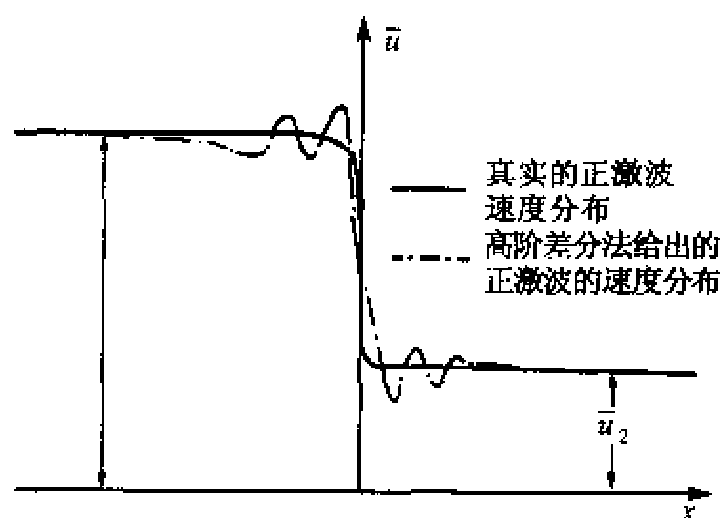


图 2-2　一维正激波流动的速度分布示意图

将式(2.12.3)对 x 进行积分，并应用 $x=-\infty$ 处的边界条件，可得

$$(\nu+\nu_2)\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}x}+\nu_3\frac{\mathrm{d}^2\bar{u}}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\gamma+1}{2\gamma}\rho_\infty u_\infty\frac{(\bar{u}-1)(\bar{u}-\bar{u}_2)}{\bar{u}} \tag{2.12.4}$$

式中 $\bar{u}=\frac{u}{u_\infty}$;

$$\bar{u}_2=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left[1+\frac{2}{(\gamma-1)Ma_\infty^2}\right]。$$

现在来研究 $\bar{u}=1$ 和 $\bar{u}=\bar{u}_2$ 附近,式(2.12.4)的解的性质。因为当 $x\to-\infty$ 时,$\bar{u}\to1$ 和当 $x\to\infty$ 时,$\bar{u}\to\bar{u}_2$,故而这种研究可给出解在上、下游区域的性状。令

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}&=1+u' \quad (\text{上游区})\\ \bar{u}&=\bar{u}_2+u' \quad (\text{下游区})\end{aligned}\right\}\tag{2.12.5}$$

设在上游区,$|u'|\ll1$,而在下游区 $|u'|\ll\bar{u}_2$。将式(2.12.5)代入式(2.12.4),略去 u'^2 以上的高阶小量项后得到

$$\left.\begin{aligned}\mu_1\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}x}+\nu_3\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}x^2}&=k_1u' \quad (\text{上游区})\\ \mu_2\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}x}+\nu_3\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}x^2}&=-k_2u' \quad (\text{下游区})\end{aligned}\right\}\tag{2.12.6}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\mu_1=\nu_{1\infty}+\nu_2,\quad \mu_2=\nu_{2\infty}+\nu_2\\ &k_1=\frac{\gamma+1}{2\gamma}\rho_\infty u_\infty(1-\bar{u}_2)>0\\ &k_2=\frac{\gamma+1}{2\gamma}\rho_\infty u_\infty\frac{1-\bar{u}_2}{\bar{u}_2}>0\end{aligned}\right\}\tag{2.12.7}$$

$\nu_{1\infty}$ 和 $\nu_{2\infty}$ 分别是 $x=-\infty$ 和 $x=\infty$ 时的 ν 值。显然,式(2.12.6)是线性方程,它的一般解很容易由以下特征方程决定

$$\left.\begin{aligned}\nu_3\lambda^2+\mu_1\lambda-k_1&=0 \quad (\text{上游区})\\ \nu_3\lambda^2+\mu_2\lambda+k_2&=0 \quad (\text{下游区})\end{aligned}\right\}\tag{2.12.8}$$

下面分几种不同情况来讨论。

(1) $\mu_1>0,\mu_2>0,\nu_3=0$ 的情形

此时,式(2.12.8)的特征根为

$$\lambda_1=k_1/\mu_1 \quad (\text{上游区})$$

$$\lambda_2=-k_2/\mu_2 \quad (\text{下游区})$$

与之相应的式(2.12.6)的一般解为

$$u' = A\exp\left(\frac{k_1}{\mu_1}x\right) \quad （上游区）$$

$$u' = B\exp\left(-\frac{k_2}{\mu_2}x\right) \quad （下游区）$$

由式(2.12.5)可得

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= 1 + A\exp\left(\frac{k_1}{\mu_1}x\right) \quad （上游区） \\ \bar{u} &= \bar{u}_2 + B\exp\left(-\frac{k_2}{\mu_2}x\right) \quad （下游区） \end{aligned}\right\} \quad (2.12.9)$$

式(2.12.9)表明，当 $x\to-\infty$时，上游区的解按指数规律光滑地趋于 1；而当 $x\to\infty$ 时，下游区的解也按指数规律光滑地趋于 $\bar{u}_2$。因此，在这种情况下，激波上、下游都不出现波动。

(2) $\mu_1>0,\mu_2>0,\nu_3<0$ 的情形

对于上游区，若

$$\mu_1^2 + 4k_1\nu_3 > 0$$

则式(2.12.8)的两个特征根皆为大于零的实数，与之相应的式(2.12.6)的一般解是

$$u' = A_1\exp\left[-\left(\frac{\mu_1}{2\nu_3} + \frac{1}{2\nu_3}\sqrt{\mu_1^2 + 4\nu_3 k_1}\right)x\right] + A_2\exp\left[-\left(\frac{\mu_1}{2\nu_3} - \frac{1}{2\nu_3}\sqrt{\mu_1^2 + 4\nu_3 k_1}\right)x\right]$$

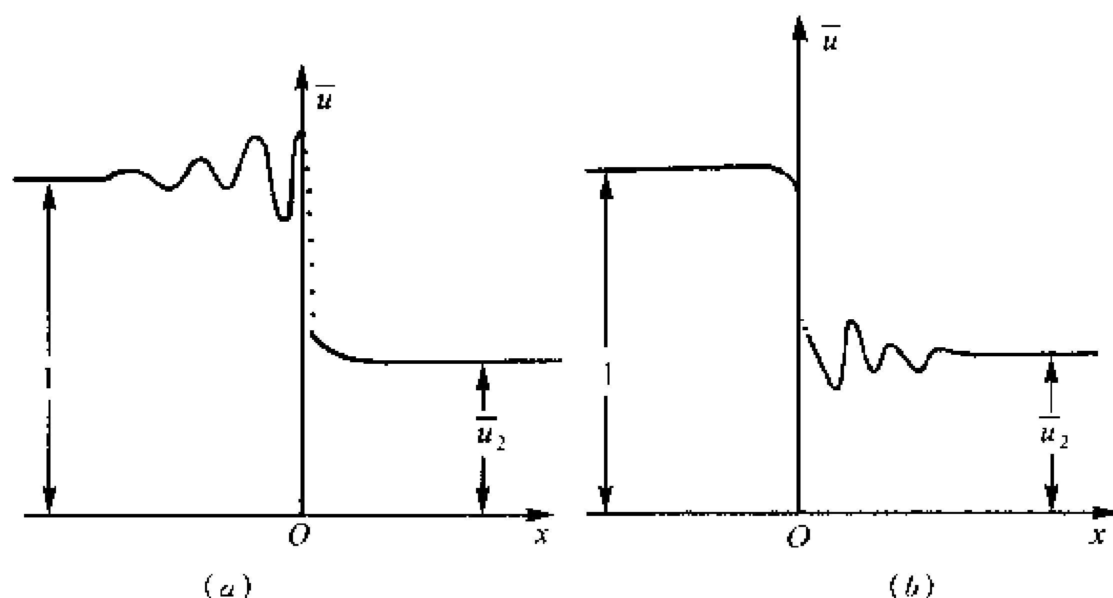
再由式(2.12.5)可得

$$\bar{u} = 1 + A_1\exp\left[-\left(\frac{\mu_1}{2\nu_3} + \frac{1}{2\nu_3}\sqrt{\mu_1^2 + 4\nu_3 k_1}\right)x\right] + A_2\exp\left[-\left(\frac{\mu_1}{2\nu_3} - \frac{1}{2\nu_3}\sqrt{\mu_1^2 + 4\nu_3 k_1}\right)x\right] \quad (2.12.10)$$

式中 A_1 和 A_2 为积分常数。可见，此时解不出现波动。反之，若 $\mu_1^2+4k_1\nu_3<0$，则由式(2.12.8)解得的两个特征根均是复数，求出式(2.12.6)的一般解后，再通过式(2.12.5)可得

$$u = 1 + A_1 \exp\left(-\frac{\mu_1}{2\nu_3}x\right)\cos\left(-\frac{1}{2\nu_3}\sqrt{-4\nu_3 k_1 - \mu_1^2}\,x\right) +$$
$$A_2 \exp\left(-\frac{\mu_1}{2\nu_3}x\right)\sin\left(-\frac{1}{2\nu_3}\sqrt{-4\nu_3 k_1 - \mu_1^2}\,x\right) \tag{2.12.11}$$

对于二阶差分格式，$\mu_1 = \nu_{1\infty}$ 是很小的，如 $\nu_3 < 0$，常常是 $\mu_1^2 + 4k_1\nu_3 < 0$。这就表明，此时解在上游出现波动，且随 x 增大，振幅逐渐增大。图 2-3(a)给出了此时的速度分布示意图。



(a) (b)

图 2-3 激波附近的速度分布

(a) $\mu_1>0, \mu_2>0, \nu_3<0$ 的情形；

(b) $\mu_1>0, \mu_2>0, \nu_3>0$ 的情形。

对于下游区，由式(2.12.8)解出的两个特征根皆为实数。求出式(2.12.6)的一般解后，再通过式(2.12.5)可得

$$\bar{u} = u_2 + A_1 \exp\left[-\left(\frac{\mu_2}{2\nu_3} + \frac{1}{2\nu_3}\sqrt{\mu_2^2 - 4\nu_3 k_1}\right)x\right] +$$
$$A_2 \exp\left[-\left(\frac{\mu_2}{2\nu_3} - \frac{1}{2\nu_3}\sqrt{\mu_2^2 - 4\nu_3 k_2}\right)x\right] \tag{2.12.12}$$

可见，此时解在下游不出现波动。

(3) $\mu_1>0, \mu_2>0, \nu_3>0$ 的情形

使用同样的分析方法可以得到如下结论。在上游，解不出现

波动;但在下游,若

$$\frac{\mu_2^2}{k_2\nu_3} < 4$$

则解出现波动(见图2.3(*b*))。

根据上面的分析,可得结论如下。

第一,在修正方程式中,正的 ν_2 有抑制激波附近差分解波动的作用。如果采用具有正系数的二阶耗散项的一阶格式,或者在高阶格式中,人工附加正系数的二阶耗散项,当 ν_3、ν_4 等高阶项都很小时,则可得到光滑的激波解。

第二,对于二阶差分格式,如果 ν_3 在激波上、下游全大于零,ν_4 等高阶项较小,则差分格式给出的激波解在上游是光滑的,但下游出现波动解。对于二阶差分格式,如果 ν_3 在激波上、下游全小于零,ν_4 等高阶项较小,则差分格式给出的激波解在下游是光滑的,但上游出现波动解。

利用这些结论,我们可作出如下推论。

(1) 在使用差分方法求解 Euler 方程和 Navier-Stokes 方程时,通过采用具有正系数的二阶数值耗散项的一阶格式,或者在高阶格式中附加具有正系数的二阶人工耗散项,可以光滑地捕捉激波,但所得的激波厚度被加宽了。这个推论已被目前已有的大量数值结果所证实。

(2) 如果我们构造一个这样的二阶差分格式,在激波上游 $\nu_3>0$,而在激波下游 $\nu_3<0$,则该格式在激波上、下游皆可光滑地捕捉激波。

2.12.2 一维激波的数值模拟

上面的推论(2),是建筑在线化解析分析基础上的,而实际问题是非线性的,因此使用数值模拟方法研究该推论的正确性是完全必要的。

对于常比热完全气体,支配正激波流动的一维 Navier-Stokes

方程组是(假设流动是绝热的)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u\left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{4}{3}\mu u \frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

式中 e 是单位质量气体的内能。这里假设 Prandtl 数为 3/4。

为了模拟与由上述偏微分方程组经某个二阶差分格式离散后所得到的差分方程组等价的修正方程组,在上述方程组右端附加系数为 ν_3 的相应的三阶导数项,于是有如下方程组

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \\
&\quad \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u\left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right)\right] = \\
&\quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{4}{3}\mu u \frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\nu_3 u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]
\end{aligned}\right\}$$

(2.12.13)

为了模拟一维激波流动,规定如下边界条件:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{当 } x \to -\infty \text{ 时,} \\
&\rho = \rho_\infty, u = u_\infty, e = e_\infty, \\
&\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = 0 \\
&\text{当 } x \to \infty \text{ 时,} \\
&u = u_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\left(1 + \frac{2}{\gamma - 1}\frac{1}{Ma_\infty^2}\right)u_\infty
\end{aligned}\right\}$$

(2.12.14)

式中 $Ma_\infty = u_\infty \Big/ \left(\dfrac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty}\right)^{1/2}$。

在定常情况下，可将式(2.12.13)对 x 进行积分。经过不复杂的运算，可给出如下确定 u 的方程

$$\alpha \Delta x^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \beta \Delta x \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}x} = \frac{(\bar{u} - 1)(\bar{u} - \bar{u}_2)}{\bar{u}} \tag{2.12.15}$$

式中 $\alpha = \dfrac{2}{\gamma+1}\left(\dfrac{\nu_3}{\rho_\infty u_\infty \Delta x^2}\right)$；

$\beta = \dfrac{8}{3}\left(\dfrac{1}{\gamma+1}\right)\left(\dfrac{\mu}{\rho_\infty u_\infty \Delta x}\right)$。

显然，当 $\beta = 0$ 时，式(2.12.15)代表了附加三阶导数项的 Euler 方程。当 β 不为零时，为了简单起见，并且也不影响分析结论，以下假设 μ 为常数。

将方程(2.12.15)中的 $\dfrac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2\bar{u}}{\mathrm{d}x^2}$ 分别用二阶或更高阶精度的差商代替后，可以求出任意 α、β 组合下方程(2.12.15)的解。在本节的计算中，由于 $\mu \geqslant 0$，故取 $\beta \geqslant 0$。因为 α 和 ν_3 的符号一致，为了考察 ν_3 的影响，故 α 的值正、负都取。图 2-4 至图 2-6 是数值计算给出的某些结果。

图 2-4 表明，当在激波上、下游 $\alpha > 0$ 时，激波上游差分解是光滑的，但下游出现波动。

图 2-5 表明，当在激波上、下游 $\alpha < 0$ 时，激波下游差分解是光滑的，但上游出现波动。

图 2-6 表明，如果在激波上游 $\alpha > 0$，而在激波下游 $\alpha < 0$，则在激波上、下游的差分解都是光滑的。这就说明，数值模拟完全证实了上述由解析分析得到的推论(2)。

推论(2)是很有意义的，它指出了一条构造能光滑捕捉激波的

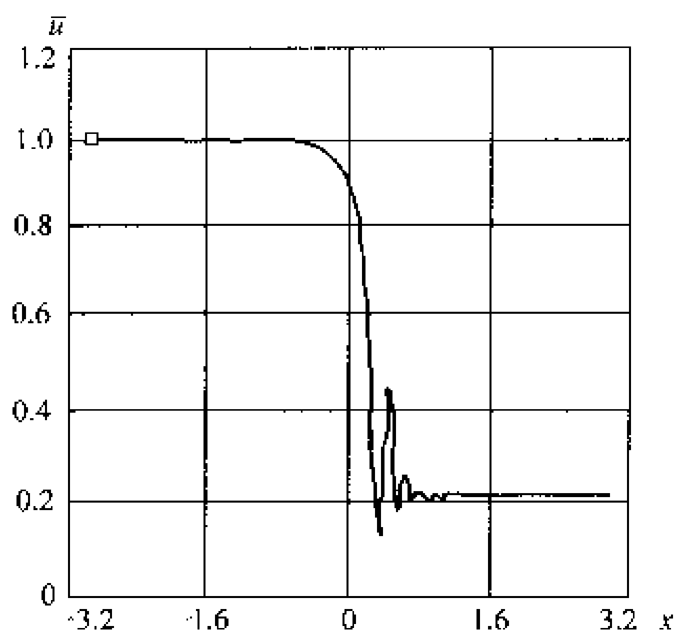


图 2-4　正激波流动

$\alpha=0.9$, $\beta=0.9$, $Ma_\infty=4.0$。

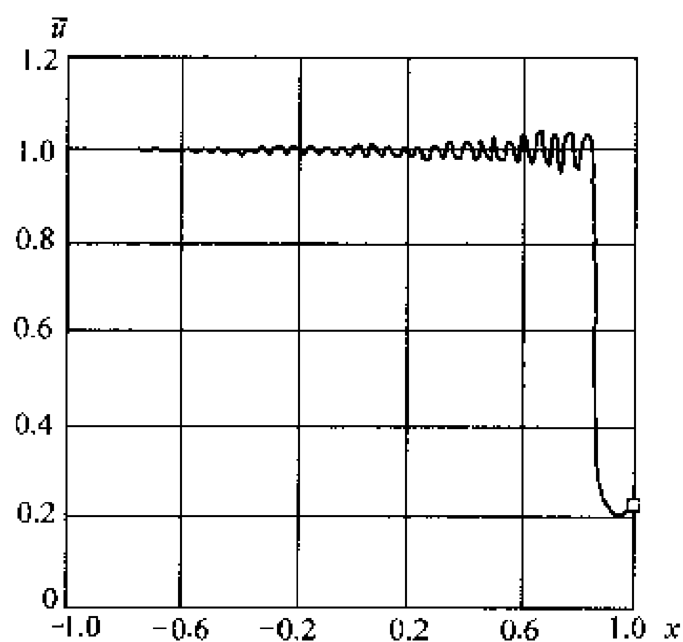


图 2-5　正激波流动

$\alpha=-0.9$, $\beta=0.9$, $Ma_\infty=4.0$。

二阶格式的路子。在第 4 章中，我们将遵循这条路子，构造出能光滑地捕捉激波的二阶空间精度的 NND 格式（无波动、无自由参数

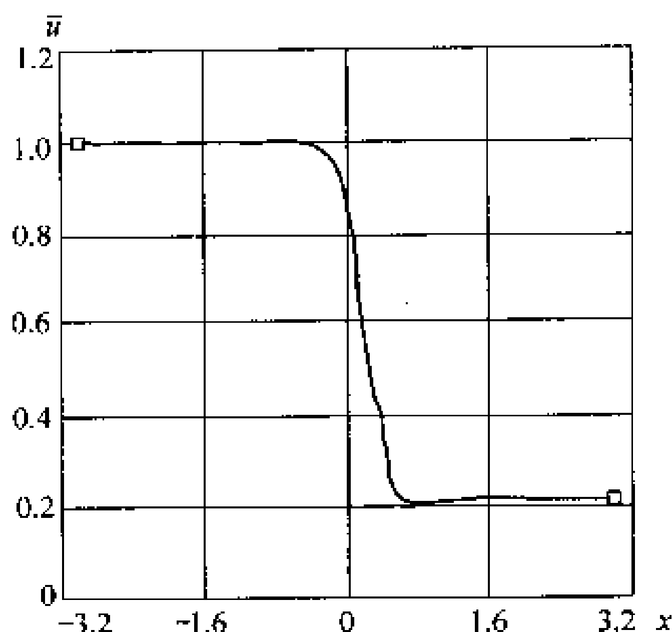


图 2-6 正激波流动

$\alpha_{上游}=0.9$，$\alpha_{下游}=-0.9$，$\beta=0.9$，$Ma_{\infty}=4.0$。

的耗散格式)。

2.12.3 激波附近差分解的波动与热力学第二定律

热力学第二定律的数学表述是熵增原理：当物体系经绝热过程由一态达到另一态，它的熵不减少；熵在可逆绝热过程中不变，在不可逆绝热过程后增加。气体流过激波是一个不可逆绝热过程，故熵必然增大。

在 μ 为常数的近似假设下，利用方程组(2.12.13)，由热力学第一定律可推导出

$$\rho T\frac{Ds}{Dt}=\rho\frac{De}{Dt}+\rho p\frac{D\left(\frac{1}{\rho}\right)}{Dt}=$$

$$\frac{4}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\nu_3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (2.12.16)$$

式中$\frac{Ds}{Dt}$是熵的随体导数。对于真实的激波，在激波上游，$\frac{\partial u}{\partial x}<0$，

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}<0$，因而 $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}>0$；而在激波下游，$\frac{\partial u}{\partial x}<0$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}>0$，因而 $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}<0$。式(2.12.16)表明：当 μ 很小(Navier-Stokes 方程，高雷诺数流动)或 $\mu=0$(Euler 方程时，如果在全区内 $\nu_3>0$，则激波上游是满足熵增条件的，而下游不满足；反之，如果在全区内 $\nu_3<0$，则激波上游不满足熵增条件，但下游却是满足的。如果在激波上游 $\nu_3>0$，而在激波下游 $\nu_3<0$，则在激波上、下游都是满足熵增条件的。

与前面关于差分解在激波附近出现波动情况的分析结果相比较，容易看出，凡是熵增条件不满足的地方，就会出现差分解的波动。这就意味着熵增条件与差分解的非物理振荡是密切相关的。

第 3 章　几个典型的差分格式

本章将介绍几个典型的差分格式。它们包括 MacCormack 显式耗散格式、基于 Runge-Kutta 法的显式耗散格式、Beam-Warming 隐式耗散格式、Jameson隐式耗散格式以及混合反扩散格式。

3.1　MacCormack 显式耗散格式

作为例子,研究如下二维非定常 Euler 方程的数值求解问题

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}=0 \tag{3.1.1}$$

3.1.1　MacCormack 格式[1,2]

在时间和空间均为二阶精度的范围内,利用 Taylor 展开和近似因式分解可以证明

$$\boldsymbol{U}^{n+1}=L_x\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)Ly(\Delta t)L_x\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)\boldsymbol{U}^n \tag{3.1.2}$$

或者

$$\boldsymbol{U}^{n+1}=L_y\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)L_x(\Delta t)L_y\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)\boldsymbol{U}^n \tag{3.1.3}$$

式中,$\boldsymbol{U}^n$ 是 $t=t_n$ 时刻的 $\boldsymbol{U}$,$\boldsymbol{U}^{n+1}$是 $t=t_n+\Delta t$ 时刻的 $\boldsymbol{U}$。$L_x(\Delta t)$是如下方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}=0 \tag{3.1.4}$$

的二阶差分算子,步长为 Δt。$L_y(\Delta t)$是如下方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}=0 \tag{3.1.5}$$

的二阶差分算子,步长为 Δt。

对于方程(3.1.4)和(3.1.5),MacCormack 分别给出了相应的两步二阶精度的算式。具体地说,对于方程(3.1.4),$L_x(\Delta t)$是

预测: $$\overline{U_{ij}^{*n}} = U_{ij}^{*n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(E_{ij}^{*n} - E_{i-1j}^{*n}) \tag{3.1.6}$$

修正: $$U_{ij}^{*n+1} = \frac{1}{2}\left\{U_{ij}^{*n} + \overline{U_{ij}^{*n}} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\overline{E_{i+1j}^{*n}} - \overline{E_{ij}^{*n}})\right\} \tag{3.1.7}$$

而对于方程(3.1.5),$L_y(\Delta t)$是

预测: $$\overline{U_{ij}^{**n}} = U_{ij}^{**n} - \frac{\Delta t}{\Delta y}(F_{ij}^{**n} - F_{i,j-1}^{**n}) \tag{3.1.8}$$

修正: $$U_{ij}^{**n+1} = \frac{1}{2}\left\{U_{ij}^{**n} + \overline{U_{ij}^{**n}} - \frac{\Delta t}{\Delta y}(\overline{F_{i,j+1}^{**n}} - \overline{F_{ij}^{**n}})\right\} \tag{3.1.9}$$

可以证明,上述 MacCormack 两步格式能自动生成具有负系数的四阶耗散项,因此这个格式能抑制奇偶失联的差分解的波动。但如果流场中存在激波,计算实践表明该格式不能抑制激波附近区域中差分解的波动。

3.1.2 附加二阶人工黏性项的 MacCormack 方法

为了抑制激波附近区域中数值解的虚假波动,在方程(3.1.4)和(3.1.5)中分别附加如下具有正系数($\nu_2>0$)的二阶人工黏性项

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{2}\nu_2\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{3.1.10}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2}\nu_2\frac{\Delta y^2}{\Delta t}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \tag{3.1.11}$$

由于 $E = AU$,$A = \frac{\partial E}{\partial U}$,故由式(3.1.10)可得

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}A + \frac{1}{2}\nu_2\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

于是由 Taylor 展开公式可得如下二阶精度的表达式

$$U^{n+1}=U^n+\Delta t\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^n+\frac{1}{2}\Delta t^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)=$$

$$U^n+\Delta t\left(-\frac{\partial}{\partial x}A^n+\frac{1}{2}\nu_2\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)U^n+$$

$$\frac{1}{2}\Delta t^2\left(\frac{\partial}{\partial x}A^n\frac{\partial}{\partial x}A^n\right)U^n=$$

$$\left\{I-\Delta t\frac{\partial}{\partial x}A^n+\frac{1}{2}\Delta t^2\left(\frac{\partial}{\partial x}A^n\frac{\partial}{\partial x}A^n\right)+\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\nu_2\Delta x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}U^n$$

再将上式右端在二阶精度范围内进行因式分解可得

$$U^{n+1}=\left\{I-\Delta t\frac{\partial}{\partial x}A^n+\frac{1}{2}\Delta t^2\left(\frac{\partial}{\partial x}A^n\frac{\partial}{\partial x}A^n\right)\right\}$$

$$\left\{I+\frac{1}{2}\nu_2\Delta x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}U^n \tag{3.1.12}$$

或者

$$U^{n+1}=\left\{I+\frac{1}{2}\nu_2\Delta x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}$$

$$\left\{I-\Delta t\frac{\partial}{\partial x}A^n+\frac{1}{2}\Delta t^2\left(\frac{\partial}{\partial x}A^n\frac{\partial}{\partial x}A^n\right)\right\}U^n \tag{3.1.13}$$

可以将式(3.1.12)和式(3.1.13)分别表示成如下算子表达式

$$U^{n+1}=\mathrm{L}_x(\Delta t)\mathrm{L}_{xx}(\Delta t)U^n \tag{3.1.14}$$

和

$$U^{n+1}=\mathrm{L}_{xx}(\Delta t)\mathrm{L}_x(\Delta t)U^n \tag{3.1.15}$$

式中 $\mathrm{L}_x(\Delta t)$是方程

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}=0$$

的二阶差分算子，例如上述 MacCormack 的两步算子。而 $L_{xx}(\Delta t)$则是方程

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{1}{2}\nu_2\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{3.1.16}$$

的一阶差分算子。其具体表达式为

$$\overline{U_{ij}^{n+1}} = U_{ij}^{n} + \frac{1}{2}\nu_2(U_{i+1j}^{n} - 2U_{ij}^{n} + U_{i+j}^{n}) \quad (3.1.17)$$

称式(3.1.17)为滤波方程[3]。

式(3.1.14)表明,当求解方程(3.1.10)时,可以先用式(3.1.17)求解方程(3.1.16)(将这个运算称为滤波运算),然后将所得结果作为初值,并用 MacCormack 格式数值求解方程(3.1.4)。当然,式(3.1.15)表明,也可以用与上述次序相反的次序来数值求解方程(3.1.10)。可以用完全类似的方法数值求解方程(3.1.11)。

现将上面的讨论小结如下。方程(3.1.1)的数值求解可按下列次序履行;根据已知的 U_{ij}^n,先沿 x 方向进行滤波运算,再沿 y 方向进行滤波,再将如此得到的流场作为初场,并用 MacCormack 格式(3.1.2)或式(3.1.3)进行计算。

实践表明,上述算法能抑制激波附近区域和光滑区中数值解的波动。这是因为激波附近区域中数值解的波动可以用滤波(即二阶人工黏性法)来消除。另一方面,因 MacCormack 两步中心格式能自动生成具有负系数的四阶耗散项,因而能抑制光滑区中的奇偶失联波动。

3.1.3 人工黏性系数 ν_2 的确定

早期是靠数值实验来选择 ν_2,其选择的原则是能光滑地捕捉激波。稍近的一些工作是依据最小耗散原则来选择 ν_2。下面来介绍这种方法[4]。

为简单起见,考虑如下线性标量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a > 0 \quad (3.1.18)$$

附加了二阶人工黏性后,方程变为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\nu_2\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.1.19)$$

由前面的讨论知，方程(3.1.19)的数值求解可按如下次序来履行。对已知的初值 u^n，经滤波后得

$$\overline{u_j^n} = u_j^n + \frac{1}{2}\nu_2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \qquad (3.1.20)$$

然后以 $\overline{u_j^n}$ 为初场用 MacCormack 格式求解方程(3.1.18)，可得

$$u_j^{n+1} = \overline{u_j^n} - \frac{1}{2}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)(\overline{u_{j+1}^n} - \overline{u_{j-1}^n}) + \frac{1}{2}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2(\overline{u_{j+1}^n} - 2\overline{u_j^n} + \overline{u_{j-1}^n}) \qquad (3.1.21)$$

将式(3.1.20)代入式(3.1.21)，并略去三阶及三阶以上的小量后可得

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}\nu_2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

经整理后得到

$$u_j^{n+1} = \mathrm{A}u_{j-1}^n + \mathrm{B}u_j^n + \mathrm{C}u_{j+1}^n \qquad (3.1.22)$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A} &= \frac{1}{2}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2 + \frac{1}{2}\nu_2 \\ \mathrm{B} &= 1 - \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2 - \nu_2 \\ \mathrm{C} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2 + \frac{1}{2}\nu_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.23)$$

根据 Godunov 定理，欲使格式(3.1.22)是单调的，其充要条件是 $\mathrm{A}\geqslant0,\mathrm{B}\geqslant0,\mathrm{C}\geqslant0$。由式(3.1.23)知，A 是自动满足大于零的条件的，而由 $\mathrm{B}\geqslant0$ 和 $\mathrm{C}\geqslant0$ 可得

$$\frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\right) \leqslant \nu_2 \leqslant 1 - \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \qquad (3.1.24)$$

若取

$$\nu_2 = \frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\left(1 - \frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\right) \qquad (3.1.25)$$

显然此时式(3.1.24)可以得到满足。因为如此选择的 ν_2 是由式(3.1.24)所规定的附加人工黏性系数的允许范围的下限,所以称之为最小耗散的人工黏性系数。

3.1.4 开关函数的引进

由上述知,式(3.1.25)所确定的 ν_2 是保证格式单调时的最小耗散人工黏性系数。但无论如何,此时格式的精度已退化为一阶,这是为光滑地捕捉激波所付出的代价。为使这个代价尽可能地小,仅需在激波附近区域附加上述二阶人工黏性项,而在激波以外的区域希望 $\nu_2 \to 0$。为此需要引进一个开关函数 θ_j,令

$$\nu_2 = \frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\left(1 - \frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\right)\theta_j \tag{3.1.26}$$

开关函数 θ_j 应该满足如下要求:在激波处 $\theta_j \to 1$,而在激波以外,$\theta_j \to 0$。下述开关函数能较好地满足此种要求

$$\theta_j = \left|\frac{p_{j+1} - 2p_j + p_{j-1}}{p_{j+1} + 2p_j + p_{j-1}}\right| \tag{3.1.27}$$

综上所述,当采用 MacCormack 显式耗散格式求解 Euler 方程时,方程(3.1.10)中的 ν_2 为

$$\nu_2 = \left[\frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\left(1 - \frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\right)\right]_i \theta_i$$

$$\theta_i = \left|\frac{p_{i+1,j} - 2p_{ij} + p_{i-1,j}}{p_{i+1,j} + 2p_{ij} + p_{i-1,j}}\right|$$

方程(3.1.11)中的 ν_2 为

$$\nu_2 = \left[\frac{|b|\Delta t}{\Delta y}\left(1 - \frac{|b|\Delta t}{\Delta y}\right)\right]_j \theta_j$$

$$\theta_j = \left|\frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{p_{i,j+1} + 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}\right|$$

在以上两式中,a,b 可理解为$\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{U}} = \boldsymbol{A}$,$\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{U}} = \boldsymbol{B}$ 的特征值。

3.2 基于 Runge-Kutta 法的显式耗散格式

仍然以二维非定常 Euler 方程的数值求解为例来说明。半离散化后得到的方程为

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}\right)_{i,j} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}\right)_{i,j} \equiv -\boldsymbol{R}_{i,j}$$

式中 $\boldsymbol{R}_{i,j}$采用二阶中心差分来计算。为了光滑地捕捉激波,附加具有正系数的二阶人工黏性项;为了抑制数值解的奇偶失联振荡,附加具有负系数的四阶耗散项。此时,半离散化的方程为[5]

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}\right)_{i,j} = -\boldsymbol{R}_{i,j} + \boldsymbol{D}_{i,j} - \boldsymbol{d}_{i,j} \tag{3.2.1}$$

式中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_{i,j} = \frac{1}{\Delta t}\{&[\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^{(2)}(\boldsymbol{U}_{i+1,j} - \boldsymbol{U}_{i,j}) - \\ &\varepsilon_{i-\frac{1}{2}}^{(2)}(\boldsymbol{U}_{i,j} - \boldsymbol{U}_{i-1,j})] + \\ &[\varepsilon_{j+\frac{1}{2}}^{(2)}(\boldsymbol{U}_{i,j+1} - \boldsymbol{U}_{i,j}) - \\ &\varepsilon_{j-\frac{1}{2}}^{(2)}(\boldsymbol{U}_{i,j} - \boldsymbol{U}_{i,j-1})]\}\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}_{i,j} = \frac{1}{\Delta t}\{&[\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^{(4)}(\boldsymbol{U}_{i+2,j} - 3\boldsymbol{U}_{i+1,j} + 3\boldsymbol{U}_{i,j} - \boldsymbol{U}_{i-1,j}) - \\ &\varepsilon_{i-\frac{1}{2}}^{(4)}(\boldsymbol{U}_{i+1,j} - 3\boldsymbol{U}_{i,j} + 3\boldsymbol{U}_{i-1,j} - \boldsymbol{U}_{i-2,j})] + \\ &[\varepsilon_{j+\frac{1}{2}}^{(4)}(\boldsymbol{U}_{i,j+2} - 3\boldsymbol{U}_{i,j+1} + 3\boldsymbol{U}_{i,j} - \boldsymbol{U}_{i,j-1}) - \\ &\varepsilon_{j-\frac{1}{2}}^{(4)}(\boldsymbol{U}_{i,j+1} - 3\boldsymbol{U}_{i,j} + 3\boldsymbol{U}_{i,j-1} - \boldsymbol{U}_{i,j-2})]\}\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

式中

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\varepsilon^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} = K^{(2)}\max(\theta_{x_{i+1,j}}, \theta_{x_{i,j}}) & ,\varepsilon^{(2)}_{j+\frac{1}{2}} = K^{(2)}\max(\theta_{y_{i,j+1}}, \theta_{y_{i,j}}) \\
\varepsilon^{(4)}_{i+\frac{1}{2}} = \max\{0, (K^{(4)} - \varepsilon^{(2)}_{i+\frac{1}{2}})\} & ,\varepsilon^{(4)}_{j+\frac{1}{2}} = \max\{0, (K^{(4)} - \varepsilon^{(2)}_{j+\frac{1}{2}})\} \\
\theta_{x_{i,j}} = \left|\dfrac{p_{i-1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{p_{i+1,j} + 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}\right| & ,\theta_{y_{i,j}} = \left|\dfrac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{p_{i,j+1} + 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}\right| \\
K^{(2)} = \dfrac{1}{4} & ,K^{(4)} = \dfrac{1}{128}
\end{array}
\right\}
\tag{3.2.4}
$$

用四步 Runge-Kutta 法求解半离散化方程(3.2.1),其计算格式如下

$$
\left.
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}^{(0)}_{i,j} &= \boldsymbol{U}^{n}_{i,j} \\
\boldsymbol{U}^{(1)}_{i,j} &= \boldsymbol{U}^{(0)}_{i,j} - \frac{\Delta t}{8}(\boldsymbol{R}^{(0)}_{i,j} - \boldsymbol{D}^{(0)}_{i,j} + \boldsymbol{d}^{(0)}_{i,j}) \\
\boldsymbol{U}^{(2)}_{i,j} &= \boldsymbol{U}^{(0)}_{i,j} - \frac{\Delta t}{6}(\boldsymbol{R}^{(1)}_{i,j} - \boldsymbol{D}^{(0)}_{i,j} + \boldsymbol{d}^{(0)}_{i,j}) \\
\boldsymbol{U}^{(3)}_{i,j} &= \boldsymbol{U}^{(0)}_{i,j} - \frac{\Delta t}{4}(\boldsymbol{R}^{(2)}_{i,j} - \boldsymbol{D}^{(0)}_{i,j} + \boldsymbol{d}^{(0)}_{i,j}) \\
\boldsymbol{U}^{(4)}_{i,j} &= \boldsymbol{U}^{(0)}_{i,j} - \frac{\Delta t}{2}(\boldsymbol{R}^{(3)}_{i,j} - \boldsymbol{D}^{(0)}_{i,j} + \boldsymbol{d}^{(0)}_{i,j}) \\
\boldsymbol{U}^{n+1}_{i,j} &= \boldsymbol{U}^{(4)}_{i,j}
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.2.5}
$$

这个基于 Runge-Kutta 法的显式非线性耗散格式在时间和空间方向均是二阶精度的(激波附近除外),其稳定性条件为$|\lambda|\Delta t/\Delta x \leqslant 2$。其中$|\lambda|$是 Jacobian 矩阵 A,B 的诸特征值中的最大值。

3.3 Beam-Warming 隐式耗散格式[6]

为简单起见,仍以 Euler 方程的数值求解问题为例说明之。

3.3.1 一维流动情形

一维非定常 Euler 方程为

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} = 0 \qquad (3.3.1)$$

采用 Crank-Nicolson 格式对上面方程进行离散可得

$$\boldsymbol{U}_j^{n+1} = \boldsymbol{U}_j^n - \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}[(\boldsymbol{E}_{j+1}^n - \boldsymbol{E}_{j-1}^n) + (\boldsymbol{E}_{j+1}^{n+1} - \boldsymbol{E}_{j-1}^{n+1})]$$

或者可以写成

$$\boldsymbol{U}_j^{n+1} - \boldsymbol{U}_j^n + \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}[(\boldsymbol{E}_{j+1}^{n+1} - \boldsymbol{E}_{j+1}^n) - (\boldsymbol{E}_{j-1}^{n+1} - \boldsymbol{E}_{j-1}^n)] =$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}(\boldsymbol{E}_{j+1}^n - \boldsymbol{E}_{j-1}^n)$$

由于 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{U})$,由 Taylor 展开式得

$$\boldsymbol{E}_j^{n+1} = \boldsymbol{E}_j^n + \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)_j^n(\boldsymbol{U}_j^{n+1} - \boldsymbol{U}_j^n) + O(\Delta t^2)$$

并引进符号

$$\delta \boldsymbol{U}_j^{n+1} \equiv \boldsymbol{U}_j^{n+1} - \boldsymbol{U}_j^n \qquad (3.3.2)$$

于是有

$$\delta \boldsymbol{U}_j^{n+1} + \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}(\boldsymbol{A}_{j+1}^n \delta \boldsymbol{U}_{j+1}^{n+1} - \boldsymbol{A}_{j-1}^n \delta \boldsymbol{U}_{j-1}^{n+1}) =$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}(\boldsymbol{E}_{j+1}^n - \boldsymbol{E}_{j-1}^n) \qquad (3.3.3)$$

格式(3.3.3)存在如下三个不足之处。

(1) 对于方程(3.3.1)的线性模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const}$$

可以证明,该格式是中性稳定的,即其误差放大因子 $|G| = 1$。

(2) 数值试验表明,若流场无激波,则定常数值解出现奇偶失联波动。

(3) 数值试验表明,若流场有激波,则在激波附近数值解会出现非物理的虚假波动。

先不考虑激波,即仅研究无激波的流动。为了克服上述前两个不足,采取如下两个措施[6]。

(1) 在差分方程(3.3.3)的右端附加如下四阶耗散项

$$-\varepsilon_e^{(4)}(U_{j+2}^n-4U_{j+1}^n+6U_j^n-4U_{j-1}^n+U_{j-2}^n)$$

目的在于避免定常数值解中出现奇偶失联波动并增强格式稳定性。这样，式(3.3.3)变为

$$-\frac{\Delta t}{4\Delta x}A_{j-1}^n\delta U_{j-1}^{n+1}+\delta U_j^{n+1}+\frac{\Delta t}{4\Delta x}A_{j+1}^n\delta U_{j+1}^{n+1}=R_j^n \tag{3.3.4}$$

式中

$$R_j^n=-\frac{\Delta t}{2\Delta x}(E_{j+1}^n-E_{j-1}^n)-\varepsilon_e^{(4)}(U_{j+2}^n-4U_{j+1}^n+6U_j^n-4U_{j-1}^n+U_{j-2}^n) \tag{3.3.5}$$

(2)式(3.3.4)是一个三对角块矩阵方程，一般用块追赶法求解。为了保证矩阵追赶过程中的稳定性，在式(3.3.4)左端附加如下二阶耗散项

$$-\varepsilon_i(\delta U_{j+1}^{n+1}-2\delta U_j^{n+1}+\delta U_{j-1}^{n+1})$$

这样，式(3.3.4)变为

$$\hat{A}_j^n\delta U_{j-1}^{n+1}+\hat{B}_j^n\delta U_j^{n+1}+\hat{C}_j^n\delta U_{j+1}=R_j^n \tag{3.3.6}$$

$$(j=2,3,\cdots,J-1)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\hat{A}_j^n&=-\frac{\Delta t}{4\Delta x}A_{j-1}^n-\varepsilon_iI\\\hat{B}_j^n&=(1+2\varepsilon_i)I\\\hat{C}_j^n&=\frac{\Delta t}{4\Delta x}A_{j+1}^n-\varepsilon_iI\end{aligned}\right\} \tag{3.3.7}$$

若在左边界($j=1$)处规定如下边界条件

$$U_1=f(\text{已知})$$

则有

$$\delta U_1^{n+1}=0 \tag{3.3.8}$$

若在右边界($j=J$)处规定如下边界条件

$$\frac{\partial U}{\partial x}=0$$

则有

$$\delta U_{J-1}^{n+1} = \delta U_J^{n+1} \tag{3.3.9}$$

将式(3.3.6),式(3.3.8)和式(3.3.9)合在一起,将有

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & & \mathbf{0} & \\ \hat{A}_2^n & \hat{B}_2^n & \hat{C}_2^n & & & \\ & \hat{A}_3^n & \hat{B}_3^n & \hat{C}_3^n & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \hat{A}_{J-1}^n & \hat{B}_{J-1}^n & \hat{C}_{J-1}^n \\ & & & & -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta U_1^{n+1} \\ \delta U_2^{n+1} \\ \delta U_3^{n+1} \\ \vdots \\ \delta U_{J-1}^{n+1} \\ \delta U_J^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R_2^n \\ R_3^n \\ \vdots \\ R_{J-1}^n \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.10}$$

用块追赶法求解这个三对角块矩阵方程,即可求出 δU_j^{n+1} $(j=1,2,\cdots,J-1,J)$。

下面来讨论待定参数 $\varepsilon_e^{(4)}$ 和 ε_i 的选择。

Beam-Warming 采用数值实验的方法来选择 $\varepsilon_e^{(4)}$ 和 ε_i。很多文献建议 $\varepsilon_e^{(4)}=0.1$,$\varepsilon_i=0.1\sim0.6$。

再介绍另一种选择 $\varepsilon_e^{(4)}$ 和 ε_i 的方法。先讨论 $\varepsilon_e^{(4)}$ 的选取。$-\varepsilon_e^{(4)}$ 是附加的人工四阶耗散项的系数,在对应的线性标量模型方程的情况下,要求解如下方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = -\varepsilon_e^{(4)}\frac{\Delta x^4}{\Delta t}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \tag{3.3.11}$$

若采用时间分裂法求解上方程,则相当于依次求解以下两个方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\varepsilon_e^{(4)}\frac{\Delta x^4}{\Delta t}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \tag{3.3.12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3.3.13}$$

现在来研究方程(3.3.12)。由 Taylor 展开得

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n + \cdots = u_j^n - \varepsilon_e^{(4)}\Delta x^4\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_j^n + \cdots =$$
$$\left[\left(1 - \varepsilon_e^{(4)}\Delta x^4\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)u\right]_j^n + \cdots =$$
$$\left[\left(1 - \sqrt{\varepsilon_e^{(4)}}\Delta x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(1 + \sqrt{\varepsilon_e^{(4)}}\Delta x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u\right]_j^n + \cdots$$

由此可得

由此可得

$$\overline{\overline{u_j^n}} = \left[\left(1 + \sqrt{\varepsilon_e^{(4)}}\Delta x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u\right]_j^n$$

$$u_j^{n+1} = \left[\left(1 - \sqrt{\varepsilon_e^{(4)}}\Delta x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\overline{\overline{u}}\right]_j^n$$

即

$$\overline{\overline{u_j^n}} = u_j^n + \frac{K}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \qquad (3.3.14)$$

$$u_j^{n+1} = \overline{\overline{u_j^n}} - \frac{K}{2}(\overline{\overline{u_{j+1}^n}} - 2\overline{\overline{u_j^n}} + \overline{\overline{u_{j-1}^n}}) \qquad (3.3.15)$$

式中

$$K \equiv 2\sqrt{\varepsilon_e^{(4)}} \qquad (3.3.16)$$

与式(3.1.17)相比较知，式(3.3.14)和式(3.3.15)实质上分别相当于一个正滤波和一个反滤波。再参照式(3.2.4)中的经验知，K 应取为 1/4，于是

$$\varepsilon_e^{(4)} = \frac{1}{64} \qquad (3.3.17)$$

下面再来研究 ε_i 的选择问题。

由后面 3.5 节中的稳定性分析知，当 $\varepsilon_i \geqslant 2\varepsilon_e^{(4)}$ 时，格式将是无条件稳定的。因此选择 ε_i 的条件是

$$\varepsilon_i \geqslant \frac{1}{32} \qquad (3.3.18)$$

3.3.2 二维流动情形

二维非定常 Euler 方程是

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y} = 0 \qquad (3.3.19)$$

采用 Crank-Nicolson 格式，得

$$\boldsymbol{U}_{ij}^{n+1} = \boldsymbol{U}_{ij}^n - \frac{\Delta t}{2}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}^n}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{E}^{n+1}}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}^n}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{F}^{n+1}}{\partial y}\right)\Big]_{ij}+\mathrm{O}(\Delta t^3)$$

由此可得

$$\boldsymbol{U}_{ij}^{n+1}-\boldsymbol{U}_{ij}^{n}+\frac{\Delta t}{2}\left[\frac{\partial(\boldsymbol{E}^{n+1}-\boldsymbol{E}^n)}{\partial x}+\frac{\partial(\boldsymbol{F}^{n+1}-\boldsymbol{F}^n)}{\partial y}\right]_{ij}=$$

$$-\Delta t\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}^n}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}^n}{\partial y}\right)_{ij}+\mathrm{O}(\Delta t^3)$$

或者

$$\delta \boldsymbol{U}_{ij}^{n+1}+\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}^n\delta \boldsymbol{U}^{n+1}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{B}^n\delta \boldsymbol{U}^{n+1}\right)_{ij}=$$

$$-\Delta t\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}^n}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}^n}{\partial y}\right)_{ij}+\mathrm{O}(\Delta t^3)$$

亦可写成

$$\left\{\left(\boldsymbol{I}+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}^n+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{B}^n\right)\delta \boldsymbol{U}^{n+1}\right\}_{ij}=$$

$$-\Delta t\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}^n}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}^n}{\partial y}\right)_{ij}+\mathrm{O}(\Delta t^3)$$

由近似因式分解可得

$$\left\{\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}\Delta t\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}^n\right)\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}\Delta t\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{B}^n\right)\delta \boldsymbol{U}^{n-1}\right\}_{ij}=$$

$$-\Delta t\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}^n}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}^n}{\partial y}\right)_{ij}+\mathrm{O}(\Delta t^3) \qquad (3.3.20)$$

与一维流动情况类似，格式(3.3.20)存在如下三个不足之处。

(1) 通过稳定性分析可以证明，该格式的增长矩阵$|\boldsymbol{G}|=1$。

(2) 式(3.3.20)的定常数值解在光滑区会出现奇偶失联振荡。

(3) 在激波附近数值解会出现非物理的虚假波动。

下面仅研究无激波流动情况。与一维流动情形一样，为了克服上述前两个缺点，将式(3.3.20)作如下修改

$$\left\{\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}\Delta t\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}^n-\varepsilon_i\Delta x^2\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\times\right.$$

$$
\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}\Delta t\,\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{B}^{n}-\varepsilon_{i}\Delta y^{2}\,\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}\right)\delta\boldsymbol{U}^{n+1}\Big|_{ij}=
$$

$$
\Delta t\left\{-\left(\frac{\partial\boldsymbol{E}^{n}}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{F}^{n}}{\partial y}\right)-\varepsilon_{e}^{(4)}\,\frac{\Delta x^{4}}{\Delta t}\,\frac{\partial^{4}\boldsymbol{U}^{n}}{\partial x^{4}}-\right.
$$

$$
\left.\varepsilon_{e}^{(4)}\,\frac{\Delta y^{4}}{\Delta t}\,\frac{\partial^{4}\boldsymbol{U}^{n}}{\partial y^{4}}\right\}\Big|_{ij}\equiv\boldsymbol{R}_{ij}^{n}\tag{3.3.21}
$$

上式可写成

$$
\left\{\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}\Delta t\,\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}^{n}-\varepsilon_{i}\Delta x^{2}\,\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\right)\overline{\delta\boldsymbol{U}^{n+1}}\right\}\Big|_{ij}=\boldsymbol{R}_{ij}^{n}
$$

$$
\left\{\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}\Delta t\,\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{B}^{n}-\varepsilon_{i}\Delta y^{2}\,\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}\right)\delta\boldsymbol{U}^{n+1}\right\}\Big|_{ij}=\overline{\delta\boldsymbol{U}_{ij}^{n+1}}
$$

写成差分方程为

$$
\left.\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{A}}_{ij}^{n}\,\overline{\delta\boldsymbol{U}_{i-1,j}^{n+1}}+\hat{\boldsymbol{B}}_{ij}^{n}\,\overline{\delta\boldsymbol{U}_{ij}^{n+1}}+\hat{\boldsymbol{C}}_{ij}^{n}\,\overline{\delta\boldsymbol{U}_{i+1,j}^{n+1}}=\boldsymbol{R}_{ij}^{n}\\
&\hat{\hat{\boldsymbol{A}}}_{ij}^{n}\delta\boldsymbol{U}_{i,j-1}^{n+1}+\hat{\hat{\boldsymbol{B}}}_{ij}^{n}\delta\boldsymbol{U}_{ij}^{n+1}+\hat{\hat{\boldsymbol{C}}}_{ij}^{n}\delta\boldsymbol{U}_{i,j+1}^{n+1}=\overline{\delta\boldsymbol{U}_{ij}^{n+1}}
\end{aligned}\right\}\tag{3.3.22}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{A}}_{ij}^{n}&=-\frac{\Delta t}{4\Delta x}\boldsymbol{A}_{i-1,j}^{n}-\varepsilon_{i}\boldsymbol{I}\\
\hat{\boldsymbol{B}}_{ij}^{n}&=(1+2\varepsilon_{i})\boldsymbol{I}\\
\hat{\boldsymbol{C}}_{ij}^{n}&=\frac{\Delta t}{4\Delta x}\boldsymbol{A}_{i+1,j}^{n}-\varepsilon_{i}\boldsymbol{I}\\
\hat{\hat{\boldsymbol{A}}}_{ij}^{n}&=-\frac{\Delta t}{4\Delta y}\boldsymbol{B}_{i,j-1}^{n}-\varepsilon_{i}\boldsymbol{I}\\
\hat{\hat{\boldsymbol{B}}}_{ij}^{n}&=(1+2\varepsilon_{i})\boldsymbol{I}\\
\hat{\hat{\boldsymbol{C}}}_{ij}^{n}&=\frac{\Delta t}{4\Delta y}\boldsymbol{B}_{i,j+1}^{n}-\varepsilon_{i}\boldsymbol{I}
\end{aligned}
$$

式(3.3.22)包含两个三对角块矩阵方程,可用块追赶法求解。

3.3.3 三维流动情形

三维非定常 Euler 方程是

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial z}=0 \tag{3.3.23}$$

与二维流动情形一样,若采用 Crank-Nicolson 格式,并作近似因式分解,可得

$$\left(\boldsymbol{I}+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}^n\right)\left(\boldsymbol{I}+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{B}^n\right)\times$$

$$\left(\boldsymbol{I}+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{C}^n\right)\delta\boldsymbol{U}^{n+1}=\boldsymbol{R}^n \tag{3.3.24}$$

式中

$$\boldsymbol{R}^n=-\Delta t\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}^n}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}^n}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{G}^n}{\partial z}\right) \tag{3.3.25}$$

此格式存在如下三个不足之处。

(1) 该格式是无条件不稳定的。现说明如下。今研究相应的线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\frac{\partial u}{\partial z}=0 \tag{3.3.26}$$

式中,a,b,c 均为常数。

采用 Crank-Nicolson 格式,并作近似因式分解,得

$$\left\{\left(1+\frac{a\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(1+\frac{b\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(1+\frac{c\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial z}\right)\delta u^{n+1}\right\}_{ijk}=$$

$$-\left(a\frac{\partial u^n}{\partial x}+b\frac{\partial u^n}{\partial y}+c\frac{\partial u^n}{\partial z}\right)_{ijk}\Delta t$$

展开后得

$$\left\{\left[1+\frac{1}{2}a\Delta t\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}b\Delta t\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2}c\Delta t\frac{\partial}{\partial z}+\right.\right.$$

$$\frac{1}{4}ab\Delta t^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{1}{4}bc\Delta t^2\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+$$

$$\left.\left.\frac{1}{4}ac\Delta t^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+\frac{1}{8}abc\Delta t^3\frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}\right]\delta u^{n+1}\right\}_{ijk}=$$

$$-\Delta t\left(a\frac{\partial u^n}{\partial x}+b\frac{\partial u^n}{\partial y}+c\frac{\partial u^n}{\partial z}\right)_{ijk}$$

将上式中的各导数换成中心差商,即可得到相应的差分格式。

然后应用 Von Neumann 稳定性分析方法，可得该格式的误差放大因子 $G=\dfrac{u_{ijk}^{n+1}}{u_{ijk}^{n}}$ 的如下式子

$$|G|^2=\frac{\left[1-\frac{1}{4}(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)\right]^2+\frac{1}{4}\left[(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)+\frac{1}{4}\sigma_x\sigma_y\sigma_z\right]^2}{\left[1-\frac{1}{4}(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)\right]^2+\frac{1}{4}\left[(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)-\frac{1}{4}\sigma_x\sigma_y\sigma_z\right]^2} \tag{3.3.27}$$

式中

$$\sigma_x=\frac{a\Delta t}{\Delta x}\sin(m\Delta x)$$

$$\sigma_y=\frac{b\Delta t}{\Delta y}\sin(n\Delta y)$$

$$\sigma_z=\frac{c\Delta t}{\Delta z}\sin(l\Delta z)$$

令

$$f\equiv\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z+\frac{1}{4}\sigma_x\sigma_y\sigma_z\right)^2-\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z-\frac{1}{4}\sigma_x\sigma_y\sigma_z\right)^2-(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\sigma_x\sigma_y\sigma_z$$

当 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ 分别大于零，或 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ 分别小于零时都有 $f>0$，于是由式(3.3.27)知，在这两种情况下均有 $|G|>1$。另一方面，无论 $\Delta t,\Delta x,\Delta y,\Delta z$ 怎样选取，上述两种情况总是一定会出现的。从而证明了格式{(3.3.24)，(3.3.25)}是无条件不稳定的。

(2) 它不能抑制光滑区定常数值解的奇偶失联振荡。

(3) 它不能抑制激波附近数值解的非物理虚假波动。

下面仅针对无激波流动情况来改进上述格式。为了克服无条件不稳定这个严重缺点，以及抑制光滑区定常数值解的奇偶失联振荡，将格式{(3.3.24)，(3.3.25)}修改为

$$\left\{\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}\Delta t\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}^n-\epsilon_i\Delta x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}\Delta t\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{B}^n-\epsilon_i\Delta y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\times\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}\Delta t\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{C}^n-\epsilon_i\Delta z^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\delta\boldsymbol{U}^{n+1}\right\}_{ijk}=\boldsymbol{R}_{ijk}^n \tag{3.3.28}$$

式中

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{ijk}^{n} = & -\Delta t\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}^{n}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}^{n}}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{G}^{n}}{\partial z}\right)_{ijk} - \\
& \varepsilon_{e}^{(4)}\left(\Delta x^{4} \frac{\partial^{4} \boldsymbol{U}^{n}}{\partial x^{4}}+\Delta y^{4} \frac{\partial^{4} \boldsymbol{U}^{n}}{\partial y^{4}}+\Delta z^{4} \frac{\partial^{4} \boldsymbol{U}^{n}}{\partial z^{4}}\right)_{ijk}
\end{aligned}
\tag{3.3.29}
$$

将上式中的各个导数分别用相应的中心差商替换,然后可进一步化为三个三对角块矩阵方程,依次用块追赶法求解。

大量数值试验的经验表明,ε_i 和 $\varepsilon_e^{(4)}$ 作如下选择是合适的:$\varepsilon_e^{(4)}=0.1$,$\varepsilon_i=1\sim 6$。

这就是 Beam-Warming 隐式耗散格式,它不具备抑制激波附近数值解的非物理虚假波动的能力。

3.4 Jameson 隐式耗散格式

为了能抑制激波附近数值解的虚假波动,Jameson[5] 改进了 Beam-Warming 隐式耗散格式。

对于二维和三维流动问题,其算式仍分别为式(3.3.21)和式(3.3.28),但在 $\boldsymbol{R}^n$ 的表达式中分别都增加了相应的二阶耗散项,以便抑制激波附近数值解的波动。

在二维流动情况

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{ij}^{n} = & -\Delta t\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}^{n}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}^{n}}{\partial y}\right)_{ij} + \\
& \left(\varepsilon_{ei}^{(2)} \Delta x^{2} \frac{\partial^{2} \boldsymbol{U}^{n}}{\partial x^{2}}+\varepsilon_{ej}^{(2)} \Delta y^{2} \frac{\partial^{2} \boldsymbol{U}^{n}}{\partial y^{2}}\right)_{ij} - \\
& \left(\varepsilon_{ei}^{(4)} \Delta x^{4} \frac{\partial^{4} \boldsymbol{U}^{n}}{\partial x^{4}}+\varepsilon_{ej}^{(4)} \Delta y^{4} \frac{\partial^{4} \boldsymbol{U}^{n}}{\partial y^{4}}\right)_{ij}
\end{aligned}
\tag{3.4.1}
$$

在三维流动情况

$$
\boldsymbol{R}_{ijk}^{n} = -\Delta t\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}^{n}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}^{n}}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{G}^{n}}{\partial z}\right)_{ijk} +
$$

$$\left(\varepsilon_{ei}^{(2)}\Delta x^2\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}^n}{\partial x^2}+\varepsilon_{ej}^{(2)}\Delta y^2\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}^n}{\partial y^2}+\varepsilon_{ek}^{(2)}\Delta z^2\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}^n}{\partial z^2}\right)_{ijk}-$$

$$\left(\varepsilon_{ei}^{(4)}\Delta x^4\frac{\partial^4 \boldsymbol{U}^n}{\partial x^4}+\varepsilon_{ej}^{(4)}\Delta y^4\frac{\partial^4 \boldsymbol{U}^n}{\partial y^4}+\varepsilon_{ek}^{(4)}\Delta z^4\frac{\partial^4 \boldsymbol{U}^n}{\partial z^4}\right)_{ijk}$$

(3.4.2)

式中

$$\varepsilon_{ei}^{(2)}=K_2\theta_i;\quad \varepsilon_{ej}^{(2)}=K_2\theta_j;\quad \varepsilon_{ek}^{(2)}=K_2\theta_k;$$

$$\varepsilon_{ei}^{(4)}=\max\{0,(K_4-\varepsilon_{ei}^{(2)})\};\quad \varepsilon_{ej}^{(4)}=\max\{0,(K_4-\varepsilon_{ej}^{(2)})\};$$

$$\varepsilon_{ek}^{(4)}=\max\{0,(K_4-\varepsilon_{ek}^{(2)})\};$$

$$\theta_i=\left|\frac{p_{i+1,j,K}-2p_{ijK}+p_{i-1,j,K}}{p_{i+1,j,K}+2p_{ijK}+p_{i-1,j,K}}\right|;$$

$$\theta_j=\left|\frac{p_{i,j+1,K}-2p_{ijK}+p_{i,j-1,K}}{p_{i,j+1,K}+2p_{ijK}+p_{i,j-1,K}}\right|;$$

$$\theta_K=\left|\frac{p_{i,j,K+1}-2p_{ijK}+p_{i,j,K-1}}{p_{i,j,K+1}+2p_{ijK}+p_{i,j,K-1}}\right|。$$

大量数值试验的经验表明，$K_2=\dfrac{1}{4}$，$K_4=\dfrac{1}{128}$是合适的，而 ε_i 一般选得比较大，例如 10 倍的 K_2。

3.5 混合反扩散格式[7]

为简单起见，在这一节中，仍然以 Euler 方程的数值求解为例说明之。此时，支配方程为

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial z}=0 \qquad (3.5.1)$$

3.5.1 时间分裂法

可以证明，求解方程(3.5.1)，可采用时间分裂法按如下方式进行

$$U^{n+1} = L_x\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)L_y\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)L_z(\Delta t)L_y\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)L_x\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)U^n \tag{3.5.2}$$

式中 L_x, L_y, L_z 分别是方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} = 0 \tag{3.5.3}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y} = 0 \tag{3.5.4}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial z} = 0 \tag{3.5.5}$$

的差分算子。关键问题是用什么耗散格式来求解这三个方程。因为这三个方程在性质上是相同的，所以下面只需研究其中一个方程，例如方程(3.5.3)的求解就可以了。

可以证明，若上述三个方程中的每一个方程都采用 Crank-Nicolson 格式离散，则五步格式(3.5.2)是中性稳定的，即其放大矩阵的范数 $|G| = 1$。它既不能抑制光滑区数值解的奇偶失联振荡，也不具备抑制激波附近数值解波动的能力。

3.5.2 混合反扩散方法

为了能够光滑地捕捉激波，很自然的想法是可以采用一阶迎风格式来求解方程(3.5.3)。为此将方程(3.5.3)中的通量 $\boldsymbol{E}$ 进行分裂

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^+ + \boldsymbol{E}^-$$

式中

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{E}^+ = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{E}^- = \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{U};$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T};\ \boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^+\boldsymbol{T};\ \boldsymbol{A}^- = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^-\boldsymbol{T}。$$

其中 $\boldsymbol{A} = \partial \boldsymbol{E}/\partial \boldsymbol{U}$ 是 $\boldsymbol{E}$ 的 Jacobian 矩阵；$\boldsymbol{\Lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征对角矩阵；$\boldsymbol{T}^{-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的右特征向量矩阵；$\boldsymbol{T}$ 是 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 的逆矩阵，也是 $\boldsymbol{A}$ 的左特征向量矩阵。设 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的五个特征值，则

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$$

若按 Steger-Warming 的分裂方法，则有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{+} = \operatorname{diag}\Big(&\frac{\lambda_1 + |\lambda_1|}{2}, \frac{\lambda_2 + |\lambda_2|}{2}, \\
&\frac{\lambda_3 + |\lambda_3|}{2}, \frac{\lambda_4 + |\lambda_4|}{2}, \frac{\lambda_5 + |\lambda_5|}{2}\Big) \\
\boldsymbol{A}^{-} = \operatorname{diag}\Big(&\frac{\lambda_1 - |\lambda_1|}{2}, \frac{\lambda_2 - |\lambda_2|}{2}, \\
&\frac{\lambda_3 - |\lambda_3|}{2}, \frac{\lambda_4 - |\lambda_4|}{2}, \frac{\lambda_5 - |\lambda_5|}{2}\Big)
\end{aligned}
$$

于是可将方程(3.5.3)改写为

$$
\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{E}^{+}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{E}^{-}}{\partial x} = 0
$$

时间方向采用梯形公式离散，空间方向则根据信号传播的特征进行离散，可得

$$
\boldsymbol{U}_j^{n+1} = \boldsymbol{U}_j^n - \frac{\Delta t}{2}\left\{\left(\frac{\nabla \boldsymbol{E}_j^{+n}}{\Delta x} + \frac{\nabla \boldsymbol{E}_j^{+n+1}}{\Delta x}\right) + \left(\frac{\Delta \boldsymbol{E}_j^{-n}}{\Delta x} + \frac{\Delta \boldsymbol{E}_j^{-n+1}}{\Delta x}\right)\right\}
$$

这里，Δ 表示一阶前向差分，而 ∇ 表示一阶后向差分。上式可以被改写为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}_j^{n+1} = \boldsymbol{U}_j^n - \frac{1}{4}\Delta t \Big\{ &\left(\frac{\Delta \boldsymbol{E}_j^{+n}}{\Delta x} + \frac{\nabla \boldsymbol{E}_j^{+n}}{\Delta x}\right) + \left(\frac{\Delta \boldsymbol{E}_j^{+n+1}}{\Delta x} + \frac{\nabla \boldsymbol{E}_j^{+n+1}}{\Delta x}\right) + \\
&\left(\frac{\Delta \boldsymbol{E}_j^{-n}}{\Delta x} + \frac{\nabla \boldsymbol{E}_j^{-n}}{\Delta x}\right) + \left(\frac{\Delta \boldsymbol{E}_j^{-n+1}}{\Delta x} + \frac{\nabla \boldsymbol{E}_j^{-n+1}}{\Delta x}\right)\Big\} + \\
&\frac{1}{4}\Delta t \left\{\left(\frac{\Delta \boldsymbol{E}_j^{+n}}{\Delta x} - \frac{\nabla \boldsymbol{E}_j^{+n}}{\Delta x}\right) + \left(\frac{\Delta \boldsymbol{E}_j^{+n+1}}{\Delta x} - \frac{\nabla \boldsymbol{E}_j^{+n+1}}{\Delta x}\right)\right\} - \\
&\frac{1}{4}\Delta t \left\{\left(\frac{\Delta \boldsymbol{E}_j^{-n}}{\Delta x} - \frac{\nabla \boldsymbol{E}_j^{-n}}{\Delta x}\right) + \left(\frac{\Delta \boldsymbol{E}_j^{-n+1}}{\Delta x} - \frac{\nabla \boldsymbol{E}_j^{-n+1}}{\Delta x}\right)\right\} = \\
&\boldsymbol{U}_j^n - \frac{\Delta t}{4\Delta x}\{(\boldsymbol{E}_{j+1}^n - \boldsymbol{E}_{j-1}^n) + (\boldsymbol{E}_{j+1}^{n+1} - \boldsymbol{E}_{j-1}^{n+1})\} + \\
&\frac{\Delta t}{4\Delta x}\{(\boldsymbol{A}_{j+1}^{+n}\boldsymbol{U}_{j+1}^n - 2\boldsymbol{A}_j^{+n}\boldsymbol{U}_j^n + \boldsymbol{A}_{j-1}^{+n}\boldsymbol{U}_{j-1}^n) + \\
&(\boldsymbol{A}_{j+1}^{+n+1}\boldsymbol{U}_{j+1}^{n+1} - 2\boldsymbol{A}_j^{+n+1}\boldsymbol{U}_j^{n+1} + \boldsymbol{A}_{j-1}^{+n+1}\boldsymbol{U}_{j-1}^{n+1})\} - \\
&\frac{\Delta t}{4\Delta x}\{(\boldsymbol{A}_{j+1}^{-n}\boldsymbol{U}_{j+1}^n - 2\boldsymbol{A}_j^{-n}\boldsymbol{U}_j^n + \boldsymbol{A}_{j-1}^{-n}\boldsymbol{U}_{j-1}^n) +
\end{aligned}
$$

$$(\boldsymbol{A}_{j+1}^{-n+1}\boldsymbol{U}_{j+1}^{n+1} - 2\boldsymbol{A}_{j}^{-n+1}\boldsymbol{U}_{j}^{n+1} + \boldsymbol{A}_{j-1}^{-n+1}\boldsymbol{U}_{j-1}^{n+1})\} =$$ [①]

$$\boldsymbol{U}_j^n - \frac{\Delta t}{4\Delta x}\{(\boldsymbol{E}_{j+1}^n - \boldsymbol{E}_{j-1}^n) + (\boldsymbol{E}_{j+1}^{n+1} - \boldsymbol{E}_{j-1}^{n+1})\} +$$

$$\frac{\Delta t}{4\Delta x}\boldsymbol{A}_j^{+n}\{(\boldsymbol{U}_{j+1}^n - 2\boldsymbol{U}_j^n + \boldsymbol{U}_{j-1}^n) + (\boldsymbol{U}_{j+1}^{n+1} - 2\boldsymbol{U}_j^{n+1} + \boldsymbol{U}_{j-1}^{n+1})\} -$$

$$\frac{\Delta t}{4\Delta x}\boldsymbol{A}_j^{-n}\{(\boldsymbol{U}_{j+1}^n - 2\boldsymbol{U}_j^n + \boldsymbol{U}_{j-1}^n) + (\boldsymbol{U}_{j+1}^{n+1} - 2\boldsymbol{U}_j^{n+1} + \boldsymbol{U}_{j-1}^{n+1})\}$$

因此，上式可写为

$$\boldsymbol{U}_j^{n+1} = \boldsymbol{U}_j^n - \frac{\Delta t}{4\Delta x}\{(\boldsymbol{E}_{j+1}^n - \boldsymbol{E}_{j-1}^n) + (\boldsymbol{E}_{j+1}^{n+1} - \boldsymbol{E}_{j-1}^{n+1})\} +$$

$$\frac{1}{4}Q\{(\boldsymbol{U}_{j+1}^n - 2\boldsymbol{U}_j^n + \boldsymbol{U}_{j-1}^n) + (\boldsymbol{U}_{j+1}^{n+1} - 2\boldsymbol{U}_j^{n+1} + \boldsymbol{U}_{j-1}^{n+1})\} \tag{3.5.6}$$

式中 $Q = \frac{\Delta t}{\Delta x}|\boldsymbol{A}^n|_j$，$|\boldsymbol{A}^n| = \boldsymbol{A}^{+n} - \boldsymbol{A}^{-n}$。

由此可知，上述一阶迎风格式相当于在二阶的 Crank-Nicolson 格式上附加了一个二阶耗散项。

一阶迎风格式(3.5.6)可以用来光滑地捕捉激波，因此在激波附近使用它是合适的。但在激波以外的区域中，希望能采用二阶精度的格式，因此格式(3.5.6)的精度就嫌不够了。为此采用如下混合格式

$$\boldsymbol{U}_j^{n+1} = \{[(1-\theta_j)L_2 + \theta_j L_1]u^n\}_j \tag{3.5.7}$$

式中 L_1 和 L_2 分别是方程(3.5.3)的一阶和二阶差分算子；θ_j 是开关函数，在激波处 $\theta_j = 1$，而在激波以外的区域中 $\theta_j = 0$。这样的混合格式(3.5.7)在激波处是一阶精度的，而在激波以外的区域中则具有二阶精度。

以下的表示式可近似地满足上面关于开关函数的要求

---

① 这里作了如下近似：$\boldsymbol{A}_{j+1}^{+n} \approx \boldsymbol{A}_{j-1}^{+n} \approx \boldsymbol{A}_{j+1}^{+n+1} \approx \boldsymbol{A}_j^{+n+1} \approx \boldsymbol{A}_{j-1}^{+n+1} \approx \boldsymbol{A}_j^{+n}$ 以及 $\boldsymbol{A}_{j+1}^{-n} \approx \boldsymbol{A}_{j-1}^{-n} \approx \boldsymbol{A}_{j+1}^{-n+1} \approx \boldsymbol{A}_j^{-n+1} \approx \boldsymbol{A}_{j-1}^{-n+1} \approx \boldsymbol{A}_j^{-n}$。但这种近似仍保持格式具有空间一阶精度。

$$\theta_j = \left| \frac{p_{j+1}^n - 2p_j^n + p_{j-1}^n}{p_{j+1}^n + 2p_j^n + p_{j-1}^n} \right| \tag{3.5.8}$$

一阶迎风格式(3.5.6)可用来定义差分算子 L_1。剩下的问题是如何确定二阶差分算子 L_2。为此,采用反扩散方法来确定 L_2。其基本思想如下:为了得到二阶格式,希望将上述一阶迎风格式(3.5.6)中的二阶格式黏性项反掉并同时产生具有负系数的四阶耗散项,以便能够抑制光滑区中数值解的奇偶失联振荡。

经研究发现,只要在式(3.5.6)中减去如下二阶耗散项

$$\frac{Q}{2}(\overline{\boldsymbol{U}_{j+1}^n} - 2\,\overline{\boldsymbol{U}_j^n} + \overline{\boldsymbol{U}_{j-1}^n})$$

式中

$$\overline{\boldsymbol{U}_j^n} = (1-K)\boldsymbol{U}_j^n + \frac{K}{2}(\boldsymbol{U}_{j+1}^n + \boldsymbol{U}_{j-1}^n) =$$

$$\boldsymbol{U}_j^n + \frac{K}{2}(\boldsymbol{U}_{j+1}^n - 2\boldsymbol{U}_j^n + \boldsymbol{U}_{j-1}^n), 0 \leqslant K \leqslant 1$$

即可达到上述目的。事实上,这样得到的差分格式是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}_j^{n+1} = \boldsymbol{U}_j^n - \frac{\Delta t}{4\Delta x}\{(\boldsymbol{E}_{j+1}^n - \boldsymbol{E}_{j-1}^n) + (\boldsymbol{E}_{j+1}^{n+1} - \boldsymbol{E}_{j-1}^{n+1})\} + \\ \frac{Q}{4}\{(\boldsymbol{U}_{j+1}^n - 2\boldsymbol{U}_j^n + \boldsymbol{U}_{j-1}^n) + (\boldsymbol{U}_{j+1}^{n+1} - 2\boldsymbol{U}_j^{n+1} + \boldsymbol{U}_{j-1}^{n+1})\} - \\ \frac{Q}{2}(\boldsymbol{U}_{j+1}^n - 2\boldsymbol{U}_j^n + \boldsymbol{U}_{j-1}^n) - \\ \frac{1}{4}KQ(\boldsymbol{U}_{j+2}^n - 4\boldsymbol{U}_{j+1}^n + 6\boldsymbol{U}_j^n - 4\boldsymbol{U}_{j-1}^n + \boldsymbol{U}_{j-2}^n) \end{aligned} \tag{3.5.9}$$

因为

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{U}_{j+1}^n - 2\boldsymbol{U}_j^n + \boldsymbol{U}_{j-1}^n) + (\boldsymbol{U}_{j+1}^{n+1} - 2\boldsymbol{U}_j^{n+1} + \boldsymbol{U}_{j-1}^{n+1}) = \\ 2(\boldsymbol{U}_{j+1}^n - 2\boldsymbol{U}_j^n + \boldsymbol{U}_{j-1}^n) + O(\Delta x^2 \Delta t) \end{aligned}$$

故格式(3.5.9)的精度是二阶,因为它与二阶 Crank-Nicolson 格式之差是三阶小量和四阶小量。并且格式(3.5.9)具有负系数的四阶耗散项。

将式(3.5.9)表示成 $\boldsymbol{U}_j^{n+1} = L_2\boldsymbol{U}_j^n$,就是我们所需要的二阶差

分算子 L_2。

将式(3.5.6)和式(3.5.9)代入式(3.5.7)得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}_j^{n+1} = \boldsymbol{U}_j^n - \frac{\Delta t}{4\Delta x}\{(\boldsymbol{E}_{j+1}^n - \boldsymbol{E}_{j-1}^n) + (\boldsymbol{E}_{j+1}^{n+1} - \boldsymbol{E}_{j-1}^{n+1})\} + \\
\frac{Q}{4}(\delta\boldsymbol{U}_{j+1}^{n+1} - 2\delta\boldsymbol{U}_j^{n+1} + \delta\boldsymbol{U}_{j-1}^{n+1}) + \\
\frac{1}{2}Q\theta_j(\boldsymbol{U}_{j+1}^n - 2\boldsymbol{U}_j^n + \boldsymbol{U}_{j-1}^n) - \\
\frac{1}{4}KQ(1-\theta_j)(\boldsymbol{U}_{j+2}^n - 4\boldsymbol{U}_{j+1}^n + 6\boldsymbol{U}_j^n - 4\boldsymbol{U}_{j-1}^n + \boldsymbol{U}_{j-2}^n)
\end{aligned}
$$

由于

$$
\boldsymbol{E}^{n+1} = \boldsymbol{E}^n + \boldsymbol{A}^n\delta\boldsymbol{U}^{n+1} + O(\Delta t^2)
$$

因此在保持精度不变的条件下,上式可改为

$$
\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{U}_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{4\Delta x}[\boldsymbol{A}_{j+1}^n\delta\boldsymbol{U}_{j+1}^{n+1} - \boldsymbol{A}_{j-1}^n\delta\boldsymbol{U}_{j-1}^n] - \\
\frac{1}{4}Q(\delta\boldsymbol{U}_{j+1}^{n+1} - 2\delta\boldsymbol{U}_j^{n+1} + \delta\boldsymbol{U}_{j-1}^{n+1}) = \\
-\frac{\Delta t}{2\Delta x}(\boldsymbol{E}_{j+1}^n - \boldsymbol{E}_{j-1}^n) + \frac{1}{2}Q\theta_j(\boldsymbol{U}_{j+1}^n - 2\boldsymbol{U}_j^n + \boldsymbol{U}_{j-1}^n) - \\
\frac{1}{4}KQ(1-\theta_j)(\boldsymbol{U}_{j+2}^n - 4\boldsymbol{U}_{j+1}^n + 6\boldsymbol{U}_j^n - 4\boldsymbol{U}_{j-1}^n + \boldsymbol{U}_{j-2}^n)
\end{aligned}
$$

定义

$$
\varepsilon_i \equiv \frac{1}{4}Q, \quad \varepsilon_e^{(2)} \equiv \frac{1}{2}Q\theta_j, \qquad \varepsilon_e^{(4)} \equiv \frac{1}{4}KQ(1-\theta_j)
$$

则可将上式写成

$$
\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{U}_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{4\Delta x}(\boldsymbol{A}_{j+1}^n\delta\boldsymbol{U}_{j+1}^{n+1} - \boldsymbol{A}_{j-1}^n\delta\boldsymbol{U}_{j-1}^{n+1}) - \\
\varepsilon_i(\delta\boldsymbol{U}_{j+1}^{n+1} - 2\delta\boldsymbol{U}_j^{n+1} + \delta\boldsymbol{U}_{j-1}^{n+1}) = \\
-\frac{\Delta t}{2\Delta x}(\boldsymbol{E}_{j+1}^n - \boldsymbol{E}_{j-1}^n) + \varepsilon_e^{(2)}(\boldsymbol{U}_{j+1}^n - 2\boldsymbol{U}_j^n + \boldsymbol{U}_{j-1}^n) - \\
\varepsilon_e^{(4)}(\boldsymbol{U}_{j+2}^n - 4\boldsymbol{U}_{j+1}^n + 6\boldsymbol{U}_j^n - 4\boldsymbol{U}_{j-1}^n + \boldsymbol{U}_{j-2}^n)
\end{aligned}
\tag{3.5.10}
$$

值得指出的是，式(3.5.10)是 Beam-Warming 隐式耗散格式、Jameson 隐式耗散格式和混合反扩散格式的统一表示式。区别仅在于系数 ε_i，$\varepsilon_e^{(2)}$ 和 $\varepsilon_e^{(4)}$ 的确定方法。对于 Beam-Warming 隐式耗散格式而言，$\varepsilon_e^{(2)}=0$，而 ε_i 和 $\varepsilon_e^{(4)}$ 都是人为选取的自由参数，是根据数值试验的经验选定的。对于 Jameson 隐式耗散格式和混合反扩散格式而言，ε_i，$\varepsilon_e^{(2)}$ 和 $\varepsilon_e^{(4)}$ 都是确定的参数，但确定的方法是不同的，对比如表 5-1 所示。

表 5-1　Jameson 隐式耗散格式与混合反扩散格式中的系数

Jameson 隐式耗散格式中的系数	混合反扩散格式中的系数
$\varepsilon_e^{(2)}=\frac{1}{4}\theta$	$\varepsilon_e^{(2)}=\frac{1}{2}\cdot Q\theta$
$\varepsilon_e^{(4)}=\max\left\{0,\left(\frac{1}{128}-\frac{1}{4}\theta\right)\right\}=\begin{cases}0, & \theta\geqslant\frac{1}{32}\\ \frac{1}{128}, & \theta\to 0\end{cases}$	$\varepsilon_e^{(4)}=\frac{1}{4}KQ(1-\theta)=\begin{cases}0, & \theta\to 1\\ \frac{1}{4}KQ, & \theta\to 0\end{cases}$
$\varepsilon_i=\frac{5}{2}$	$\varepsilon_i=\frac{1}{4}Q$

应该指出，根据下面将进行的稳定性分析，混合反扩散格式系数中出现的 K 被确定为 $\frac{1}{2}$。

上述混合反扩散格式是张涵信于 1982 年提出的[7]，它是含确定参数的中心型的非线性耗散格式，已成功地应用于大量的实际流动问题。

3.5.3　稳定性分析

现在来分析格式(3.5.10)的稳定性。为此研究线化模型方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$ 的相应格式。将式(3.5.10)中的向量 U 换成标量 u，并将矩阵 $\mathbf{A}$ 换成常数 a 而得到

$$
\begin{aligned}
&\delta u_j^{n+1}+\frac{\sigma}{4}(\delta u_{j+1}^{n+1}-\delta u_{j-1}^{n+1})-\\
&\varepsilon_i(\delta u_{j+1}^{n+1}-2\delta u_j^{n+1}+\delta u_{j-1}^{n+1})=\\
&-\frac{\sigma}{2}(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)+\varepsilon_e^{(2)}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)-\\
&\varepsilon_e^{(4)}(u_{j-2}^n-4u_{j+1}^n+6u_j^n-4u_{j-1}^n+u_{j-2}^n)
\end{aligned}
\tag{3.5.11}
$$

式中 $\sigma=\dfrac{a\Delta t}{\Delta x}$。

应用 Fourier 分析方法研究格式(3.5.11)的稳定性,可得

$$
(G-1)\left[1-2\varepsilon_i(\cos\alpha-1)+i\frac{\sigma}{2}\sin\alpha\right]=
$$

$$
2\varepsilon_e^{(2)}(\cos\alpha-1)-4\varepsilon_e^{(4)}(\cos\alpha-1)^2-i\sigma\sin\alpha
$$

式中

$$
G\equiv u_j^{n+1}/u_j^n;\quad \alpha\equiv K\Delta x。
$$

整理后得

$$
G=\frac{1+2(\varepsilon_e^{(2)}-\varepsilon_i)(\cos\alpha-1)-4\varepsilon_e^{(4)}(\cos\alpha-1)^2-i\dfrac{\sigma}{2}\sin\alpha}{1-2\varepsilon_i(\cos\alpha-1)+i\dfrac{\sigma}{2}\sin\alpha}
$$

于是有

$$
|G|^2=\frac{[1+2\varepsilon_i(1-\cos\alpha)-2\varepsilon_e^{(2)}(1-\cos\alpha)-4\varepsilon_e^{(4)}(1-\cos\alpha)^2]^2+\dfrac{\sigma^2}{4}\sin^2\alpha}{[1+2\varepsilon_i(1-\cos\alpha)]^2+\dfrac{\sigma^2}{4}\sin^2\alpha}
\tag{3.5.12}
$$

引进如下符号

$$
d\equiv 1-\frac{\varepsilon_e^{(2)}}{\varepsilon_i}-2\frac{\varepsilon_e^{(4)}}{\varepsilon_i}(1-\cos\alpha)
\tag{3.5.13}
$$

则式(3.5.12)可写成

$$|G|^2 = \frac{[1+2\varepsilon_i(1-\cos\alpha)d]^2 + \frac{\sigma^2}{4}\sin^2\alpha}{[1+2\varepsilon_i(1-\cos\alpha)]^2 + \frac{\sigma^2}{4}\sin^2\alpha} \tag{3.5.14}$$

令

$$A = [1+2\varepsilon_i(1-\cos\alpha)]^2 - [1+2\varepsilon_i(1-\cos\alpha)d]^2 =$$

$$4\varepsilon_i(1-\cos\alpha)(1-d) + 4\varepsilon_i(1-\cos\alpha)^2(1-d^2)$$

显然,若$|d|\leqslant 1$,则 $A\geqslant 0$,因而$|G|\leqslant 1$,格式将是无条件稳定的。

由式(3.5.13)及$|d|\leqslant 1$ 可得

$$0 \leqslant \frac{\varepsilon_e^{(2)}}{\varepsilon_i} + 2\frac{\varepsilon_e^{(4)}}{\varepsilon_i}(1-\cos\alpha) \leqslant 2 \tag{3.5.15}$$

因为 $\varepsilon_i>0,\varepsilon_e^{(2)}\geqslant 0,\varepsilon_e^{(4)}>0,0\leqslant 1-\cos\alpha\leqslant 2$,故 $0\leqslant\frac{\varepsilon_e^{(2)}}{\varepsilon_i}+2\frac{\varepsilon_e^{(4)}}{\varepsilon_i}\times(1-\cos\alpha)$是自动满足的。显然,若

$$\varepsilon_i \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_e^{(2)} + 2\varepsilon_e^{(4)} \tag{3.5.16}$$

则不等式(3.5.15)将得到满足,格式(3.5.10)将是无条件稳定的。据此可分别得出如下结论。

(1) 对 Jameson 隐式耗散格式而言,为了使格式是无条件稳定的,应根据不等式(3.5.16)来确定 ε_i。

(2) 对于 Beam-Warming 隐式耗散格式而言,$\varepsilon_e^{(2)}=0$,由式(3.5.16)知,欲使格式无条件稳定,必须选择 $\varepsilon_i\geqslant 2\varepsilon_e^{(4)}$。

(3) 对于混合反扩散格式而言,将 $\varepsilon_i=\frac{1}{4}Q,\varepsilon_e^{(2)}=\frac{1}{2}Q\theta$,$\varepsilon_e^{(4)}=\frac{1}{4}KQ(1-\theta)$代入式(3.5.16)可得

$$\frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{2}K(1-\theta)$$

即

$$\frac{1}{2}K(1-\theta) \leqslant \frac{1}{4}(1-\theta)$$

因为 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$,故$(1-\theta)>0$,于是可得

$$K \leqslant \frac{1}{2}$$

为了使混合反扩散格式是无条件稳定的,确定 $K=\frac{1}{2}$。

第 4 章　无波动的不含自由参数的差分格式

关于无波动的不含自由参数的差分格式，文献中已经提出了多种，例如 Harten 的 TVD 格式，Osher-Chakravarthy 的 TVD 格式以及 Van Leer 的 MUSCL 格式等。这些格式的提出，须具有深厚的计算数学基础。本章将以第 2 章关于差分计算产生非物理波动的力学分析为基础，建立无波动的不含自由参数的差分格式—NND 格式。还将进一步阐明，利用这种建立差分格式的方法，上面列举的 TVD 格式和 MUSCL 格式，均可被导出。

4.1　建立无波动差分格式的理论基础

在第 2 章 2.12 节中研究了激波上、下游差分解的波动问题。线化解析分析的结果表明，激波上、下游差分解的波动与差分格式的修正方程式中某些截断误差项的系数有密切关系，并得到如下结论。

(1) 对于一阶差分格式而言，正的 ν_2 有抑制激波附近差分解波动的作用。

(2) 对于二阶差分格式而言，如果在激波上、下游 $\nu_3>0$，且 ν_4 等高阶项较小，则差分格式给出的激波解在上游是光滑的，但下游出现波动解；反之如果在激波上、下游 $\nu_3<0$，且 ν_4 等高阶项较小，则差分格式给出的激波解在下游是光滑的，但上游出现波动解；如果在激波上游 $\nu_3>0$，而在下游 $\nu_3<0$，则差分格式给出的激波解在上、下游都是光滑的。

由于上述结论是在线化解析分析的基础上得到的，而实际流

动问题是非线性的,所以上述结论在非线性实际问题中是否依然成立是必需加以考核的。为此在第 2 章 2.12 节中,对一维激波流动进行了数值实验,它完全地证实了上述第(2)点结论的正确性。这正是下面将进行的构造空间二阶精度的无波动、无自由参数的耗散差分格式(NND 格式)的理论依据和出发点。

上述数值模拟结果表明,在全流场 $\nu_3>0$ 时,激波下游出现波动而上游则无波动;在全流场 $\nu_3<0$ 时,激波上游出现波动而下游则无波动;如果在激波上游 $\nu_3>0$,而在激波下游 $\nu_3<0$,则激波上、下游均无波动。由此可知,上述数值模拟结果证实了第 2 章中定性分析所给出的结论是完全正确的。

下面,将根据上述结论来构造无波动的差分格式。

4.2 无波动差分格式的建立

为简单起见,首先研究如下一个变量的非线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0 \tag{4.2.1}$$

设 $f(u)$是 u 的一次齐次函数,则 $f=au$,且 f 的特征值为

$$a=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}$$

将 a 分裂为

$$a=a^{+}+a^{-}$$

式中

$$a^{+}=\frac{1}{2}(a+|a|)$$

$$a^{-}=\frac{1}{2}(a-|a|)$$

于是

$$f=au=a^{+}u+a^{-}u=f^{+}+f^{-} \tag{4.2.2}$$

式中

$$\left.\begin{array}{l} f^+ = a^+ u \\ f^- = a^- u \end{array}\right\} \tag{4.2.3}$$

这样，方程(4.2.1)可被改写成

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f^+}{\partial x} + \frac{\partial f^-}{\partial x} = 0 \tag{4.2.4}$$

下面，将着手建立一个空间二阶精度无波动的半离散化的格式。

首先由于在定常情况激波的传播速度为零，根据熵条件，在激波上游特征值应取正，而在激波下游特征值应取负。

其次，由第 2 章中表 2-7 知，若用二阶迎风差商来逼近 $\partial f^+/\partial x$，则在修正方程式右端截断误差中出现具有正系数的三阶导数项，即 $\nu_3>0$；而若用二阶中心差商来逼近 $\partial f^-/\partial x$，则也有 $\nu_3>0$。这就启发我们，如果在激波上游，采用二阶迎风差商来逼近 $\partial f^+/\partial x$，同时采用二阶中心差商来逼近 $\partial f^-/\partial x$，则在激波上游将得到正的 ν_3。同样，如果在激波下游，采用二阶中心差商来逼近 $\partial f^+/\partial x$，同时采用二阶迎风差商来逼近 $\partial f^-/\partial x$，则在激波下游将得到负的 ν_3。这样就可使得数值解在激波上、下游都不出现波动。根据上述分析，规定半离散化的差分格式如下。

(1) 在激波上游

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j = -\frac{3f_j^+ - 4f_{j-1}^+ + f_{j-2}^+}{2\Delta x} - \frac{f_{j+1}^- - f_{j-1}^-}{2\Delta x}$$

(2) 在激波下游

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j = -\frac{f_{j+1}^+ - f_{j-1}^+}{2\Delta x} - \frac{-3f_j^- + 4f_{j+1}^- - f_{j+2}^-}{2\Delta x}$$

为使用方便起见，设法把激波上游的格式和激波下游的格式统一起来。经整理可得如下式子。

在激波上游

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j = -\frac{1}{\Delta x}\left\{\left[f_j^+ + \frac{1}{2}(f_j^+ - f_{j-1}^+)\right] - \right.$$

$$\left[f_{j-1}^+ + \frac{1}{2}(f_{j-1}^+ - f_{j-2}^+)\right] +$$

$$\left[f_{j+1} - \frac{1}{2}(f_{j+1}^{-} - f_{j}^{-})\right] - \left[f_{j}^{-} - \frac{1}{2}(f_{j}^{-} - f_{j-1})\right]\Big\}$$

可将上式写成

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j = -\frac{1}{\Delta x}(h_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}})$$

$$h_{j+\frac{1}{2}} = (f_L + f_R)_{j+\frac{1}{2}}$$

$$f_{Lj+\frac{1}{2}} = f_j^{+} + \frac{1}{2}(f_j^{+} - f_{j-1}^{+})$$

$$f_{Rj+\frac{1}{2}} = f_{j+1}^{-} - \frac{1}{2}(f_{j+1}^{-} - f_j)$$

在激波下游

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j = -\frac{1}{\Delta x}\Big\{\left[f_j^{+} + \frac{1}{2}(f_{j+1}^{+} - f_j^{+})\right] - \left[f_{j-1}^{+} + \frac{1}{2}(f_j^{+} - f_{j-1}^{+})\right] + \left[f_{j+1} - \frac{1}{2}(f_{j+2}^{-} - f_{j+1}^{-})\right] - \left[f_j^{-} - \frac{1}{2}(f_{j+1}^{-} - f_j)\right]\Big\}$$

可将上式改写成

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j = -\frac{1}{\Delta x}(h'_{j+\frac{1}{2}} - h'_{j-\frac{1}{2}})$$

$$h'_{j+\frac{1}{2}} = (f'_L + f'_R)_{j+\frac{1}{2}}$$

$$f'_{Lj+\frac{1}{2}} = f_j^{+} + \frac{1}{2}(f_{j+1}^{+} - f_j^{+})$$

$$f'_{Rj+\frac{1}{2}} = f_{j+1}^{-} - \frac{1}{2}(f_{j+2}^{-} - f_{j+1}^{-})$$

如果将它们写成一个统一的式子，将有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j = -\frac{1}{\Delta x}(h_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}}) \tag{4.2.5}$$

$$h_{j+\frac{1}{2}} = f_{L_{j+\frac{1}{2}}} + f_{R_{j+\frac{1}{2}}} \tag{4.2.6}$$

$$f_{L_{j+\frac{1}{2}}} = f_j^+ + \begin{cases} \frac{1}{2}(f_j^+ - f_{j-1}^+) & \text{激波上游} \\ \frac{1}{2}(f_{j+1}^+ - f_j^+) & \text{激波下游} \end{cases} \tag{4.2.7}$$

$$f_{R_{j+\frac{1}{2}}} = f_{j+1} - \begin{cases} \frac{1}{2}(f_{j+1}^- - f_j^-) & \text{激波上游} \\ \frac{1}{2}(f_{j+2}^- - f_{j+1}^-) & \text{激波下游} \end{cases} \tag{4.2.8}$$

另一方面，在激波上游，$\Delta u_{j-\frac{1}{2}} = u_j - u_{j-1}$与$\Delta u_{j+\frac{1}{2}} = u_{j+1} - u_j$同号，且$\Delta u_{j-\frac{1}{2}}$的绝对值小。又由于$\Delta f_{j-\frac{1}{2}} = f_j - f_{j-1} = a_{j-\frac{1}{2}}\Delta u_{j-\frac{1}{2}}$及$\Delta f_{j+\frac{1}{2}} = a_{j+\frac{1}{2}}\Delta u_{j+\frac{1}{2}}$，若近似地认为$a_{j-\frac{1}{2}} = a_{j+\frac{1}{2}}$，则可推论出，在激波上游，$\Delta f_{j-\frac{1}{2}}^+$与$\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^+$同号，且$\Delta f_{j-\frac{1}{2}}^+$的绝对值小。类似地可推论出，在激波下游，$\Delta f_{j-\frac{1}{2}}^+$与$\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^+$同号，而$\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^+$的绝对值小。

若定义如下限制器

minmod$(X, Y) = X, Y$中绝对值小的那个值，则式(4.2.7)可改写成

$$f_{L_{j+\frac{1}{2}}} = f_j^+ + \frac{1}{2}\text{minmod}(\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^+, \Delta f_{j-\frac{1}{2}}^+) \tag{4.2.9}$$

根据完全相同的分析，式(4.2.8)可改写成

$$f_{R_{j+\frac{1}{2}}} = f_{j+1} - \frac{1}{2}\text{minmod}(\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^-, \Delta f_{j+3/2}) \tag{4.2.10}$$

应当指出，上述半离散化格式在激波上游和激波下游都分别满足熵增条件，但在激波曲线的极值点处，即$\Delta u_{j-\frac{1}{2}}$与$\Delta u_{j+\frac{1}{2}}$异号，因而$\Delta f_{j-\frac{1}{2}}^+$与$\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^+$异号处，上述格式不满足熵增条件。因而若采用上述格式，数值解将在这特殊点附近出现波动。为避免出现波动，这点附近应作特殊处理。如果我们对 minmod 限制器重新定义如下

$$\mathrm{minmod}(X, Y) = \begin{cases} X, Y \text{ 中绝对值小的那个值,若 } XY \geqslant 0 \\ 0, \qquad \text{若 } XY < 0 \end{cases} \tag{4.2.11}$$

那么由式(4.2.5),式(4.2.6),式(4.2.9)和式(4.2.10)所确定的半离散化格式将处处满足熵增条件。

综上所述,我们得到了如下无波动、无自由参数的半离散化的差分格式

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j = -\frac{1}{\Delta x}(h_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}}) \tag{4.2.12}$$

$$h_{j+\frac{1}{2}} = f_{Lj+\frac{1}{2}} + f_{Rj+\frac{1}{2}} \tag{4.2.13}$$

$$f_{Lj+\frac{1}{2}} = f_j^+ + \frac{1}{2}\mathrm{minmod}(\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^+, \Delta f_{j-\frac{1}{2}}^+) \tag{4.2.14}$$

$$f_{Rj+\frac{1}{2}} = f_{j+1}^- - \frac{1}{2}\mathrm{minmod}(\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^-, \Delta f_{j+3/2}^-) \tag{4.2.15}$$

这个格式在空间方向是二阶精度的(个别极值点处除外),又因其 ν_4 处处为负,在这种意义上它是耗散型的格式。

我们称这个格式为无波动、无自由参数的耗散格式,或简称 NND 格式(Non-oscillatory, containing No free parameters and Dissipative scheme)。

总之,这个半离散化的 NND 格式具有二阶空间精度,它既能有效地捕捉激波,又由于它是二阶中心格式和二阶迎风格式的结合而具有负系数的四阶耗散项,因此还可抑制奇偶失联振荡。

4.3 NND 格式的总变差

总变差不增(Total Variation Nonincreasing,简称 TVNI)或总变差递减(Total Variation Diminishing,简称 TVD)格式是为捕捉激波而在 20 世纪 80 年代提出和发展起来的一类高分辨率格式,并在计算激波间断方面取得了很好的效果。

4.3.1 总变差的定义

对一元函数 $u(x)$的定义域任给一划分 $\Delta:\bigcup_j(x_j,x_{j+1})$。$u(x)$的总变差是对所有划分$\sum_j|u(x_{j+1})-u(x_j)|$的上确界,记为

$$TV(u(x))\equiv\sup_{\Delta}\left(\sum_j|u(x_{j+1})-u(x_j)|\right)\quad(4.3.1)$$

如果 $u(x)$在整个实轴上连续可微,则 $u(x)$在整个实轴上的总变差为

$$TV(u(x))=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\mathrm{d}x\quad(4.3.2)$$

如果函数是离散的 $u_j(j=-\infty,\cdots,+\infty)$,则总变差定义为

$$TV(u)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|u_{j+1}-u_j|\quad(4.3.3)$$

4.3.2 TVD 格式的定义

以非线性双曲型标量方程为例说明之。

考察如下非线性双曲型标量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0\quad(4.3.4)$$

以及与它相容的差分格式

$$u_j^{n+1}=L_hu_j^n\quad(4.3.5)$$

将差分格式(4.3.5)在 $t=t_n$ 时刻的差分解 $u^n=\{u_j^n\}$看成定义在网格点$\{x_j\}$上的离散函数,可以定义它的总变差

$$TV(u^n)=\sum_j|u_{j+1}^n-u_j^n|\quad(4.3.6)$$

如果差分格式(4.3.5)具有以下性质

$$TV(u^{n+1})\leqslant TV(u^n)\quad(4.3.7)$$

也就是说,t_{n+1}时刻差分解的总变差不大于 t_n 时刻差分解的总变差,那么就称此差分格式为 TVD 格式。

4.3.3 研究TVD格式的物理背景

现在来讨论非线性双曲型标量方程(4.3.4)的解的总变差随时间而变化的情况。该方程的解沿特征线

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(u)$$

是常值,因为此时

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

式中 $a(u)=\frac{\partial f}{\partial u}$。设从 t_n 时刻到 t_{n+1} 时刻特征线尚没有相交(参见图 4-1)。在 t_n 时刻有任意划分,可在 t_{n+1} 时刻找到相应的划分,使得 $u(t_{n+1},x_j^*)=u(t_n,x_j)$,反之亦然。由此可知,在特征线相交之前,方程(4.3.4)的解对于 x 的总变差不随时间而改变。

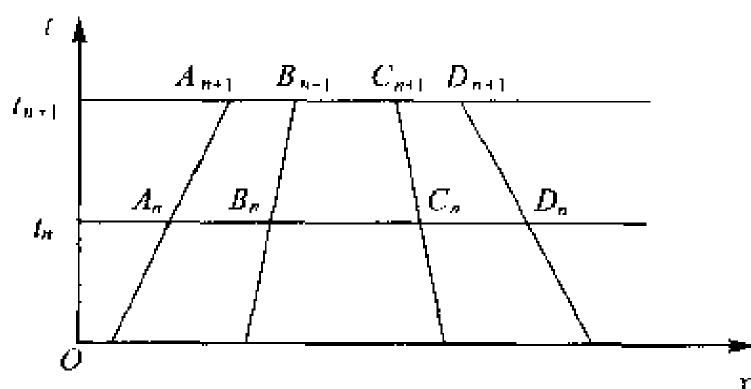


图 4-1　特征线相交前之总变差

今假设特征线 B_nB_{n+1} 和 C_nC_{n+1} 于 t_{n+1} 时刻相交(参见图 4-2),此时 t_{n+1} 时刻 B_{n+1} 点左方的总变差与 t_n 时刻 B_n 点左方的总变差相等,t_{n+1} 时刻 C_{n+1} 点右方的总变差和 t_n 时刻 C_n 点右方的总变差相等,而

$$|u(C_{n+1})-u(B_{n+1})|=|u(C_n)-u(B_n)|\leqslant \sum_{x_{B_n}\leqslant x\leqslant x_{C_n}}|u(x_{j+1})-u(x_j)|$$

由此可知,在特征线相交(即出现激波时),方程(4.3.4)的解

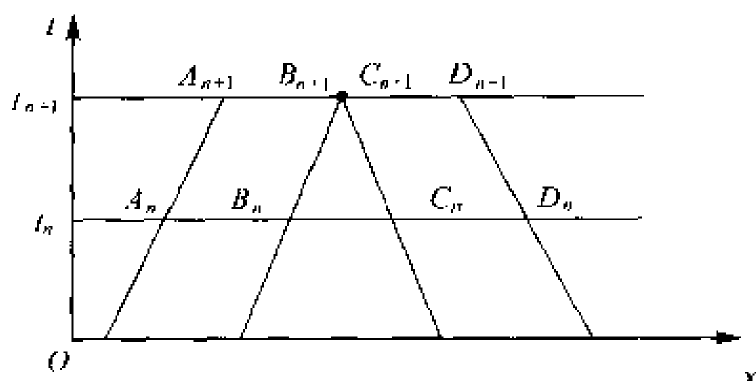


图 4-2 特征线相交时的总变差

随时间推移其总变差是不增的。并且由上述讨论过程可知,随着时间增长,方程(4.3.4)的解中不可能产生新的局部极值点,且解的局部最小值在时间推移过程中不会减小,而局部最大值也不会增大。因此,如果在初始时刻解是单调的,在以后的时刻将始终保持这种单调性。

综上所述知,非线性双曲型标量方程(4.3.4)的初值问题的解具有 TVD 特性。

一般说来,要求差分解具有更多一些的相应的微分方程解的性质,是设计差分格式时应该加以考虑的一个重要因素。因而要求与非线性双曲型标量方程相容的差分格式的差分解具有 TVD 性质是完全合理的。

4.3.4 NND 格式的总变差

由式(4.2.12)~(4.2.15)可得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j = -\frac{1}{\Delta x}(f_j^+ - f_{j-1}^+) - \frac{1}{\Delta x}(f_{j+1}^- - f_j^-) -$$

$$\frac{1}{2\Delta x}\mathrm{minmod}(\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^+, \Delta f_{j-\frac{1}{2}}^+) +$$

$$\frac{1}{2\Delta x}\mathrm{minmod}(\Delta f_{j-\frac{1}{2}}^+, \Delta f_{j-3/2}^+) +$$

$$\frac{1}{2\Delta x}\mathrm{minmod}(\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^-, \Delta f_{j+3/2}^-) -$$

$$\frac{1}{2\Delta x}\text{minmod}(\Delta f^-_{j-\frac{1}{2}},\Delta f_{j+\frac{1}{2}}) \tag{4.3.8}$$

根据 minmod 的定义，有

$$\text{minmod}(\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}},\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}) \equiv k_1\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}$$

式中 $0 \leqslant k_1 \leqslant 1$

$$\text{minmod}(\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}},\Delta f^+_{j-3/2}) \equiv k_2\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}$$

式中 $0 \leqslant k_2 \leqslant 1$

$$\text{minmod}(\Delta f_{j+\frac{1}{2}},\Delta f_{j+\frac{3}{2}}) \equiv k_3\Delta f_{j+\frac{1}{2}}$$

式中 $0 \leqslant k_3 \leqslant 1$

$$\text{minmod}(\Delta f^-_{j-\frac{1}{2}},\Delta f^-_{j+\frac{1}{2}}) \equiv k_4\Delta f^-_{j+\frac{1}{2}}$$

式中 $0 \leqslant k_4 \leqslant 1$

将它们代入式(4.3.8)可得

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j &= -\frac{1}{\Delta x}\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\Delta x}\Delta f_{j+\frac{1}{2}} + \\ &\frac{1}{2\Delta x}(k_2 - k_1)\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\Delta x}(k_3 - k_4)\Delta f^-_{j+\frac{1}{2}} = \\ &-\frac{1}{\Delta x}\left[1 - \frac{1}{2}(k_2 - k_1)\right]\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}} - \\ &\frac{1}{\Delta x}\left[1 - \frac{1}{2}(k_3 - k_4)\right]\Delta f_{j+\frac{1}{2}} = \\ &-\frac{1}{\Delta x}\left[1 - \frac{1}{2}(k_2 - k_1)\right]\left(\frac{\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta u_{j-\frac{1}{2}}}\right)\cdot\Delta u_{j-\frac{1}{2}} - \\ &\frac{1}{\Delta x}\left[1 - \frac{1}{2}(k_3 - k_4)\right]\left(\frac{\Delta f^-_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta u_{j+\frac{1}{2}}}\right)\cdot\Delta u_{j+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

令

$$\alpha_{j-\frac{1}{2}} \equiv \frac{1}{\Delta x}\left[1 - \frac{1}{2}(k_2 - k_1)\right]\left(\frac{\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta u_{j-\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\beta_{j+\frac{1}{2}} \equiv -\frac{1}{\Delta x}\left[1 - \frac{1}{2}(k_3 - k_4)\right]\left(\frac{\Delta f^-_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta u_{j+\frac{1}{2}}}\right)$$

则上式可写成

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j = -\alpha_{j-\frac{1}{2}}\Delta u_{j-\frac{1}{2}} + \beta_{j+\frac{1}{2}}\Delta u_{j+\frac{1}{2}} \tag{4.3.9}$$

由于$\left(\frac{\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta u_{j-\frac{1}{2}}}\right)>0,\left(\frac{\Delta f^-_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta u_{j+\frac{1}{2}}}\right)<0,\ -\frac{1}{2}\leqslant\frac{(k_2-k_1)}{2}\leqslant\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\leqslant\frac{(k_3-k_4)}{2}\leqslant\frac{1}{2},\left[1-\frac{1}{2}(k_2-k_1)\right]\geqslant\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\leqslant\left[1-\frac{1}{2}(k_3-k_4)\right]\leqslant\frac{3}{2}$,故有

$$\alpha_{j-\frac{1}{2}} > 0$$

$$\beta_{j+\frac{1}{2}} > 0$$

4.3.5 NND 格式的差分解的总变差随时间的变化

$$(TV) = \sum_j |u_{j+1} - u_j| = \sum_j S_{j+1/2}(u_{j+1} - u_j) \tag{4.3.10}$$

式中

$$S_{j+1/2} \equiv \begin{cases} 1, & 当\ \Delta u_{j+1/2} \geqslant 0 \\ -1, & 当\ \Delta u_{j+1/2} < 0 \end{cases}$$

根据前面的讨论知,$S_{j+1/2}$是不随时间而改变的,故有

$$\left[\frac{\mathrm{d}(TV)}{\mathrm{d}t}\right] = \sum_j S_{j+1/2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{j+1} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j\right]$$

将式(4.3.9)代入上式,可得

$$\begin{aligned}\left[\frac{\mathrm{d}(TV)}{\mathrm{d}t}\right] = & \sum_j S_{j+1/2}[-\alpha_{j+1/2}\Delta u_{j+1/2} + \beta_{j+3/2}\Delta u_{j+3/2} + \\ & \alpha_{j-1/2}\Delta u_{j-1/2} - \beta_{j+1/2}\Delta u_{j+1/2}] = \\ & \sum_j [-S_{j+1/2}\alpha_{j+1/2} - S_{j+1/2}\beta_{j+1/2} + \\ & S_{j-\frac{1}{2}}\beta_{j+1/2} + S_{j+3/2}\alpha_{j+1/2}]\Delta u_{j+1/2} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_j\left[S_{j+1/2}\alpha_{j+1/2}\left(1-\frac{S_{j+3/2}}{S_{j+1/2}}\right)+\right.\\
&\left.S_{j+1/2}\beta_{j+1/2}\left(1-\frac{S_{j-1/2}}{S_{j+1/2}}\right)\right]\Delta u_{j+1/2}=\\
&-\sum_j v_{j+1/2}S_{j+1/2}\Delta u_{j+1/2}=\\
&-\sum_j v_{j+1/2}\mid\Delta u_{j+1/2}\mid
\end{aligned}
\tag{4.3.11}
$$

式中

$$
v_{j+1/2}\equiv\alpha_{j+1/2}\left(1-\frac{S_{j+3/2}}{S_{j+1/2}}\right)+\beta_{j+1/2}\left(1-\frac{S_{j-1/2}}{S_{j+1/2}}\right)
$$

因为$\left(\frac{S_{j+3/2}}{S_{j+1/2}}\right)$，$\left(\frac{S_{j-1/2}}{S_{j+1/2}}\right)$均为 1 或 -1，且 $\alpha_{j+1/2}>0,\beta_{j+1/2}>0$ 故有 $v_{j+1/2}\geqslant0$。于是由式(4.3.11)知，$\left[\frac{\mathrm{d}(TV)}{\mathrm{d}t}\right]\leqslant0$。这样，就证明了半离散化的 NND 格式是 TVD 格式。

4.4 NND 格式的稳定性分析

由上一小节的分析知，半离散化的 NND 格式可写成

$$
\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j=-\frac{1}{\Delta x}(1-\tilde{\alpha})\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}-\frac{1}{\Delta x}(1-\tilde{\beta})\Delta f_{j+\frac{1}{2}}
\tag{4.4.1}
$$

式中，$|\tilde{\alpha}|<1/2$，$|\tilde{\beta}|<1/2$。

首先来分析 $a^+\neq0$，$a^-=0$ 的情形。若$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j$用一阶前差格式计算，则式(4.4.1)可写成

$$
u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}(1-\tilde{\alpha})a^+(u_j^n-u_{j-1}^n)
$$

应用 Fourier 分析方法可得放大因子为

$$
\begin{aligned}
G&=1-a^+(1-\tilde{\alpha})\frac{\Delta t}{\Delta x}[1-\cos(k_m\Delta x)+i\sin(k_m\Delta x)]=\\
&\left[1-a^+(1-\tilde{\alpha})\frac{\Delta t}{\Delta x}(1-\cos(k_m\Delta x))\right]-
\end{aligned}
$$

$$\left[a^{+}(1-\tilde{\alpha})\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\langle k_m\Delta x\rangle\right]i$$

于是

$$\begin{aligned}|G|^2=&1-2a^{+}(1-\tilde{\alpha})\frac{\Delta t}{\Delta x}(1-\cos\langle k_m\Delta x\rangle)+\\&\left[a^{-}(1-\tilde{\alpha})\frac{\Delta t}{\Delta x}(1-\cos\langle k_m\Delta x\rangle)\right]^2+\\&\left[a^{+}(1-\tilde{\alpha})\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\langle k_m\Delta x\rangle\right]^2=\\&1-2a^{+}(1-\tilde{\alpha})\frac{\Delta t}{\Delta x}(1-\cos\langle k_m\Delta x\rangle)+\\&2\left[a^{+}(1-\tilde{\alpha})\frac{\Delta t}{\Delta x}\right]^2(1-\cos\langle k_m\Delta x\rangle)=\\&1-2\omega(1-\omega)(1-\cos\langle k_m\Delta x\rangle)\end{aligned}$$

式中

$$\omega\equiv a^{+}(1-\tilde{\alpha})\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

由于$0\leqslant 2(1-\cos< k_m\Delta x >)\leqslant 4$，因此欲使$0\leqslant|G|\leqslant 1$，其充分条件为

$$0\leqslant\omega(1-\omega)\leqslant\frac{1}{4}$$

由此可得

$$0\leqslant\omega\leqslant 1$$

于是有

$$a^{+}\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant\frac{1}{1-\tilde{\alpha}}$$

又由于$|\tilde{\alpha}|\leqslant\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}\leqslant\tilde{\alpha}\leqslant\frac{1}{2}$，因此得到稳定性条件

$$\frac{a^{+}\Delta t}{\Delta x}\leqslant\frac{2}{3}\tag{4.4.2}$$

同样，如果$a^{+}=0$，$a^{-}\neq 0$，则稳定性条件为

$$\frac{|a^{-}|\Delta t}{\Delta x}\leqslant\frac{2}{3}\tag{4.4.3}$$

综上所述，用一阶前差来逼近$(\partial u/\partial t)_j^n$的 NND 格式的稳定性条件为

$$\frac{|a|\Delta t}{\Delta x} \leqslant \frac{2}{3} \tag{4.4.4}$$

4.5 NND 格式的其它表示形式

在这一小节中，仍然以方程(4.2.1)为研究对象。

由半离散化的 NND 格式(4.2.12)—(4.2.15)可得

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j = & -\frac{1}{\Delta x}\Big\{f_j^+ - f_{j-1}^+ + f_{j+1}^- - f_j^- + \\
& \frac{1}{2}\text{minmod}(\Delta f_{j-\frac{1}{2}}^+, \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^+) - \\
& \frac{1}{2}\text{minmod}(\Delta f_{j-3/2}^+, \Delta f_{j-\frac{1}{2}}^+) - \\
& \frac{1}{2}\text{minmod}(\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^-, \Delta f_{j+3/2}^-) + \\
& \frac{1}{2}\text{minmod}(\Delta f_{j-\frac{1}{2}}^-, \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^-)\Big\} = \\
& -\frac{1}{\Delta x}\Big\{\frac{1}{2}(f_{j+1}^+ - f_{j-1}^+) - \frac{1}{2}(f_{j+1}^+ - 2f_j^+ + f_{j-1}^+) + \\
& \frac{1}{2}(f_{j+1}^- - f_{j-1}^-) + \frac{1}{2}(f_{j+1}^- - 2f_j^- + f_{j-1}^-) + \\
& \frac{1}{2}\text{minmod}(\Delta f_{j-\frac{1}{2}}^+, \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^+) - \\
& \frac{1}{2}\text{minmod}(\Delta f_{j-3/2}^+, \Delta f_{j-\frac{1}{2}}^+) - \\
& \frac{1}{2}\text{minmod}(\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^-, \Delta f_{j+3/2}^-) + \\
& \frac{1}{2}\text{minmod}(\Delta f_{j-\frac{1}{2}}^-, \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^-)\Big\}
\end{aligned}$$

上式可写成

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j = -\frac{1}{\Delta x}\left(h_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}}\right) \tag{4.5.1}$$

式中

$$\begin{aligned} h_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\Big[& (f_{j+1} + f_j) - | a |_{j+\frac{1}{2}}\Delta u_{j+\frac{1}{2}} + \\ & \operatorname{minmod}(\Delta f^{+}_{j-\frac{1}{2}}, \Delta f^{+}_{j+\frac{1}{2}}) - \\ & \operatorname{minmod}(\Delta f^{-}_{j+\frac{1}{2}}, \Delta f_{j+3/2})\Big] \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

$$| a |_{j+\frac{1}{2}} \equiv a^{+}_{j+\frac{1}{2}} - a^{-}_{j+\frac{1}{2}} \tag{4.5.3}$$

4.6 NND格式在向量双曲型方程中的推广

首先讨论常系数双曲型方程组的情形

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} = 0 \tag{4.6.1}$$

式中 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ (4.6.2)

$\boldsymbol{U} = (u_1, u_2, \cdots, u_m)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}$ 为 $m \times m$ 常系数矩阵。由于式(4.6.1)是双曲型方程组,故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 m 个实特征根。设它们是

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$$

则其特征对角矩阵为

$$\boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可写成

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T} \tag{4.6.3}$$

式中 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{T}^{-1}$分别是左和右特征向量组成的矩阵,而且在现在所讨论的情形,$\boldsymbol{\Lambda}$,$\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{T}^{-1}$都是常系数矩阵。将式(4.6.2)和式(4.6.3)代入式(4.6.1)可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = 0 \tag{4.6.4}$$

以矩阵 $\boldsymbol{T}$ 左乘式(4.6.4)可得

$$\boldsymbol{T}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = 0$$

或者

$$\frac{\partial(\boldsymbol{TU})}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial(\boldsymbol{TU})}{\partial x} = 0$$

引入如下由特征变量组成的向量

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{TU} \tag{4.6.5}$$

则可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial x} = 0 \tag{4.6.6}$$

即
$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_m \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = 0$$

即
$$\frac{\partial w_l}{\partial t} + \lambda_l \frac{\partial w_l}{\partial x} = 0, (l = 1,2,\cdots,m) \tag{4.6.7}$$

至此已变成 m 个线性常系数的标量方程。因而 4.2 节中构造的半离散化的 NND 格式就可以直接地被应用到这里来。引入

$$\lambda_l = \lambda_l^+ + \lambda_l^-$$

$$\lambda_l^+ = \frac{1}{2}(\lambda_l + |\lambda_l|)$$

$$\lambda_l^- = \frac{1}{2}(\lambda_l - |\lambda_l|)$$

于是式(4.6.7)可被改写成

$$\frac{\partial w_l}{\partial t} + \frac{\partial f_l^+}{\partial x} + \frac{\partial f_l^-}{\partial x} = 0, (l = 1,2,\cdots,m) \tag{4.6.8}$$

$$f_l^+ = \lambda_l^+ w_l, \quad f_l^- = \lambda_l^- w_l$$

今仿照 4.2 节中的方法来构造上述 m 个标量方程的半离散差分格式,可得

在激波上游

$$
\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial w_l}{\partial t}\right)_j = -\frac{1}{\Delta x}\left(h_{l_{j+\frac{1}{2}}} - h_{l_{j-\frac{1}{2}}}\right)\\
&h_{l_{j+\frac{1}{2}}} = \lambda_l^+\left(w_{l_j} + \frac{1}{2}\Delta w_{l_{j-\frac{1}{2}}}\right) + \\
&\lambda_l^-\left(w_{l_{j+1}} - \frac{1}{2}\Delta w_{l_{j+\frac{1}{2}}}\right)\\
&(l = 1,2,\cdots,m)
\end{aligned}\right\}
\tag{4.6.9}
$$

将上面 m 个标量式子合并成如下一个向量式子

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}\right)_j = -\frac{1}{\Delta x}\left(\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}_{j+\frac{1}{2}} - \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}_{j-\frac{1}{2}}\right)
$$

$$
\equiv -\frac{1}{\Delta x}\left(\boldsymbol{h}_{j+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{h}_{j-\frac{1}{2}}\right) \tag{4.6.10}
$$

式中

$$
\boldsymbol{h}_{j+\frac{1}{2}} \equiv \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}_{j+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \lambda_1^+ & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2^+ & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_m^+ \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}_j + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \\ \vdots \\ \Delta w_m \end{bmatrix}_{j-\frac{1}{2}}\right)
$$

$$
+ \begin{bmatrix} \lambda_1^- & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2^- & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_m^- \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}_{j+1} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \\ \vdots \\ \Delta w_m \end{bmatrix}_{j+\frac{1}{2}}\right)
$$

以矩阵 $\boldsymbol{T}^{-1}$左乘上式,并将 $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}$插入上式中特征矩阵之后,可得

$$
\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{h}_{j+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{A}^+\left(\boldsymbol{U}_j + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{U}_{j-\frac{1}{2}}\right) + \boldsymbol{A}^-\left(\boldsymbol{U}_{j+1} - \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{U}_{j+\frac{1}{2}}\right) =
$$

$$
\boldsymbol{F}_j^+ + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{F}_{j-\frac{1}{2}}^+ + \boldsymbol{F}_{j+1}^- - \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{F}_{j+\frac{1}{2}}^- \tag{4.6.11}
$$

这里应用了关系式 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{W}=\boldsymbol{U}$,令

$$\boldsymbol{H}_{j+\frac{1}{2}} \equiv \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{h}_{j+\frac{1}{2}} \tag{4.6.12}$$

以 $\boldsymbol{T}^{-1}$左乘式(4.6.10),并利用式(4.6.11)和式(4.6.12)可得

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}\right)_j = -\frac{1}{\Delta x}\left(\boldsymbol{H}_{j+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{H}_{j-\frac{1}{2}}\right) \tag{4.6.13}$$

式中

$$\boldsymbol{H}_{j+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{F}_j^+ + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{F}_{j-\frac{1}{2}}^+ + \boldsymbol{F}_{j+1}^- - \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{F}_{j+\frac{1}{2}}^- \tag{4.6.14}$$

在激波下游,类似地可得

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}\right)_j = -\frac{1}{\Delta x}\left(\boldsymbol{H}'_{j+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{H}'_{j-\frac{1}{2}}\right) \tag{4.6.15}$$

式中

$$\boldsymbol{H}'_{j+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{F}_j^+ + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{F}_{j+\frac{1}{2}}^+ + \boldsymbol{F}_{j+1}^- - \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{F}_{j+\frac{3}{2}}^- \tag{4.6.16}$$

与4.2节中关于标量方程的情形完全一样,可以将上述激波上游和激波下游的两个不同表达式合并成如下一个统一的表达式

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}\right)_j = -\frac{1}{\Delta x}\left(\boldsymbol{H}_{j+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{H}_{j-\frac{1}{2}}\right) \tag{4.6.17}$$

$$\boldsymbol{H}_{j+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{F}_{L_{j+\frac{1}{2}}} + \boldsymbol{F}_{R_{j+\frac{1}{2}}} \tag{4.6.18}$$

$$\boldsymbol{F}_{L_{j+\frac{1}{2}}} = \boldsymbol{F}_j^+ + \frac{1}{2}\mathrm{minmod}\left(\Delta\boldsymbol{F}_{j-\frac{1}{2}}^+, \Delta\boldsymbol{F}_{j+\frac{1}{2}}^+\right) \tag{4.6.19}$$

$$\boldsymbol{F}_{R_{j+\frac{1}{2}}} = \boldsymbol{F}_{j+1}^- - \frac{1}{2}\mathrm{minmod}\left(\Delta\boldsymbol{F}_{j+\frac{1}{2}}^-, \Delta\boldsymbol{F}_{j+3/2}^-\right) \tag{4.6.20}$$

这里,以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为变量的函数 $\mathrm{minmod}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$的定义是以其相应分量 a_l,b_l 为变量的函数 $\mathrm{minmod}(a_l,b_l)$所组成的向量$(\mathrm{minmod}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_1),\cdots,\mathrm{minmod}(\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}_m))^{\mathrm{T}}$。

式(4.6.17)~式(4.6.20)给出了关于常系数双曲型方程组的半离散化的NND格式。不难看出,它和关于标量方程的半离散化的NND格式在形式上完全一样。如果将标量方程中的 u 换成 U,f 换成 F,即可得到常系数双曲型方程组情况下的NND格式。

现在来讨论非线性双曲型守恒律方程组的情形

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})}{\partial x} = 0 \tag{4.6.21}$$

它也可被写成如下非守恒形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = 0 \tag{4.6.22}$$

式中，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}) = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{U}}$，为通量 $\boldsymbol{F}$ 的 Jacobian 矩阵。设 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})$是 $\boldsymbol{U}$ 的一次齐次函数(在理想完全气体一维非定常流动的 Euler 方程的情形里就是这样)，则有

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{U} \tag{4.6.23}$$

现在将前面关于常系数双曲型方程组所得到的结果直接推广到非线性双曲型守恒律方程组的情形，给出如下半离散化的 NND 格式

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}\right)_j = -\frac{1}{\Delta x}(\boldsymbol{H}_{j+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{H}_{j-\frac{1}{2}}) \tag{4.6.24}$$

$$\boldsymbol{H}_{j+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{F}_{L_{j+\frac{1}{2}}} + \boldsymbol{F}_{R_{j+\frac{1}{2}}} \tag{4.6.25}$$

$$\boldsymbol{F}_{L_{j+\frac{1}{2}}} = \boldsymbol{F}_j^+ + \frac{1}{2}\mathrm{minmod}(\Delta \boldsymbol{F}_{j-\frac{1}{2}}^+, \Delta \boldsymbol{F}_{j+\frac{1}{2}}^+) \tag{4.6.26}$$

$$\boldsymbol{F}_{R_{j+\frac{1}{2}}} = \boldsymbol{F}_{j+1}^- - \frac{1}{2}\mathrm{minmod}(\Delta \boldsymbol{F}_{j+\frac{1}{2}}^-, \Delta \boldsymbol{F}_{j+3/2}^-) \tag{4.6.27}$$

式中

$$\boldsymbol{F}^{\pm}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{A}^{\pm}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}; \quad \boldsymbol{A}^{\pm}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{R}\boldsymbol{\Lambda}^{\pm}\boldsymbol{L};$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^{\pm} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{\pm}(\boldsymbol{U}), \cdots, \lambda_m^{\pm}(\boldsymbol{U}));$$

$$\lambda_l^{\pm}(\boldsymbol{U}) = \frac{1}{2}[\lambda_l(\boldsymbol{U}) \pm |\lambda_l(\boldsymbol{U})|], \quad l = 1,2,\cdots,m。$$

$\lambda_l(\boldsymbol{U}), \boldsymbol{l}_l(\boldsymbol{U}), \boldsymbol{r}_l(\boldsymbol{U}), l=1,2,\cdots,m$ 分别是 Jacobian 矩阵的特征值和左、右特征向量。$\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 分别是由相应的特征向量组成的矩阵

$$R = [r_1(U), \cdots, r_m(U)],$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1(U) \\ \vdots \\ L_m(U) \end{bmatrix}, L = R^{-1}。$$

4.7 $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j$ 的逼近

今以如下线性常系数标量方程为例说明之

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

式中，$f = au$，a 为常数。

4.7.1 NND-1 格式

时间方向为一阶精度的格式

由 Taylor 展开式，取到一阶小量，有

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n$$

将 4.2 节中得到的半离散化的 NND 格式代入上式，可得到如下时间方向为一阶精度而空间方向为二阶精度的显式 NND 格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\tilde{h}_{j+\frac{1}{2}}^n - \tilde{h}_{j-\frac{1}{2}}^n) \tag{4.7.1}$$

式中

$$\tilde{h}_{j+1/2}^n = h_{j+\frac{1}{2}}^n = f_j^{+n} + \frac{1}{2}\text{minmod}(\Delta f_{j-\frac{1}{2}}^{+n}, \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{+n}) +$$

$$f_{j+1}^{-n} - \frac{1}{2}\text{minmod}(\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{-n}, \Delta f_{j+3/2}^{-n}) \tag{4.7.2}$$

称{式(4.7.1)，式(4.7.2)}为 NND-1 格式。它允许的最大 Courant 数是 2/3。

4.7.2 NND-2 格式

时间方向为二阶精度的格式

由 Taylor 展开式，取到二阶小量，有

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n$$

因为$\frac{\partial u}{\partial t} = -a\frac{\partial u}{\partial x}$，故有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-a\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = -a\frac{\partial}{\partial x}\left(-a\frac{\partial u}{\partial x}\right) =$$

$$a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

代入上面的 Taylor 展开式，得到

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2\left(a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_j^n$$

与时间方向为一阶精度的格式相比，新增添的问题是如何适当规定$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_j^n$的离散表示式。这里，采用与 4.2 节中确定$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j^n$完全类似的思想来确定$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_j^n$，即在激波上游，对于 f^+ 采用迎风差分，对于 f^- 采用中心差分；而在激波下游，对于 f^+ 采用中心差分，对于 f^- 采用迎风差分。

在激波上游

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_j^n = \left(\frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2}\right)_j^n + \left(\frac{\partial^2 f^-}{\partial x^2}\right)_j^n =$$

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left(\Delta f_{j-\frac{1}{2}}^{+n} - \Delta f_{j-3/2}^{+n}\right) + \frac{1}{\Delta x^2}\left(\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{-n} - \Delta f_{j-\frac{1}{2}}^{-n}\right)$$

在激波下游

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_j^n = \left(\frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2}\right)_j^n + \left(\frac{\partial^2 f^-}{\partial x^2}\right)_j^n =$$

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left(\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{+n} - \Delta f_{j-\frac{1}{2}}^{+n}\right) + \frac{1}{\Delta x^2}\left(\Delta f_{j+3/2}^{-n} - \Delta f_{j-\frac{1}{2}}^{-n}\right)$$

它们可以被写成如下一个统一的式子

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_j^n = \frac{1}{\Delta x^2}\Big\{ & \operatorname{minmod}\left(\Delta f^{+n}_{j-\frac{1}{2}}, \Delta f^{+n}_{j+\frac{1}{2}}\right) \\
& \operatorname{minmod}\left(\Delta f^{+n}_{j-\frac{3}{2}}, \Delta f^{+n}_{j-\frac{1}{2}}\right) + \\
& \operatorname{minmod}\left(\Delta f^{+n}_{j+\frac{1}{2}}, \Delta f^{n}_{j+3/2}\right) - \\
& \operatorname{minmod}\left(\Delta f^{-n}_{j-\frac{1}{2}}, \Delta f^{-n}_{j+\frac{1}{2}}\right)\Big\}
\end{aligned}
$$

尽管现在讨论的是 a 为常数的情况，但为了便于推广到非线性双曲型方程组的情况，将 $\left(a\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_j^n$ 写成如下形式

$$
\begin{aligned}
\left(a\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_j^n = \frac{1}{\Delta x^2}\Big\{ & a_j^n \operatorname{minmod}\left(\Delta f^{+n}_{j-\frac{1}{2}}, \Delta f^{+n}_{j-\frac{1}{2}}\right) - \\
& a_{j-1}^n \operatorname{minmod}\left(\Delta f^{+n}_{j-3/2}, \Delta f^{+n}_{j-\frac{1}{2}}\right) + \\
& a_{j+1}^n \operatorname{minmod}\left(\Delta f^{n}_{j+\frac{1}{2}}, \Delta f^{-n}_{j+3/2}\right) \\
& a_j^n \operatorname{minmod}\left(\Delta f^{-n}_{j-\frac{1}{2}}, \Delta f^{-n}_{j+\frac{1}{2}}\right)\Big\}
\end{aligned}
$$

将上式及 4.2 节中的半离散化的 NND 格式代入前面的 Taylor 展开式，即可得到如下形式的时间和空间均为二阶精度的 NND 格式

$$
u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\tilde{h}^n_{j+\frac{1}{2}} - \tilde{h}^n_{j-\frac{1}{2}}\right) \tag{4.7.3}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
\tilde{h}^n_{j+\frac{1}{2}} = f_j^{+n} + \frac{1}{2}\left(1 - a_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) & \operatorname{minmod}\left(\Delta f^{+n}_{j-\frac{1}{2}}, \Delta f^{+n}_{j+\frac{1}{2}}\right) + \\
f^{n}_{j+1} - \frac{1}{2}\left(1 + a_{j+1}^n \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) & \operatorname{minmod}\left(\Delta f^{-n}_{j+\frac{1}{2}}, \Delta f^{n}_{j+3/2}\right)
\end{aligned} \tag{4.7.4}
$$

从上面的推导过程可以看出，若规定的 $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n$ 的差商表示式不同，则最终得到的格式也将不同。例如，若将 $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n$ 表示成

如下稍稍不同的形式

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]_j^n$$

则有

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]_j^n$$

然后采用与 4.2 节中确定 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j^n$ 完全类似的思想来确定 $\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]_j^n$,可得

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]_j^n = \frac{1}{\Delta x^2}\Big\{&\operatorname{minmod}[(a^+\Delta f^+)_{j-\frac{1}{2}}^n,(a^+\Delta f^+)_{j+\frac{1}{2}}^n] - \\ &\operatorname{minmod}\left[(a^+\Delta f^+)_{j-\frac{3}{2}}^n,(a^+\Delta f^+)_{j-\frac{1}{2}}^n\right] + \\ &\operatorname{minmod}[(a^-\Delta f^-)_{j+\frac{1}{2}}^n,(a^-\Delta f^-)_{j+3/2}^n] - \\ &\operatorname{minmod}\left[(a^-\Delta f^-)_{j-\frac{1}{2}}^n,(a^-\Delta f^-)_{j+\frac{1}{2}}^n\right]\Big\}\end{aligned}$$

将上式及 4.2 节中的半离散化的 NND 格式代入前面的 Taylor 展开式,即可得到形式上与{式(4.7.3),式(4.7.4)}稍稍不同的时间和空间均为二阶精度的 NND 格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\bar{h}_{j+\frac{1}{2}}^n - \bar{h}_{j-\frac{1}{2}}^n) \tag{4.7.5}$$

式中

$$\begin{aligned}\bar{h}_{j+\frac{1}{2}}^n = f_j^{+n} + \frac{1}{2}&\operatorname{minmod}\left[\left(1 - a_{j-\frac{1}{2}}^{+n}\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\Delta f_{j-\frac{1}{2}}^{+n},\right. \\ &\left.\left(1 - a_{j+\frac{1}{2}}^{+n}\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{+n}\right] + \\ &f_{j+1}^{-n} - \frac{1}{2}\operatorname{minmod}\left[\left(1 + a_{j+\frac{1}{2}}^{-n}\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{-n},\right. \\ &\left.\left(1 + a_{j+3/2}^{-n}\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\Delta f_{j+\frac{3}{2}}^{-n}\right]\end{aligned} \tag{4.7.6}$$

称{式(4.7.5),式(4.7.6)}为 NND-2 格式。它允许的最大 Courant 数是 1。

4.7.3 NND-3 格式

对于标量双曲型方程(4.2.1),该格式可表示如下

$$\left.\begin{aligned} u_j^{\overline{n+1}} &= u_j^n - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(h^n_{j+\frac{1}{2}} - h^n_{j-\frac{1}{2}}\right) \\ u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(h^{\overline{n+1}}_{j+\frac{1}{2}} - h^{\overline{n+1}}_{j-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{4.7.7}$$

式中

$$\begin{aligned} h_{j+\frac{1}{2}} = {} & f_j^+ + \frac{1}{2}\mathrm{minmod}\left(\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}, \Delta f^+_{j+\frac{1}{2}}\right) + \\ & f^-_{j+1} - \frac{1}{2}\mathrm{minmod}\left(\Delta f^-_{j+\frac{1}{2}}, \Delta f^-_{j+3/2}\right) \end{aligned} \tag{4.7.8}$$

这是一个预测—校正两步格式,在时间和空间方向都是二阶精度的,它所允许的最大 Courant 数是 1。

4.7.4 NND-4 格式

这是另一个预测—校正两步格式。对于标量双曲型方程(4.2.1),该格式可表示如下

$$\left.\begin{aligned} u_j^{\overline{n+1}} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(h^n_{j+\frac{1}{2}} - h^n_{j-\frac{1}{2}}\right) \\ u_j^{n+1} &= \frac{1}{2}\left(u_j^n + u_j^{\overline{n+1}} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(h^{\overline{n+1}}_{j+\frac{1}{2}} - h^{\overline{n+1}}_{j-\frac{1}{2}}\right)\right) \end{aligned}\right\} \tag{4.7.9}$$

式中 $h_{j+\frac{1}{2}}$仍由式(4.7.8)表示,称为 NND-4(a)格式。

这个格式在时间和空间方向均具有二阶精度,它所允许的最大 Courant 数是 1。

为简单起见,式(4.7.9)中的预测步也可被规定为

$$u_j^{\overline{n+1}} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\Delta f^{+n}_{j-\frac{1}{2}} + \Delta f^{-n}_{j+\frac{1}{2}}\right)$$

意即此时令 $h_{j+\frac{1}{2}}$的表示式(4.7.8)中 $\mathrm{minmod}(a,b)=0$。

为了保证格式在时间和空间方向都是二阶精度的，格式可表示如下

$$
\left.\begin{aligned}
u_j^{\overline{n+1}} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\Delta f^{+n}_{j-\frac{1}{2}} + \Delta f^{-n}_{j+\frac{1}{2}}\right) \\
u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\tilde{\tilde{h}}_{j+\frac{1}{2}} - \tilde{\tilde{h}}_{j-1/2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4.7.10}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
\tilde{\tilde{h}}_{j+\frac{1}{2}} = {} & \frac{1}{2}\left(f_j^{+n} + f_j^{+\overline{n+1}}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{minmod}\left(\Delta f^{+\overline{n+1}}_{j-\frac{1}{2}}, \Delta f^{+\overline{n+1}}_{j+\frac{1}{2}}\right) + \\
& \frac{1}{2}\left(f^{-n}_{j+1} + f^{-\overline{n+1}}_{j+1}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{minmod}\left(\Delta f^{-\overline{n+1}}_{j+\frac{1}{2}}, \Delta f^{-\overline{n+1}}_{j+3/2}\right)
\end{aligned} \tag{4.7.11}
$$

称{式(4.7.10)，式(4.7.11)}为 NND-4(b)格式。它所允许的最大 Courant 数是 1。

将式(4.7.11)代入式(4.7.10)，可得

$$
\left.\begin{aligned}
u_j^{\overline{n+1}} = {} & u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\Delta f^{+n}_{j-\frac{1}{2}} + \Delta f^{-n}_{j+\frac{1}{2}}\right) \\
u_j^{n+1} = {} & \frac{1}{2}\left[u_j^n + u_j^{\overline{n+1}} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\Delta f^{+\overline{n+1}}_{j-1/2} + \Delta f^{-\overline{n+1}}_{j+1/2}\right)\right] + \\
& \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\Delta f^{+\overline{n+1}}_{j+1/2} - \operatorname{minmod}\left(\Delta f^{+\overline{n+1}}_{j-1/2}, \Delta f^{+\overline{n+1}}_{j+1/2}\right)\right] - \\
& \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\Delta f^{+\overline{n+1}}_{j-\frac{1}{2}} - \operatorname{minmod}\left(\Delta f^{+\overline{n+1}}_{j-3/2}, \Delta f^{+\overline{n+1}}_{j-1/2}\right)\right] - \\
& \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\Delta f^{-\overline{n+1}}_{j+1/2} - \operatorname{minmod}\left(\Delta f^{-\overline{n+1}}_{j+1/2}, \Delta f^{-\overline{n+1}}_{j+3/2}\right)\right] + \\
& \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\Delta f^{-\overline{n+1}}_{j-1/2} - \operatorname{minmod}\left(\Delta f^{-\overline{n+1}}_{j-1/2}, \Delta f^{-\overline{n+1}}_{j+1/2}\right)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{4.7.12}
$$

显然，NND-4(b)格式是 MacCormack 预测—校正两步格式的推广，实际上，它是在 MacCormack 格式的校正步中加进了某些三阶导数项。

4.7.5 NND-5 格式

半离散化的 NND 格式{式(4.2.12)～式(4.2.15)}是关于$\{u_j(t)\}$的常微分方程组，可以用常微分方程的数值解法来求解。采用如下具有 TVD 保持性质的二阶显式 Runge-Kutta 型时间离散格式

$$\left.\begin{aligned} u_j^{(0)} &= u_j^n \\ u_j^{(1)} &= u_j^{(0)} + \Delta t L(u_j^{(0)}) \\ u_j^{(2)} &= u_j^{(0)} + \frac{1}{2}\Delta t[L(u_j^{(0)}) + L(u_j^{(1)})] \\ u_j^{n+1} &= u_j^{(2)} \end{aligned}\right\} \quad (4.7.13)$$

式中

$L(u_j) = -\dfrac{1}{\Delta x}(h_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}})$，$h_{j+\frac{1}{2}}$由式(4.2.13)～式(4.2.15)确定。

当 $\lambda_0 \dfrac{\Delta t}{\Delta x} < 1$ 时，上述格式是稳定的，并具有 TVD 保持性质。其中 λ_0 是$|f'_u|\left(f'_u = \dfrac{\partial f}{\partial u}\right)$的最大值。

4.8 隐式 NND 格式

在上一节中，介绍了五个显式 NND 格式。数值试验的结果表明，这些显式 NND 格式具有良好的收敛精度以及捕捉激波、旋涡和剪切层的高分辨率。但是当计算诸如湍流流动时需要采用细小的网格，显式计算所需花费的计算时间是很长的，因而需要发展无条件稳定的隐式 NND 格式。

在文献中已经提出了某些隐式 TVD 格式。因为对于一维、二维和三维流动而言，这些隐式 TVD 格式的格式点数分别是 5、9 和 13，故而块对角矩阵求逆的数值计算工作量是很大的，为此需要发展具有较少格式点数的隐式格式。基于上述考虑，发展了如

下隐式 NND 格式。它的建立过程如下。

对于一个变量的非线性方程(4.2.1),有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n = -\frac{1}{\Delta x}(h_{j+1/2}^n - h_{j-1/2}^n) \tag{4.8.1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^{n+1} = -\frac{1}{\Delta x}(h_{j+1/2}^{n+1} - h_{j-1/2}^{n+1}) \tag{4.8.2}$$

式中 $h_{j\pm 1/2}$ 由式(4.2.13)～式(4.2.15)确定。按照 Crank-Nicolson 方法, u_j^{n+1} 可被表示成

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t\left[(1-\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n + \theta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^{n+1}\right] \tag{4.8.3}$$

当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时,表示式(4.8.3)在时间方向是二阶精度的,而 $\theta = 1$ 时,它是一阶精度的。

将式(4.8.1),式(4.8.2)代入式(4.8.3)可得如下隐式格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\tilde{h}_{j+1/2} - \tilde{h}_{j-1/2}) \tag{4.8.4}$$

式中

$$\tilde{h}_{j+1/2} - \tilde{h}_{j-1/2} = [(1-\theta)h_{j+1/2}^n + \theta h_{j+1/2}^{n+1}] - [(1-\theta)h_{j-1/2}^n + \theta h_{j-1/2}^{n+1}] \tag{4.8.5}$$

今引入如下定义

$$\left.\begin{aligned}
K_1 &\equiv \frac{1}{2}\mathrm{minmod}\left(\frac{\Delta f_{j+1/2}^+}{\Delta f_{j-1/2}^+}, 1\right)\\
K_2 &\equiv \frac{1}{2}\mathrm{minmod}\left(\frac{\Delta f_{j+3/2}^-}{\Delta f_{j+1/2}^-}, 1\right)\\
K_3 &\equiv \frac{1}{2}\mathrm{minmod}\left(\frac{\Delta f_{j-3/2}^+}{\Delta f_{j-1/2}^+}, 1\right)\\
K_4 &\equiv \frac{1}{2}\mathrm{minmod}\left(\frac{\Delta f_{j-1/2}^-}{\Delta f_{j+1/2}^-}, 1\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4.8.6}$$

建立隐式 NND 格式的主要思想在于使用在第 n 时间步的上面这些限制子,一般说有

$$K_j^{n+1}\Delta f_{j+1/2}^{\pm n+1} = K_j^{n}\Delta f_{j+1/2}^{\pm n+1} + \mathrm{O}(\Delta t\Delta x)$$

于是式(4.8.5)可被写为

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{j+1/2} - \tilde{h}_{j-1/2} = h_{j+1/2}^{n} - h_{j-1/2}^{n} + &\\ &\theta(1 + K_1^n - K_3^n)(\delta f_j^{+n+1} - \delta f_{j-1}^{+n+1}) + \\ &\theta(1 - K_2^n + K_4^n)(\delta f_{j+1}^{-n+1} - \delta f_j^{-n+1})\end{aligned}$$

式中

$$\delta f_j^{\pm n+1} \equiv f_j^{\pm n+1} - f_j^{\pm n}$$

又因为

$$\delta f_j^{+n+1} = a_j^{+n}\delta u_j^{n+1} + \mathrm{O}(\Delta t^2)$$

$$\delta f_j^{-n+1} = a_j^{-n}\delta u_j^{n+1} + \mathrm{O}(\Delta t^2)$$

式中

$$\delta u_j^{n+1} \equiv u_j^{n+1} - u_j^{n};\quad a^{+} + a^{-} = a = \frac{\partial f}{\partial u}。$$

于是差分方程(4.8.4)可近似地被写成

$$\hat{a}_{j-1}^{n}\delta u_{j-1}^{n+1} + \hat{b}_j^{n}\delta u_j^{n+1} + \hat{c}_{j+1}^{n}\delta u_{j+1}^{n+1} = -\frac{\Delta t}{\Delta x}(h_{j+1/2}^{n} - h_{j-1/2}^{n}) \tag{4.8.7}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}_{j-1}^{n} &\equiv -\theta\frac{\Delta t}{\Delta x}(1 + K_1^n - K_3^n)a_{j-1}^{+n}\\ \hat{b}_j^{n} &\equiv 1 + \theta\frac{\Delta t}{\Delta x}(1 + K_1^n - K_3^n)a_j^{+n} - \\ &\quad\theta\frac{\Delta t}{\Delta x}(1 - K_2^n + K_4^n)a_j^{-n}\\ \hat{c}_{j+1}^{n} &\equiv \theta\frac{\Delta t}{\Delta x}(1 - K_2^n + K_4^n)a_{j+1}^{-n}\end{aligned}\right\} \tag{4.8.8}$$

{式(4.8.7),式(4.8.8)}称为隐式 NND 格式。当 $\theta=1$ 时,此格式在时间方向为一阶精度,而空间方向是二阶精度。显然,在一维标量情况中,只需求解三对角线性代数方程组。可以证明,$\theta=1$时该格式是一个 TVD 格式,并且是无条件稳定的。

4.9 某些 TVD 格式和它们与 NND 格式的等价性

本节以如下线性常系数标量方程为例说明之

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=0 \tag{4.9.1}$$

式中，$f=au$，a 为常数。

4.9.1 Harten 格式

Harten 格式为[1]

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(h_{j+1/2}^{nH}-h_{j-1/2}^{nH}\right) \tag{4.9.2}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
h_{j+1/2}^{nH}&=\frac{1}{2}\left(\tilde{f}_j^n+\tilde{f}_{j+1}^n-|\bar{a}_{j+1/2}^n|\Delta u_{j+1/2}^n\right)\\
\tilde{f}_j^n&=f_j^n+g_j^n\\
g_j^n&=\mathrm{minmod}\left[\frac{1}{2}\left(|a_{j+1/2}|-a_{j+1/2}^2\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\Delta u_{j+1/2}^n,\right.\\
&\qquad\qquad\left.\frac{1}{2}\left(|a_{j-1/2}|-a_{j-1/2}^2\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\Delta u_{j-1/2}^n\right]\\
\bar{a}_{j+1/2}^n&=a_{j+1/2}+\gamma_{j+1/2}^n\\
\gamma_{j+1/2}^n&=\frac{g_{j+1}^n-g_j^n}{\Delta u_{j+1/2}^n}\\
a_{j+1/2}\frac{\Delta t}{\Delta x}&<1
\end{aligned}\right\} \tag{4.9.3}$$

下面来证明 NND-2 格式与 Harten 格式的等价性。

首先讨论 $a>0$ 的情况。此时，$a^+=a$，$a^-=0$，$f^+=f=au$，$f^-=0$。由式(4.7.6)知

$$\tilde{h}_{j+1/2}^n=f_j^n+\frac{1}{2}\mathrm{minmod}\left[\left(1-a_{j-1/2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\Delta f_{j-1/2}^n,\right.$$

$$\left(1 - a_{j+1/2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\Delta f_{j+1/2}^{n}\right]$$

由于

$$\Delta f_{j-1/2}^{n} = a_{j-1/2}\Delta u_{j-1/2}^{n}$$

$$\Delta f_{j+1/2}^{n} = a_{j+1/2}\Delta u_{j+1/2}^{n}$$

可得

$$\tilde{h}_{j+1/2}^{n} = f_j^n + \frac{1}{2}\text{minmod}\left[\left(|a_{j-1/2}| - a_{j-1/2}^2\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\Delta u_{j-1/2}^{n},\right.$$

$$\left.\left(|a_{j+1/2}| - a_{j+1/2}^2\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\Delta u_{j+1/2}^{n}\right]$$

像 Harten 那样，引入如下定义

$$g_j^n \equiv \frac{1}{2}\text{minmod}\left[\left(|a_{j-1/2}| - a_{j-1/2}^2\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\Delta u_{j-1/2}^{n},\right.$$

$$\left.\left(|a_{j+1/2}| - a_{j+1/2}^2\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\Delta u_{j+1/2}^{n}\right]$$

则有

$$\tilde{h}_{j+1/2}^{n} = f_j^n + g_j^n = \frac{1}{2}\left\{[(f_{j+1}^n + g_{j+1}^n) + (f_j^n + g_j^n)] - \right.$$

$$\left.[(f_{j+1}^n + g_{j+1}^n) - (f_j^n + g_j^n)]\right\}$$

像 Harten 那样，定义

$$\tilde{f}_j^n \equiv f_j^n + g_j^n$$

可得

$$\tilde{h}_{j+1/2}^{n} = \frac{1}{2}\left[\tilde{f}_{j+1}^n + \tilde{f}_j^n - \left(\frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\Delta u_{j+1/2}^n} + \frac{g_{j+1}^n - g_j^n}{\Delta u_{j+1/2}^n}\right)\Delta u_{j+1/2}^n\right]$$

因为 $a_{j+1/2} = \dfrac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\Delta u_{j+1/2}^n}$，再像 Harten 那样定义

$$\gamma_{j+1/2}^n \equiv \frac{g_{j+1}^n - g_j^n}{\Delta u_{j+1/2}^n}, \tilde{a}_{j+1/2}^n \equiv a_{j+1/2} + \gamma_{j+1/2}^n$$

并且可以证明，$\tilde{a}_{j+1/2}^n > 0$，于是最后可得

$$\tilde{h}^n_{j+1/2} = \frac{1}{2}(\bar{f}^n_{j+1} + \bar{f}^n_j - |\bar{a}_{j+1/2}|\Delta u^n_{j+1/2}) = h^{nII}_{j+1/2}$$

对于 $a<0$ 的情况，用类似的方法也可以证明，$\tilde{h}^n_{j+1/2} = h^{nII}_{j+1/2}$。

这样就证明了对线性常系数标量方程(4.9.1)而言，NND-2 格式与 Harten 的二阶精度的 TVD 格式是等价的。

4.9.2 Osher-Chakravarthy 格式

Osher-Chakravarthy 格式为[2]

$$u^{n+1}_j = u^n_j - \frac{\Delta t}{\Delta x}(h^{nOC}_{j+1/2} - h^{nOC}_{j-1/2}) \qquad (4.9.4)$$

式中

$$\begin{aligned} h^{nOC}_{j+1/2} = \frac{1}{2}\{ & f^n_{j+1} + f^n_j - |a_{j+1/2}|\Delta u^n_{j+1/2} + \\ & \text{minmod}(\Delta f^{+n}_{j-1/2}, \beta\Delta f^{+n}_{j+1/2}) - \\ & \text{minmod}(\Delta f^{-n}_{j+1/2}, \beta\Delta f^{-n}_{j+3/2})\} \end{aligned} \qquad (4.9.5)$$

下面来证明 NND-1 格式与 Osher-Chakravarthy 格式的等价性。

由式(4.7.2)知

$$\begin{aligned} \tilde{h}^n_{j+1/2} = h^n_{j+1/2} = {} & f^{+n}_j + \frac{1}{2}\text{minmod}(\Delta f^{+n}_{j-1/2}, \Delta f^{+n}_{j+1/2}) + \\ & f^{-n}_{j+1} - \frac{1}{2}\text{minmod}(\Delta f^{-n}_{j+1/2}, \Delta f^{-n}_{j+3/2}) = \\ & \frac{1}{2}\{(f^{+n}_{j+1} + f^{+n}_j) - (f^{+n}_{j+1} - f^{+n}_j) + \\ & \text{minmod}(\Delta f^{+n}_{j-1/2}, \Delta f^{+n}_{j+1/2}) + \\ & (f^{-n}_{j+1} + f^{-n}_j) + (f^{-n}_{j+1} - f^{-n}_j) - \\ & \text{minmod}(\Delta f^{-n}_{j+1/2}, \Delta f^{-n}_{j+3/2})\} = \\ & \frac{1}{2}\{(f^n_{j+1} + f^n_j) - (a^+_{j+1/2} - a^-_{j+1/2})\Delta u^n_{j+1/2} + \end{aligned}$$

$$\text{minmod}(\Delta f^{+n}_{j-1/2}, \Delta f^{+n}_{j+1/2}) -$$

$$\text{minmod}(\Delta f^{-n}_{j+1/2}, \Delta f^{-n}_{j+3/2})\} =$$

$$\frac{1}{2}\{(f^n_{j+1} + f^n_j) - |a_{j+1/2}| \Delta u^n_{j+1/2} +$$

$$\text{minmod}(\Delta f^{+n}_{j-1/2}, \Delta f^{+n}_{j+1/2}) -$$

$$\text{minmod}(\Delta f^{-n}_{j-1/2}, \Delta f^{-n}_{j+3/2})\} = h^{n\text{OC}}_{j+1/2}|_{\beta=1}$$

这样就证明了对线性常系数标量方程(4.9.1)而言，NND-1格式与 $\beta=1$ 时的 Osher-Chakravarthy 的 TVD 格式是等价的。

4.9.3 Van Leer 格式

Van Leer 格式为[3]

$$u^{n+1}_j = u^n_j - \frac{\Delta t}{\Delta x}(h^{n\text{V}}_{j+1/2} - h^{n\text{V}}_{j-1/2}) \tag{4.9.6}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} h^{n\text{V}}_{j+1/2} &= \frac{1}{2}\{f(u^n_{Rj+1/2}) + f(u^n_{Lj+1/2}) - \\ &\quad \left|\frac{f(u^n_{Rj+1/2}) - f(u^n_{Lj+1/2})}{u^n_{Rj+1/2} - u^n_{Lj+1/2}}\right|(u^n_{Rj+1/2} - u^n_{Lj+1/2}) \\ u^n_{Rj+1/2} &= u^n_{j+1} - \frac{1}{2}\text{minmod}(\Delta u^n_{j+1/2}, \Delta u^n_{j+3/2}) \\ u^n_{Lj+1/2} &= u^n_j + \frac{1}{2}\text{minmod}(\Delta u^n_{j-1/2}, \Delta u^n_{j+1/2}) \end{aligned}\right\} \tag{4.9.7}$$

下面来证明 NND-1 格式与 Van Leer 格式的等价性。

首先讨论 a 为大于零的常数的情况。此时有 $a^+ = a, a^- = 0, f^+ = f, f^- = 0$。由式(4.7.2)知

$$\tilde{h}^n_{j+1/2} = a_j u^n_j + \frac{1}{2}\text{minmod}(a_j \Delta u^n_{j-1/2}, a_j \Delta u^n_{j+1/2}) =$$

$$a_j u^n_{Lj+1/2} = f(u^n_{Lj+1/2}) =$$

$$\frac{1}{2}\{f(u^n_{Rj+1/2})+f(u^n_{Lj+1/2})-[f(u^n_{Rj+1/2})-f(u^n_{Lj+1/2})]\}=\frac{1}{2}\left\{f(u^n_{Rj+1/2})+f(u^n_{Lj+1/2})-\left[\frac{f(u^n_{Rj+1/2})-f(u^n_{Lj+1/2})}{u^n_{Rj+1/2}-u^n_{Lj+1/2}}\right](u^n_{Rj+1/2}-u^n_{Lj+1/2})\right\}$$

因为$\dfrac{f(u^n_{Rj+1/2})-f(u^n_{Lj+1/2})}{u^n_{Rj+1/2}-u^n_{Lj+1/2}}=a>0$,故有

$$\tilde{h}^n_{j+1/2}=\frac{1}{2}\left\{f(u^n_{Rj+1/2})+f(u^n_{Lj+1/2})-\left|\frac{f(u^n_{Rj+1/2})-f(u^n_{Lj+1/2})}{u^n_{Rj+1/2}-u^n_{Lj+1/2}}\right|(u^n_{Rj+1/2}-u^n_{Lj+1/2})\right\}=h^{n\,V}_{j+1/2}。$$

再来讨论 a 为负常数的情况。此时有 $a^+=0, a^-=a, f^+=0, f^-=f$。由式(4.7.2)知

$$\tilde{h}^n_{j+1/2}=a_{j+1}u^n_{j+1}-\frac{1}{2}\text{minmod}(a_{j+1}\Delta u^n_{j+1/2},a_{j+1}\Delta u^n_{j+3/2})=a_{j+1}u^n_{Rj+1/2}=f(u^n_{Rj+1/2})=\frac{1}{2}\{f(u^n_{Rj+1/2})+f(u^n_{Lj+1/2})+[f(u^n_{Rj+1/2})-f(u^n_{Lj+1/2})]\}=\frac{1}{2}\left\{f(u^n_{Rj+1/2})+f(u^n_{Lj+1/2})+\left[\frac{f(u^n_{Rj+1/2})-f(u^n_{Lj+1/2})}{u^n_{Rj+1/2}-u^n_{Lj+1/2}}\right](u^n_{Rj-1/2}-u^n_{Lj+1/2})\right\}$$

因为此时

$$\frac{f(u^n_{Rj+1/2})-f(u^n_{Lj+1/2})}{u^n_{Rj+1/2}-u^n_{Lj+1/2}}=a<0,\text{故有}$$

$$\tilde{h}^n_{j+1/2}=\frac{1}{2}\left\{f(u^n_{Rj+1/2})+f(u^n_{Lj+1/2})-\left|\frac{f(u^n_{Rj+1/2})-f(u^n_{Lj+1/2})}{u^n_{Rj+1/2}-u^n_{Lj+1/2}}\right|(u^n_{Rj+1/2}-u^n_{Lj+1/2})\right\}=h^{n\,V}_{j+1/2}$$

这样就证明了对于线性常系数标量方程(4.9.1)而言,NND-1

格式与 Van Leer 格式是等价的。

4.10 激波附近数值解波动问题的分析和 TVD 格式

在第 2 章 2.12 节中，曾对差分计算中激波附近数值解的波动问题作过分析。该分析的出发方程是

$$a\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{4.10.1}$$

式中

$$\begin{aligned}a&=\frac{\gamma+1}{2\gamma}\rho_\infty u_\infty\frac{1}{\rho}\left(1-\frac{u_2u_\infty}{u^2}\right)\\&=\frac{\gamma+1}{2\gamma}u\left(1-\frac{u_2u_\infty}{u^2}\right)=\frac{\gamma+1}{2\gamma}\left(u-\frac{u_2u_\infty}{u}\right)\end{aligned} \tag{4.10.2}$$

式中，u_∞为激波前来流速度；u_2 为激波后速度，且

$$u_2=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left[1+\frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M^2_{a_\infty}}\right]u_\infty \tag{4.10.3}$$

$$\nu=\frac{4}{3}\mu$$

由式(4.10.2)可以看出，当 $Ma^2_\infty>1$ 时，在 $x\to-\infty$，$u\to u_\infty$ 时，$a\to\frac{\gamma+1}{2\gamma}(u_\infty-u_2)>0$；而在 $x\to+\infty$，$u\to u_2$ 时，$a\to\frac{\gamma+1}{2\gamma}\times(u_2-u_\infty)<0$。

第 2 章中的有关分析已经指出，若方程(4.10.1)的某个差分格式的修正方程式为

$$a\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[(\nu+\nu_2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\nu_3\frac{\partial^3u}{\partial x^3}+\cdots$$

则有如下几点结论。

(1) 对于一阶格式而言

当 $\nu_2>0$，$\nu_3>0$ 时，在激波上游，不管 ν_2 多么小都不出现波动；但在激波下游，当 ν_2 小时会出现波动。

当 $\nu_2>0$，$\nu_3<0$ 时，在激波下游，不管 ν_2 多么小都不出现波动；但在激波上游，当 ν_2 小时会出现波动。

由此可见，若正确地选取 ν_3，使之在激波上游 $\nu_3>0$，而在激波下游 $\nu_3<0$，则即使是具有小的 ν_2 的一阶格式，其数值解在激波附近也不出现波动，或者即使有波动也是很小的波动。

(2) 对于二阶格式而言

当 $\nu_3>0$ 时，在激波上游不会出现波动，但在激波下游将有波动。

当 $\nu_3<0$ 时，在激波下游不会出现波动，但在激波上游将有波动。

由此可见，若正确地选取 ν_3，使之在激波上游 $\nu_3>0$，而在激波下游 $\nu_3<0$，则该二阶格式的数值解在激波上、下游都不出现波动或者即使有波动也是很小的波动。

将上面两个结论合在一起，可以得到以下结论。

在构造一阶或二阶差分格式时，为了能高分辨率地捕捉激波(即在激波附近不出现波动或只有小波动)，应该保证所构造的差分格式的修正方程式中的 ν_3 满足如下要求：在激波上游 $\nu_3>0$，而在激波下游 $\nu_3<0$。另一方面，为了差分格式的稳定性，对于一阶格式要求 $\nu_2>0$，而对于二阶格式则要求 $\nu_4<0$。

下面，将从这个观点出发来重新构造 Harten 的二阶 TVD 格式。

研究如下线性标量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=0 \tag{4.10.4}$$

式中，$f=au$，a 为常数。

在第 2 章中已经证明，若用如下一阶迎风格式来离散方程(4.10.4)，即

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}(f_j^{+n}-f_{j-1}^{+n}+f_{j+1}^{-n}-f_j^{-n})$$

则其格式黏性项为

$$\frac{1}{2}|a|\Delta x\left(1-\frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

为了达到仍采用一阶迎风格式而得到方程(4.10.4)的二阶差分格式,首先根据反扩散的思想对方程(4.10.4)作如下修正

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{1}{2}|a|\Delta x\left(1-\frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

将上面方程改写成

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[f+g]=0 \qquad (4.10.5)$$

式中

$$g=\frac{1}{2}|a|\Delta x\left(1-\frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (4.10.6)$$

用一阶迎风格式来离散方程(4.10.5)得

$$\begin{aligned}u_j^{n+1}=u_j^n-&\frac{\Delta t}{2\Delta x}[(f_{j+1}^n+g_{j+1}^n)-(f_{j-1}^n+g_{j-1}^n)]+\\&\frac{\Delta t}{2\Delta x}\Big\{[(f_{j+1}^{+n}+g_{j+1}^{+n})-(f_j^{+n}+g_j^{+n})]-\\&[(f_j^{+n}+g_j^{+n})-(f_{j-1}^{+n}+g_{j-1}^{+n})]-\\&[(f_{j+1}^{-n}+g_{j+1}^{-n})-(f_j^{-n}+g_j^{-n})]+\\&[(f_j^{-n}+g_j^{-n})-(f_{j-1}^{-n}+g_{j-1}^{-n})]\Big\}\end{aligned}$$

该式可写成

$$\begin{aligned}u_j^{n+1}=u_j^n-&\frac{\Delta t}{2\Delta x}[(f_{j+1}^n+g_{j+1}^n)-(f_{j-1}^n+g_{j-1}^n)]+\\&\frac{\Delta t}{2\Delta x}|\tilde{a}|(\Delta u_{j+1/2}^n-\Delta u_{j-1/2}^n)\end{aligned} \qquad (4.10.7)$$

式中,$\tilde{a}=\dfrac{\partial(f+g)}{\partial u}$;$|\tilde{a}|=\tilde{a}^+-\tilde{a}^-$。

经整理后,上式可改写为

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}(\tilde{h}_{j+1/2}^n-\tilde{h}_{j-1/2}^n) \qquad (4.10.8)$$

式中

$$\tilde{h}_{j+1/2}^{n} = \frac{1}{2}(\tilde{f}_j^n + \tilde{f}_{j+1}^n - |\bar{a}|\Delta u_{j+1/2}^n) \tag{4.10.9}$$

$$\tilde{f}_j^n = f_j^n + g_j^n \tag{4.10.10}$$

到目前为止,还未涉及如何对 g 进行离散。由式(4.10.6)知

$$g_j = \frac{1}{2}|a|\Delta x\left(1 - \frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j \tag{4.10.11}$$

上式中的 $\Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j$ 应如何计算?从希望构造方程(4.10.4)的二阶格式的角度来看,$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j$ 的计算只需用一阶差商就行了。于是有两种可能的算法

$$\Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \begin{cases} u_j - u_{j-1} = \Delta u_{j-1/2} \\ u_{j+1} - u_j = \Delta u_{j+1/2} \end{cases} \tag{4.10.12}$$

究竟应该选择式(4.10.12)中的哪个表达式呢?我们所依据的原则是使得在激波上游产生 $\gamma_3>0$,而在激波下游产生 $\gamma_3<0$。

将 $\Delta u_{j+1/2}$和 $\Delta u_{j-1/2}$进行 Taylor 展开,得

$$\Delta u_{j+1/2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j\Delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j\Delta x^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j\Delta x^3 + \cdots$$

$$\Delta u_{j-1/2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j\Delta x - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j\Delta x^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j\Delta x^3 + \cdots$$

由此可知,若取 $\Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \Delta u_{j+1/2}$,则

$$g = \frac{1}{2}|a|\Delta x\left(1 - \frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\Delta x + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\Delta x^2 + \cdots\right]$$

将它代入方程(4.10.5),将产生

$$\nu_3 = -\frac{1}{4}|a|(\Delta x)^2\left(1 - \frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\right) < 0$$

$$\nu_4 = -\frac{1}{12}|a|(\Delta x)^3\left(1 - \frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\right) < 0$$

反之,若取 $\Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \Delta u_{j-1/2}$,则

$$g = \frac{1}{2}|a|\Delta x\left(1 - \frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\Delta x + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\Delta x^2 + \cdots\right]$$

将它代入方程(4.10.5),将产生

$$\nu_3 = \frac{1}{4}|a|(\Delta x)^2\left(1 - \frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\right) > 0$$

$$\nu_4 = -\frac{1}{12}|a|(\Delta x)^3\left(1 - \frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\right) < 0$$

由上面的分析可知,若在激波上游计算中取 $\Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \Delta u_{j-1/2}$,则可产生 $\nu_3 > 0$, $\nu_4 < 0$;反之若在激波下游计算中取 $\Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \Delta u_{j+1/2}$,则可产生 $\nu_3 < 0$ 和 $\nu_4 < 0$。因此,结论是 g 应按如下方式进行离散

$$g_j = \begin{cases} \frac{1}{2}|a|\left(1 - \frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\right)\Delta u_{j-1/2}, & \text{激波上游} \\ \frac{1}{2}|a|\left(1 - \frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\right)\Delta u_{j+1/2}, & \text{激波下游} \end{cases} \tag{4.10.13}$$

另一方面,在等距网格情况下,在激波上游有 $|\Delta u_{j-1/2}| < |\Delta u_{j+1/2}|$,而在激波下游则有 $|\Delta u_{j+1/2}| < |\Delta u_{j-1/2}|$。于是式(4.10.13)表明,在 g_j 的计算中,不管是在激波上游,还是在激波下游,总是取 $\Delta u_{j-1/2}$ 和 $\Delta u_{j+1/2}$ 中绝对值小的那一个。如果再加一个要求,当 $\Delta u_{j-1/2}$ 和 $\Delta u_{j+1/2}$ 异号时,用一阶迎风格式,即 $g = 0$,则式(4.10.13)可写成如下统一表达式

$$g_j = \frac{1}{2}|a|\left(1 - \frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\right)\mathrm{minmod}(\Delta u_{j-1/2}, \Delta u_{j+1/2}) \tag{4.10.14}$$

与式(4.9.3)对照可知,这就是 Harten 的二阶 TVD 格式。

根据上面的分析知,Harten 的二阶 TVD 格式在激波上游具有 $\nu_3>0$,而在激波下游则有 $\nu_3<0$。这就保证了用 Harten 的二阶 TVD 格式计算带激波的流动时,在激波上、下游数值解都不出现波动,或者只有很小的波动。

第 5 章　高精度差分格式

5.1　研究高阶精度差分格式的必要性

在任意贴体曲线坐标系中，支配可压缩黏性非定常流动的无量纲形式的 NaVier-Stokes 方程为[1]

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau}+\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi}+\frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta}+\frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta}=\frac{1}{Re_L}\left(\frac{\partial \hat{E}_v}{\partial \xi}+\frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \eta}+\frac{\partial \hat{G}_v}{\partial \zeta}\right) \tag{5.1.1}$$

式中

$$\hat{Q}=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ E_t\end{bmatrix};\quad \hat{E}=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\rho U\\ \rho uU+\xi_x p\\ \rho vU+\xi_y p\\ \rho wU+\xi_z p\\ (E_t+p)U-\xi_t p\end{bmatrix};$$

$$\hat{F}=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\rho V\\ \rho uV+\eta_x p\\ \rho vV+\eta_y p\\ \rho wV+\eta_z p\\ (E_t+p)V-\eta_t p\end{bmatrix};\quad \hat{G}=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\rho W\\ \rho uW+\zeta_x p\\ \rho vW+\zeta_y p\\ \rho wW+\zeta_z p\\ (E_t+p)W-\zeta_t p\end{bmatrix};$$

$$\hat{E}_v = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} 0 \\ Re_L(\xi_x\tau_{xx} + \xi_y\tau_{xy} + \xi_z\tau_{xz}) \\ Re_L(\xi_x\tau_{xy} + \xi_y\tau_{yy} + \xi_z\tau_{yz}) \\ Re_L(\xi_x\tau_{xz} + \xi_y\tau_{yz} + \xi_z\tau_{zz}) \\ Re_L(\xi_x K_x + \xi_y K_y + \xi_z K_z) \end{bmatrix};$$

$$\hat{F}_v = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} 0 \\ Re_L(\eta_x\tau_{xx} + \eta_y\tau_{xy} + \eta_z\tau_{xz}) \\ Re_L(\eta_x\tau_{xy} + \eta_y\tau_{yy} + \eta_z\tau_{yz}) \\ Re_L(\eta_x\tau_{xz} + \eta_y\tau_{yz} + \eta_z\tau_{zz}) \\ Re_L(\eta_x K_x + \eta_y K_y + \eta_z K_z) \end{bmatrix};$$

$$\hat{G}_v = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} 0 \\ Re_L(\zeta_x\tau_{xx} + \zeta_y\tau_{xy} + \zeta_z\tau_{xz}) \\ Re_L(\zeta_x\tau_{xy} + \zeta_y\tau_{yy} + \zeta_z\tau_{yz}) \\ Re_L(\zeta_x\tau_{xz} + \zeta_y\tau_{yz} + \zeta_z\tau_{zz}) \\ Re_L(\zeta_x K_x + \zeta_y K_y + \zeta_z K_z) \end{bmatrix};$$

$$K_x = u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x;$$

$$K_y = u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y;$$

$$K_z = u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z;$$

$$E_t = \rho\left[e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\right] =$$

$$\rho\left[\frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\right];$$

U,V,W 分别为沿 ξ,η,ζ 坐标的逆变速度，它们的表达式为

$$U = \xi_t + \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w$$

$$V = \eta_t + \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w$$

$$W = \zeta_t + \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w$$

坐标转换关系为

$$\tau = t$$
$$\xi = \xi(t, x, y, z)$$
$$\eta = \eta(t, x, y, z)$$
$$\zeta = \zeta(t, x, y, z)$$

J 为坐标转换 Jacobian 行列式

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{vmatrix}$$

应该指出，$\hat{E}_v$，$\hat{F}_v$ 和 $\hat{G}_v$ 中包含黏性应力张量诸分量和导热向量的诸分量，它们所含有的诸导数也应作相应的坐标变换。仅以 τ_{xy}为例说明之。

$$\tau_{xy} = \frac{\mu}{Re_L}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$= \frac{\mu}{Re_L}\left(\xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \xi_x \frac{\partial v}{\partial x} + \eta_x \frac{\partial v}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial v}{\partial \zeta}\right)$$

若用 m 阶精度的差分格式来离散式(5.1.1)，则与该差分格式等价的修正方程式可表示为

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} = \frac{(\Delta\xi)^\alpha}{Re_L(\Delta\xi)^\alpha}\frac{\partial \hat{E}_v}{\partial \xi} + \frac{(\Delta\eta)^\beta}{Re_L(\Delta\eta)^\beta}\frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \eta} + \frac{(\Delta\zeta)^\gamma}{Re_L(\Delta\zeta)^\gamma}\frac{\partial \hat{G}_v}{\partial \zeta} + O((\Delta\xi)^m, (\Delta\eta)^m, (\Delta\zeta)^m)$$

选取 α, β, γ 为

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\lg Re_L}{\lg(\Delta\xi)} \\ \beta &= -\frac{\lg Re_L}{\lg(\Delta\eta)} \\ \gamma &= -\frac{\lg Re_L}{\lg(\Delta\zeta)} \end{aligned}\right\} \tag{5.1.2}$$

于是有 $Re_L(\Delta\xi)^{\alpha}=Re_L(\Delta\eta)^{\beta}=Re_L(\Delta\zeta)^{\gamma}=1$,则上式可写成

$$\frac{\partial\hat{Q}}{\partial\tau}+\frac{\partial\hat{E}}{\partial\xi}+\frac{\partial\hat{F}}{\partial\eta}+\frac{\partial\hat{G}}{\partial\zeta}=(\Delta\xi)^{\alpha}\frac{\partial\hat{E}_v}{\partial\xi}+(\Delta\eta)^{\beta}\frac{\partial\hat{F}_v}{\partial\eta}+ (\Delta\zeta)^{\gamma}\frac{\partial\hat{G}_v}{\partial\zeta}+O((\Delta\xi)^m,(\Delta\eta)^m,(\Delta\zeta)^m) \tag{5.1.3}$$

上式表明,对于高 Reynolds 流动,除非$\partial\hat{E}_v/\partial\xi,\partial\hat{F}_v/\partial\eta,\partial\hat{G}_v/\partial\zeta$很大,黏性项的贡献是比较小的。在这种黏性项的贡献小但必须考虑的情况下,若要用差分方法正确计算这些小量项的贡献,必须要求截断误差项的贡献比黏性项的贡献小得多。反之,若在所讨论的流动区域内,所采用的网格和计算格式使得 $\alpha>m$,则 ξ 方向的黏性项的贡献被落入截断误差的范围;同样,如果 $\beta>m$ 或者 $\gamma>m$,则 η 或者 ζ 方向的黏性项的贡献将落入截断误差的范围。只有当 α,β,γ 分别小于或远小于 m 时,所采用的网格和差分格式才能比较正确地计算各个方向的黏性项的贡献。当 α,β,γ 分别取为 m 时,式(5.1.2)就可以给出 ξ,η,ζ 方向的临界网格间距 $\Delta\xi^*$,$\Delta\eta^*$ 和 $\Delta\zeta^*$。当实际计算中所采用的网格间距 $\Delta\xi$,$\Delta\eta$ 和 $\Delta\zeta$ 分别小于或远小于临界网格间距时,ξ,η,ζ 方向的黏性效应就能被正确计入。据此可用上述判据来设计网格间距以及网格点的数目。

今以 $Re_L=10^6$ 为例,随着格式精度的阶数 m 的变化,$\Delta\xi^*$ 的大小,从而 ξ 方向的网格数的变化情况近似地如表 5-1 所示。

表 5-1 $Re_L=10^6$ 时,ξ 方向的临界网格数 N_ξ^* 随格式精度的阶数 m 变化的情况

m	$\Delta\xi^*$	$N_\xi^*=1/\Delta\xi^*$
2	0.001	1000
3	0.01	100
4	0.0316	32
5	0.0631	16

现以细长物体绕流问题作进一步说明。通常求解域在 η 和 ζ 方向的宽度约为 ξ 方向长度的十分之一。由此可知，对于 $Re_L=10^6$ 的情况，若采用二阶精度的格式，所需要的总网格数约为 10^7；而若采用三阶精度的格式，则所需要的总网格数约为 10^4。

除此之外，许多物理现象中存在变化范围很大的空间和时间尺度，湍流流动就是一个常见的例子。这些多尺度物理现象的直接数值模拟要求所有有关尺度在数值计算中被适当地体现出来，这对于计算方法提出了很高的要求。在湍流的大涡模拟(LES)及直接数值模拟(DNS)、计算电磁学(CEM)和计算气动声学(CAA)中，高精度和高分辨率要求已成为技术发展中的一个决定性因素。因此，高精度、高分辨率计算格式的研究具有十分重要的意义。在近 20～30 年中它一直是计算流体力学中的前沿研究课题。

5.2 构造高阶精度差分格式应遵循的原则

在构造差分格式时，应注意以下两个问题。

(1) 与差分方程等价的修正方程式与原来的微分方程是有差别的，它们各自的精确解间也存在差别。原微分方程是没有非物理的虚假波动解的；但如果差分格式设计不好，差分方程的精确解就可能包含非物理的虚假波动。在低价精度格式的情况下，这种波动不是很小的，因此应该避免这种波动。对于高阶精度的格式，由于截断误差很小，差分方程和微分方程的精确解之间彼此差别甚小，即使有虚假波动也是微小的，因此避免这种波动的要求可能放松。

(2) 在求差分方程的数值解时，不可避免地会引入误差，这些误差在计算过程中应能自动衰减并且不产生新的虚假波动。这一点对于高阶精度格式特别重要。因为例如当采用高阶精度差分格式计算湍流时，如果计算格式会产生虚假波动或在计算过程中不能自动消除误差，就有可能将虚假的波动误认为湍流。基于这种认识，在构造高阶精度差分格式时，应特别注意求解计算过程中计

算误差的发展问题。我们要求计算误差在计算过程中是自动衰减的,并且不进一步生成新的虚假波动。与此相应,提出了构造高阶精度差分格式的“稳定性原则”和“抑制波动原则”[2]。

为了便于说明问题,这里以求解 Euler 方程为例说明之。由于三维非定常 Euler 方程可分裂成三个一维方程依次求解,因此从以下一维方程出发

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}=0 \tag{5.2.1}$$

下面在通量 $\boldsymbol{E}$ 的 Jacobian 矩阵 $\boldsymbol{A}=\partial \boldsymbol{E}/\partial \boldsymbol{U}$ 为常系数矩阵的假定下讨论问题。

根据第 4 章 4.6 节中的讨论知,式(5.2.1)可化为

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}+\boldsymbol{\Lambda}\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial x}=0 \tag{5.2.2}$$

式中,$\boldsymbol{W}\equiv \boldsymbol{TU}$;$\boldsymbol{\Lambda}\equiv \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)$,它是 $\boldsymbol{A}$ 的特征对角矩阵;$\boldsymbol{T}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的左特征向量组成的矩阵;$\boldsymbol{W}=[w_1,w_2,\cdots,w_m]^{\mathrm{T}}$。

由式(5.2.2)可得

$$\frac{\partial w_l}{\partial t}+\lambda_l\frac{\partial w_l}{\partial x}=0,(l=1,2,\cdots,m) \tag{5.2.3}$$

令 $u=w_l,a=\lambda_l$,则有

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{5.2.4}$$

现在来研究以上方程的数值求解问题。如果采用某差分格式求解式(5.2.4),并将该差分格式的修正方程式表示为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{n=2}^{\infty}\gamma_n\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \tag{5.2.5}$$

这里,$\gamma_n=k_n\Delta x^{n-1}$为截断误差中第 n 阶导数项的系数。

设 $u_0(x,t)$是修正方程式(5.2.5)的精确解,在计算过程中,由于不可避免地要引入误差 $\varepsilon(x,t)$,因此得到的数值解为 $u=u_0(x,t)+\varepsilon(x,t)$。显然误差 $\varepsilon(x,t)$也应满足式(5.2.5)。

如果在初始时刻 $t=0$ 时,已知误差的分布为

$$\epsilon(x,0) = Ae^{ikx} \tag{5.2.6}$$

式中 A 为小量,k 为正数。则初值问题表示式(5.2.5)、(5.2.6)的解为

$$\epsilon(x,t) = Ae^{\alpha t}e^{ik(x-bt)} \tag{5.2.7}$$

式中

$$\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m}(-1)^m k^{2m} \tag{5.2.8}$$

$$b = a - \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m+1}(-1)^m k^{2m} \tag{5.2.9}$$

另一方面,微分方程的初值问题表示式(5.2.4)、(5.2.6)的精确解是

$$u = Ae^{ik(x-at)} \tag{5.2.10}$$

它表明,扰动或间断以 $dx/dt = a$ 的速度传播。

比较式(5.2.7)和式(5.2.10)可以看出,由于截断误差的存在,振幅和波的传播速度都改变了。振幅的变化,直接影响误差的放大和缩小,即影响计算的稳定性;波的传播速度的变化,直接影响间断附近解的波动。

下面根据这两个方面,提出增强计算稳定性和减小间断附近波动的措施或原则。

5.2.1 抑制波动原则

在(x,t)平面上,$dx/dt = D$ 表示一维间断的传播速度,$dx/dt = \zeta_L$ 和 $dx/dt = \zeta_R$ 分别表示 $x - Dt = 0$ 左、右两方扰动传播速度(参见图 5-1)。

根据第 1 章 1.5 节中所述,熵增条件是

$$\zeta_L > D > \zeta_R$$

在现在的情况下,由于方程被线化,间断退化为扰动波,但截断误差中的色散项改变了原间断 $x - at = 0$ 左、右两方扰动传播

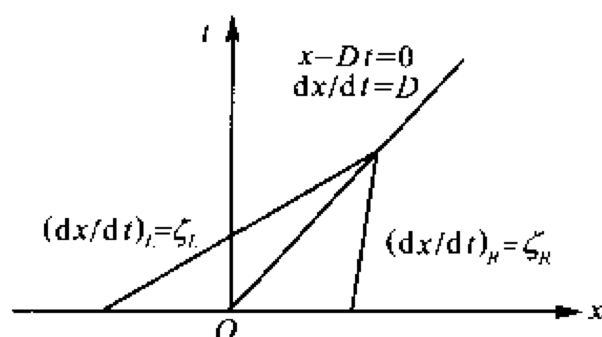


图 5-1　间断和扰动传播图

的速度。如果按熵增原则来设计色散项，使之在间断左方(L)和右方(R)满足

$$b_L = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_L > a > \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_R = b_R$$

则可抑制间断附近的波动。将式(5.2.9)代入上式，这个条件可写成以下形式。

在间断左方(L)

$$\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \gamma_{2m+1} k^{2m} < 0 \tag{5.2.11}$$

在间断右方(R)

$$\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \gamma_{2m+1} k^{2m} > 0 \tag{5.2.12}$$

由于 $\gamma_m = k_m \Delta x^{m-1}$，当 Δx 很小时，式(5.2.11)和式(5.2.12)中最领前的一项是主项，略去其它项后，式(5.2.11)和式(5.2.12)分别给出

$$\text{间断左方}:(-1)^m \gamma_{2m+1} < 0 \tag{5.2.13}$$

$$\text{间断右方}:(-1)^m \gamma_{2m+1} > 0 \tag{5.2.14}$$

5.2.2　稳定性原则

式(5.2.7)和式(5.2.8)表明，如果 $\alpha < 0$，即

$$\sum_{m-1}^{\infty}(-1)^m \gamma_{2m} k^{2m} < 0 \tag{5.2.15}$$

则随着时间增长，误差的振幅是减小的，这正是保证计算过程的稳定性所要求的，因此式(5.2.15)是稳定性原则。如果仅考虑主项，式(5.2.15)可近似地写成

$$(-1)^m \gamma_{2m} < 0 \tag{5.2.16}$$

若干典型问题的数值试验结果表明，对于构造高阶精度格式而言，上述“抑制波动原则”和“稳定性原则”是重要的。满足这两个原则的二阶格式，可在全区获得无波动的结果；满足这两个原则的更高阶(如三阶、四阶)格式，除在激波处有小的波动外，均可获得具有比二阶格式更高分辨率的结果。其不足之处是这样设计的三阶、四阶格式，在激波附近还有小的波动。为了克服这个不足，又提出了“熵增条件”[3]。下面来导出这个熵增条件。

5.2.3 熵增条件

首先，由第2章2.12节知，一维定常正激波流动的支配方程是

$$a\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\nu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) = 0 \tag{5.2.17}$$

式中

$$a \equiv \frac{\gamma+1}{2\gamma}\rho_\infty u_\infty\left[1 - \frac{u_2 u_\infty}{u^2}\right];$$

$$u_2 \equiv \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left[1 + \frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{Ma_\infty^2}\right]u_\infty;$$

$$\nu = \frac{4}{3}\mu。$$

若采用 N 阶精度格式来求解式(5.2.17)，则该 N 阶格式的修正方程式可写为

$$a\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\gamma\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) = \gamma_{N+1}\frac{\mathrm{d}^{N+1}u}{\mathrm{d}x^{N+1}} \tag{5.2.18}$$

积分上方程，并应用边界条件：当 $x = -\infty$ 时，$u = u_\infty$，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 0$ 及

$\frac{d^N u}{dx^N}=0$,可得

$$\nu \frac{du}{dx} + \nu_{N+1} \frac{d^N u}{dx^N} = \frac{\gamma+1}{2\gamma}\rho_\infty u_\infty \frac{(u-u_\infty)(u-u_2)}{u} \tag{5.2.19}$$

可将上式改写成

$$\left[\nu + \frac{\nu_{N+1} \dfrac{du}{dx} \dfrac{d^N u}{dx^N}}{\left(\dfrac{du}{dx}\right)^2}\right]\frac{du}{dx} = \frac{\gamma+1}{2\gamma}\rho_\infty u_\infty \frac{(u-u_\infty)(u-u_2)}{u} \tag{5.2.20}$$

对于所讨论的定常正激波流动而言,有

$$0 < u_2 < u < u_\infty$$

因而,如果

$$\nu_{N+1}\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^N u}{dx^N}\right) > 0 \tag{5.2.21}$$

则在整个激波区内$\frac{du}{dx}<0$,也就是说,不出现(du/dx)变号的波动。

下面来证明,式(5.2.21)是熵增条件。

若用某个 N 阶精度格式来求解一维 Navier-Stokes 方程,则该格式相应的修正方程组可写成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \nu_{N+1}\frac{\partial^{N+1} u}{\partial x^{N+1}}$$

$$\frac{\partial[\rho(e+u^2/2)]}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[\rho u(e+u^2/2) + pu] =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4}{3}\mu u \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_{N+1} u \frac{\partial^N u}{\partial x^N}\right)$$

在 μ 为常数的近似假设下，利用上述方程组，由热力学第一定律可得

$$\rho T\frac{DS}{Dt}=\rho\frac{De}{Dt}+\rho p\frac{D\left(\frac{1}{\rho}\right)}{Dt}=\frac{4}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\nu_{N+1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^N u}{\partial x^N}\right) \tag{5.2.22}$$

显然，条件式(5.2.21)保证了$\frac{DS}{Dt}>0$，故称式(5.2.21)为"熵增条件"。

对应于模型方程(5.2.4)，或改写成

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

$$f=au \qquad a=\text{const}$$

上述"熵增条件"可表述为

$$\nu_{N+1}\left(\frac{\partial^N f}{\partial x^N}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)>0 \tag{5.2.23}$$

该"熵增条件"可被直接推广到 Euler 方程和 Navier-Stokes 方程的情况。此时，f 表示正和负通量，ν_{N+1}是 N 阶格式的修正方程式截断误差首项的系数。

综上所述，构造差分格式时应该使它满足"抑制波动原则"、"稳定性原则"以及在激波处的"熵增原则"。现归纳如下。

二阶格式应该满足的要求如下。

激波上游：$\nu_3>0$

激波下游：$\nu_3<0$

整个区域：$\nu_4<0$

在激波处：$\nu_3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)>0$

三阶格式应该满足的要求如下。

激波上游：$\nu_5<0$

激波下游：$\nu_5>0$

整个区域：$\nu_4<0$

在激波处：$\nu_4\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)>0$

四阶格式应该满足的要求如下。

激波上游：$\nu_5<0$

激波下游：$\nu_5>0$

整个区域：$\nu_6>0$

在激波处：$\nu_5\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)>0$

五阶格式应该满足的要求如下。

激波上游：$\nu_7>0$

激波下游：$\nu_7<0$

整个区域：$\nu_6>0$

在激波处：$\nu_6\left(\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)>0$

5.3 三阶 ENN 格式

为简单起见，研究如下一个变量的非线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0 \tag{5.3.1}$$

式中通量 f 可按其 Jacobian 矩阵的特征值的正、负分解为正、负通量 f^+ 和 f^- 之和，即

$$f=f^++f^- \tag{5.3.2}$$

设网格结点是等间距的，第 j 个结点的位置以 x_j 表示，网格

间距为 Δx。又设 $x_{j-\frac{1}{2}}$ 和 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 分别是结点 x_{j-1}, x_j 以及 x_j, x_{j+1} 的中点。

将式(5.3.1)对 x 积分，由 $x_{j-\frac{1}{2}}$ 积到 $x_{j+\frac{1}{2}}$，可得

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x}\left(f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}\right) \tag{5.3.3}$$

式中

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u\,\mathrm{d}x \tag{5.3.4}$$

利用式(5.3.2)，可将 $f_{j+\frac{1}{2}}$ 表达为

$$f_{j+\frac{1}{2}} = f^{+}_{j+\frac{1}{2}} + f_{j+\frac{1}{2}} \tag{5.3.5}$$

现在假设，在 x_j 附近，u 的变化可用二次多项式来表达，即

$$u = u_j + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j (x - x_j) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j (x - x_j)^2$$

将此式代入式(5.3.4)，完成积分后，得到

$$\bar{u} = u_j + \frac{1}{24}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j \Delta x^2$$

将此式代入式(5.3.3)，并利用式(5.3.1)，可以得到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j = -\frac{1}{\Delta x}\left\{\left[f_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{24}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{j+\frac{1}{2}}\Delta x^2\right] - \left[f_{j-\frac{1}{2}} - \frac{1}{24}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{j-\frac{1}{2}}\Delta x^2\right]\right\} + O(\Delta x^3) \tag{5.3.6}$$

这里，在不影响所论精度的前提下利用了如下近似

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_j \Delta x = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{j-\frac{1}{2}}$$

将式(5.3.5)代入式(5.3.6),可得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j = -\frac{1}{\Delta x}(h_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}}) \tag{5.3.7}$$

式中

$$h_{j+\frac{1}{2}} = h^+_{j+\frac{1}{2}} + h^-_{j+\frac{1}{2}} \tag{5.3.8}$$

$$\left.\begin{aligned} h^+_{j+\frac{1}{2}} &= f^+_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{24}\left(\frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2}\right)_{j+\frac{1}{2}}\Delta x^2 \\ h^-_{j+\frac{1}{2}} &= f^-_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{24}\left(\frac{\partial^2 f^-}{\partial x^2}\right)_{j+\frac{1}{2}}\Delta x^2 \end{aligned}\right\} \tag{5.3.9}$$

假设在 x_j 和 x_{j+1} 点附近,f^+ 和 f^- 分别是按二次曲线规律变化的,即有

$$f^+_{j+\frac{1}{2}} = f^+_j + \left(\frac{\partial f^+}{\partial x}\right)_j \frac{1}{2}\Delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2}\right)_j \left(\frac{1}{2}\Delta x\right)^2$$

$$f^-_{j+\frac{1}{2}} = f^-_{j+1} - \left(\frac{\partial f^-}{\partial x}\right)\frac{1}{2}\Delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f^-}{\partial x^2}\right)_j \left(\frac{1}{2}\Delta x\right)^2$$

将此两式代入式(5.3.9),在不影响精度的前提下,可以给出

$$\left.\begin{aligned} h^+_{j+\frac{1}{2}} &= f^+_j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^+}{\partial x}\right)_j \Delta x + \frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2}\right)_j \Delta x^2 \\ h^-_{j+\frac{1}{2}} &= f^-_{j+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^-}{\partial x}\right)_j \Delta x + \frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2 f^-}{\partial x^2}\right)_j \Delta x^2 \end{aligned}\right\} \tag{5.3.10}$$

下面先讨论 $h^+_{j+\frac{1}{2}}$ 的计算。利用 Taylor 展开公式可得

$$\left(\frac{\partial f^+}{\partial x}\right)_j = \frac{\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2}\right)_{j+\frac{1}{2}} \Delta x + O(\Delta x^2) \tag{5.3.11}$$

式中 $\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}} = f^+_{j+1} - f^+_j$，或者

$$\left(\frac{\partial f^+}{\partial x}\right)_j = \frac{\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2}\right)_{j-\frac{1}{2}} \Delta x + O(\Delta x^2) \tag{5.3.12}$$

将式(5.3.11)代入式(5.3.10)第一式，得到

$$h^+_{j+\frac{1}{2}} = f^+_j + \frac{1}{2}\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2}\right)_{j+\frac{1}{2}} \Delta x^2 + O(\Delta x^3) \tag{5.3.13}$$

将式(5.3.12)代入式(5.3.10)第一式，则得到

$$h^+_{j+\frac{1}{2}} = f^+_j + \frac{1}{2}\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2}\right)_{j-\frac{1}{2}} \Delta x^2 + O(\Delta x^3) \tag{5.3.14}$$

由于$\left(\frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2}\right)_{j+\frac{1}{2}}$和$\left(\frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2}\right)_{j-\frac{1}{2}}$可分别表示为

$$\left(\frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2}\right)_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \dfrac{\Delta f^+_{j+\frac{3}{2}} - \Delta f^+_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} + O(\Delta x) \\[2ex] \dfrac{\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}} - \Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} + O(\Delta x) \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2}\right)_{j-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \dfrac{\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}} - \Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} + O(\Delta x) \\ \dfrac{\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}} - \Delta f^+_{j-\frac{3}{2}}}{\Delta x^2} + O(\Delta x) \end{cases}$$

于是式(5.3.13)和式(5.3.14)可分别写成

$$h^+_{j+\frac{1}{2}} = f^+_j + \frac{1}{2}\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}} - \begin{cases} \dfrac{1}{6}(\Delta f^+_{j+\frac{3}{2}} - \Delta f^+_{j+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^3) \\ \dfrac{1}{6}(\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}} - \Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^3) \end{cases} \tag{5.3.15}$$

$$h^+_{j+\frac{1}{2}} = f^+_j + \frac{1}{2}\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}} + \begin{cases} \dfrac{1}{3}(\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}} - \Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^3) \\ \dfrac{1}{3}(\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}} - \Delta f^+_{j-\frac{3}{2}}) + O(\Delta x^3) \end{cases} \tag{5.3.16}$$

同理，$h^-_{j+\frac{1}{2}}$可表示为

$$h^-_{j+\frac{1}{2}} = f^-_{j+1} - \frac{1}{2}\Delta f^-_{j+\frac{3}{2}} + \begin{cases} \dfrac{1}{3}(\Delta f^-_{j+\frac{5}{2}} - \Delta f^-_{j+\frac{3}{2}}) + O(\Delta x^3) \\ \dfrac{1}{3}(\Delta f^-_{j+\frac{3}{2}} - \Delta f^-_{j+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^3) \end{cases} \tag{5.3.17}$$

$$h^-_{j+\frac{1}{2}} = f^-_{j+1} - \frac{1}{2}\Delta f^-_{j+\frac{1}{2}} - \begin{cases} \dfrac{1}{6}(\Delta f^-_{j+\frac{3}{2}} - \Delta f^-_{j+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^3) \\ \dfrac{1}{6}(\Delta f^-_{j+\frac{1}{2}} - \Delta f^-_{j-\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^3) \end{cases} \tag{5.3.18}$$

剩下的问题是研究如何从式(5.3.15)和式(5.3.16)来确定$h^+_{j+\frac{1}{2}}$，以及如何从式(5.3.17)和式(5.3.18)来确定$h^-_{j+\frac{1}{2}}$。

容易看出，当式(5.3.15)和式(5.3.16)中的第三项被忽略时，

按照 NND 格式的思想，$h^+_{j+\frac{1}{2}}$的计算是通过 $\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}}$与 $\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}$的比较来执行的。如果$\left|\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}}\right| \leqslant \left|\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}\right|$（对应于激波下游的情况），就取包含 $\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}}$的 $h^+_{j+\frac{1}{2}}$；反之，如果$\left|\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}}\right| > \left|\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}\right|$（对应于激波上游的情况），就取包含 $\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}$的 $h^+_{j+\frac{1}{2}}$。这样做可避免激波附近的波动。

对于三阶精度的格式而言，情况比较复杂。下面来分析由式(5.3.15)～式(5.3.18)表示的诸三阶差分格式的修正方程式中四阶耗散项的系数 ν_4 的正负。

由式(5.3.1)，式(5.3.2)，式(5.3.7)和式(5.3.8)知

$$\left(\frac{\partial f^+}{\partial x}\right)_j = (h^+_{j+\frac{1}{2}} - h^+_{j-1/2})/\Delta x \tag{5.3.19}$$

$$\left(\frac{\partial f^-}{\partial x}\right)_j = (h^-_{j+\frac{1}{2}} - h^-_{j-\frac{1}{2}})/\Delta x \tag{5.3.20}$$

对于式(5.3.15)中的第一式（即第一种选取），有

$$\left(\frac{\partial f^+}{\partial x}\right)_j = \frac{-2f^+_{j-1} - 3f^+_j + 6f^+_{j+1} - f^+_{j+2}}{6\Delta x} \tag{5.3.21}$$

将上式中的 f^+_{j-1}，f^+_{j+1}和 f^+_{j+2}分别在 $x = x_j$ 点邻域内作 Taylor 展开，可得

$$\left(\frac{\partial f^+}{\partial x}\right)_j = \left(\frac{\partial f^+}{\partial x}\right)_j - \frac{1}{12}(\Delta x)^3\left(\frac{\partial^4 f^+}{\partial x^4}\right)_j + \cdots \tag{5.3.22}$$

考虑到 $f^+ = a^+ u$，a^+为正的特征值，可知与此相应的修正方程式中四阶耗散项的系数为 $\nu_4 = \frac{1}{12}(\Delta x)^3 a^+ > 0$。用完全相同的方法

可求出式(5.3.15)中第二种选取及式(5.3.16)～式(5.3.18)中各种选取所对应的差分格式的修正方程式的 ν_4。今将分析结果列出于下。

公　式	第一种选取	第二种选取
(5.3.15)	$\nu_4=\frac{1}{12}(\Delta x)^3a^{+}>0$	$\nu_4=-\frac{1}{12}(\Delta x)^3a^{+}<0$
(5.3.16)	$\nu_4=-\frac{1}{12}(\Delta x)^3a^{+}<0$	$\nu_4=\frac{1}{4}(\Delta x)^3a^{-}>0$
(5.3.17)	$\nu_4=-\frac{1}{4}(\Delta x)^3a\ \ >0$	$\nu_4=\frac{1}{12}(\Delta x)^3a\ \ <0$
(5.3.18)	$\nu_4=\frac{1}{12}(\Delta x)^3a^{-}<0$	$\nu_4=-\frac{1}{12}(\Delta x)^3a\ \ >0$

另一方面，由非线性 Burgers 方程计算得到的激波附近 u 及 u 的各阶导数变化图可知[4]：

在激波上游，有 $\left|\Delta f^{\pm}_{j-\frac{1}{2}}\right|\leqslant\left|\Delta f^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}\right|$；在 $\left|\Delta f^{\pm}_{j-\frac{1}{2}}-\Delta f^{\pm}_{j-\frac{3}{2}}\right|\leqslant\left|\Delta f^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}-\Delta f^{\pm}_{j-\frac{1}{2}}\right|$ 的区域内，$\left(\frac{\partial^3u}{\partial x^3}\right)<0$；而在 $\left|\Delta f^{\pm}_{j-\frac{1}{2}}-\Delta f^{\pm}_{j-\frac{3}{2}}\right|>\left|\Delta f^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}-\Delta f^{\pm}_{j-\frac{1}{2}}\right|$ 的区域内，$\left(\frac{\partial^3u}{\partial x^3}\right)>0$。

在激波下游，有 $\left|\Delta f^{\pm}_{j-\frac{1}{2}}\right|>\left|\Delta f^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}\right|$；在 $\left|\Delta f^{\pm}_{j+\frac{3}{2}}-\Delta f^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}\right|\leqslant\left|\Delta f^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}-\Delta f^{\pm}_{j-\frac{1}{2}}\right|$ 的区域内，$\left(\frac{\partial^3u}{\partial x^3}\right)<0$；而在 $\left|\Delta f^{\pm}_{j+\frac{3}{2}}-\Delta f^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}\right|>\left|\Delta f^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}-\Delta f^{\pm}_{j-\frac{1}{2}}\right|$ 的区域内，$\left(\frac{\partial^3u}{\partial x^3}\right)>0$。

再根据 5.2 节中阐明的“熵增条件”：$\nu_4\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^3f}{\partial x^3}\right)>0$，可得

到关于 $h^+_{j+\frac{1}{2}}$ 和 $h^-_{j+\frac{1}{2}}$ 的如下表达式

$$h^+_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \text{当} \left|\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}\right| \leqslant \left|\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}}\right| \text{时} \\ f^+_j + \frac{1}{2}\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}} + \\ \frac{1}{3} ms[(\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}} - \Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}),(\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}} - \Delta f^+_{j-\frac{3}{2}})], \\ \text{当} \left|\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}\right| > \left|\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}}\right| \text{时} \\ f^+_j + \frac{1}{2}\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}} - \\ \frac{1}{6} ms[(\Delta f^+_{j+\frac{3}{2}} - \Delta f^+_{j+\frac{1}{2}}),(\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}} - \Delta f^+_{j-\frac{1}{2}})], \end{cases} \tag{5.3.23}$$

$$h^-_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \text{当} \left|\Delta f^-_{j+\frac{1}{2}}\right| \leqslant \left|\Delta f^-_{j+\frac{3}{2}}\right| \text{时} \\ f^-_{j+1} - \frac{1}{2}\Delta f^-_{j+\frac{1}{2}} - \\ \frac{1}{6} ms[(\Delta f^-_{j+\frac{3}{2}} - \Delta f^-_{j+\frac{1}{2}}),(\Delta f^-_{j+\frac{1}{2}} - \Delta f^-_{j-\frac{1}{2}})], \\ \text{当} \left|\Delta f^-_{j+\frac{1}{2}}\right| > \left|\Delta f^-_{j+\frac{3}{2}}\right| \text{时} \\ f^-_{j+1} - \frac{1}{2}\Delta f^-_{j+\frac{3}{2}} + \\ \frac{1}{3} ms[(\Delta f^-_{j+\frac{5}{2}} - \Delta f^-_{j+\frac{3}{2}}),(\Delta f^-_{j+\frac{3}{2}} - \Delta f^-_{j+\frac{1}{2}})], \end{cases} \tag{5.3.24}$$

式中

$$ms(x,y) = \begin{cases} x, \text{当} |x| \leqslant |y| \text{时} \\ y, \text{当} |x| > |y| \text{时} \end{cases} \tag{5.3.25}$$

式(5.3.7)、式(5.3.8)、式(5.3.23)和式(5.3.24)就构成了一个三阶精度格式,称之为三阶 ENN 格式[2]。

5.4 ENO 格式

Harten 和 Osher 的研究指出[5]，TVD 格式的精度至多只能达到二阶。另外，一般说来，TVD 格式的精度全场不是一致的，在个别点（极值点）处精度只有一阶。为了进一步提高格式精度并改善格式在极值点处的性态，Harten 和 Osher 首先提出并研究了一类新的高精度、高分辨率格式——ENO 格式[5,6]，它是基本无振荡格式（Essentially Non-Oscillatory Schemes）的缩写。这类格式是守恒的，全场具有一致的高阶精度，并且基本上是 TVD 的。意即对于这类格式而言，存在与空间步长 Δx 和时间步长 $\tau = O(\Delta x)$ 无关的常数 C，使得对于时间步数 $n \leqslant T/\tau$ 时，有下列不等式成立

$$TV(u^n) \leqslant C \cdot TV(u^0) \tag{5.4.1}$$

式中　$u^0 = u^0(x)$ 是初值函数。

由不等式(5.4.1)知，ENO 格式是总变差有界的。与 TVD 格式相比较，放松了对总变差施加的约束，即将总变差不增改成了约束式(5.4.1)。由此换来的是可进一步提高格式的精度以及全场具有一致的高阶精度，即在极值点处 ENO 格式的精度不降阶。广泛的应用表明，此类格式对激波间断和接触间断均有较高的分辨率，因而受到普遍重视，并在越来越多的领域得到应用。

实质上，ENO 格式是一种高阶精度的广义 Godunov 格式。

研究如下单个变量的守恒律方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \tag{5.4.2}$$

现讨论与方程(5.4.2)相容的如下守恒型格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(h_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}}) \equiv [E_{\Delta x}(\Delta t)u^n]_j \tag{5.4.3}$$

如果差分算子 $E_{\Delta x}(\Delta t)$ 可以写成以下的形式

$$[E_{\Delta x}(\Delta t)u^n]_j = [A_{\Delta x}E(\Delta t)R(x,\bar{u}^n)]_{x=x_j} \quad (5.4.4)$$

式中算子 $A_{\Delta x}$，$E(t)$，$R(x,\bar{u}^n)$分别如下。

(1) $A_{\Delta x}$是网格平均算子，它对任意函数 $w(t,x)$的作用相当于在以 x 为中心的网格区间$\left(x-\frac{1}{2}\Delta x, x+\frac{1}{2}\Delta x\right)$内求 $w(t,x)$的平均值，即

$$A_{\Delta x}w(t,x) \equiv \bar{w}(t,x) = \frac{1}{\Delta x}\int_{-\frac{1}{2}\Delta x}^{\frac{1}{2}\Delta x} w(t,x+\xi)\mathrm{d}\xi \quad (5.4.5)$$

(2) $E(t)$是方程(5.4.2)的解算子，若规定初始条件为 $u(0,x)=u_0(x)$，则方程(5.4.2)的初值问题的解可以表示成

$$u(t,x) = E(t)u_0(x) \quad (5.4.6)$$

(3) $R(x,\bar{u}^n)$是在离散分布 $\bar{u}^n=\{\bar{u}_j^n\}$的基础上进行重新构造而获得的一个函数，称之为重构函数，它满足以下的守恒性质

$$\bar{R}(x_j,\bar{u}^n) \equiv \frac{1}{\Delta x}\int_{-\frac{1}{2}\Delta x}^{\frac{1}{2}\Delta x} R(x_j+\xi,\bar{u}^n)\mathrm{d}\xi = \bar{u}_j^n \quad (5.4.7)$$

那么式(5.4.3)称为广义 Godunov 格式。

简言之，方程(5.4.2)的广义 Godunov 格式是这样一种守恒型格式，它实质上是以满足关系式(5.4.7)的重构函数 $R(x,u^n)$为初值得到的下一时刻的解后再计算相应的网格均值的结果。

ENO 格式是一种特殊的广义 Godunov 格式，它对重构函数 $R(x,\bar{u}^n)$提出了以下两点更进一步的要求。

(1) 若 $u(t^n,x)$是微分方程(5.4.2)的精确解，$\bar{u}^n$ 是 $u(t^n,x)$的网格平均值，那么要求重构函数 $R(x,\bar{u}^n)$满足如下与 $u(t^n,x)$的逼近条件

$$R(x,\bar{u}^n) = u(t^n,x) + e(x)\Delta x^r + O(\Delta x^{r+1}) \quad (5.4.8)$$

(2) 要求重构函数 $R(x,\bar{u}^n)$满足如下"基本无振荡"条件

$$TV[R(x,\bar{u}^n)] \leqslant TV[u(t^n,x)] + O(\Delta x^r) \quad (5.4.9)$$

由于网格平均运算不会使变差增加，即对于任意函数 $w(t,x)$有

$$TV[A_{\Delta x}w(t,x)] \leqslant TV[w(t,x)]$$

又由于守恒律方程(5.4.2)的解具有总变差不会随时间而增加的性质，即

$$TV[E(t)u_0(x)] \leqslant TV[u_0(x)]$$

于是有

$$TV(u^{n+1}) = TV[A_{\Delta x}E(\Delta t)R(x,\bar{u}^n)] \leqslant$$

$$TV[E(\Delta t)R(x,\bar{u}^n)] \leqslant TV[R(x,\bar{u}^n)] \leqslant$$

$$TV(u^n) + O(\Delta x^r) \quad (5.4.10)$$

这就保证了 ENO 格式的差分解的总变差只能有微小的增加，从而使 ENO 格式具有基本无振荡的性质。

由上述知，构造 ENO 格式的关键在于确定重构函数 $R(x,\bar{u}^n)$和解算子 $E(\Delta t)$。

有两类重要的 ENO 格式。一类是 MUSCL 型的 ENO 格式，另一类称非 MUSCL 型的 ENO 格式。所谓 MUSCL 型的 ENO 格式，简单地说是规定以某种方式由网格中心处的原始变量值来确定网格界面处的原始变量值，然后据此算出网格界面处的通量值的一种计算格式。在数学上可表达为

$$h_{j+\frac{1}{2}} = f(u_{j+\frac{1}{2}}),\ u_{j+\frac{1}{2}} = \sum_{i=-k}^{k}\alpha_{j+i}^{(k)}u_{j+i} \quad (5.4.11)$$

非 MUSCL 型的 ENO 格式，简单地说是直接规定以某种方式由网格中心处的通量值来确定网格界面处的通量值的一种计算格式。在数学上可表达为

$$h_{j+\frac{1}{2}} = \sum_{i=-k}^{k} \beta_{j+i}^{(k)} f(u_{j+i}) \tag{5.4.12}$$

在文献[7]中，对 ENO 格式作了较仔细的介绍。限于篇幅，只介绍一类半离散的 ENO 格式，它是 Chi-Wang Shu 和 S. Osher 首先研究的[8,9]。

仍然以单个变量的守恒律方程(5.4.2)为例说明之。

它的半离散守恒型格式为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_j = -\frac{1}{\Delta x}\left(h_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}}\right) \tag{5.4.13}$$

Chi-Wang Shu 和 S. Osher 提出的这类半离散的 ENO 格式具有以下两个主要特点。

(1) 直接用通量 $f(u)$ 的值 $\{f(u_j)\}$ 来构造具有基本无振荡性质的插值多项式，由此构造高精度半离散格式(5.4.13)。

(2) 用具有 TVD 保持的性质的 Runge-Kutta 型高精度的时间离散格式来求解常微分方程组(5.4.13)。

下面来介绍具有基本无振荡性质的高精度空间离散格式的构造方法，也就是构造满足相应要求的半离散格式(5.4.13)中的数值通量 $h_{j+\frac{1}{2}}$，使得

$$\frac{1}{\Delta x}\left(h_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j + O(\Delta x^r) \tag{5.4.14}$$

如果令

$$h_{j+\frac{1}{2}} = f(x_{j+\frac{1}{2}}) + \sum_{l=1}^{m-1} a_{2l} \Delta x^{2l} \left[\frac{\partial^{2l} f}{\partial x^{u}}\right]_{j+\frac{1}{2}} + O(\Delta x^{2m+1}) \tag{5.4.15}$$

式中 $a_2, a_4, \cdots, a_{2m-2}$ 为待定常数。

由 Taylor 展开知

$$f(x_{j+\frac{1}{2}}) = f(x_j) + \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{k!}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^k \left(\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right)_j + O(\Delta x^{2m+1})$$

$$f(x_{j-\frac{1}{2}}) = f(x_j) + \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{k!}\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)^k \left(\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right)_j + O(\Delta x^{2m+1})$$

于是有

$$f(x_{j+\frac{1}{2}}) - f(x_{j-\frac{1}{2}}) = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{\Delta x^{2s+1}}{2^{2s}(2s+1)!}\left(\frac{\partial^{2s+1} f}{\partial x^{2s+1}}\right)_j + O(\Delta x^{2m+1})$$

完全类似地有

$$\Delta x^{2l}\left[\left(\frac{\partial^{2l} f}{\partial x^{2l}}\right)_{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial^{2l} f}{\partial x^{2l}}\right)_{j-\frac{1}{2}}\right] =$$

$$\sum_{s=0}^{m-l-1} \frac{\Delta x^{2s+2l+1}}{2^{2s}(2s+1)!}\left(\frac{\partial^{2s+2l+1} f}{\partial x^{2s+2l+1}}\right)_j + O(\Delta x^{2m+1}) =$$

$$\sum_{k=l}^{m-1} \frac{\Delta x^{2k+1}}{2^{2k-2l}(2k-2l+1)!}\left(\frac{\partial^{2k+1} f}{\partial x^{2k+1}}\right)_j + O(\Delta x^{2m+1})$$

引进符号 $a_0=1$,则由式(5.4.15)可得

$$h_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}} = \sum_{l=0}^{m-1} a_{2l}\Delta x^{2l}\left[\left(\frac{\partial^{2l} f}{\partial x^{2l}}\right)_{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial^{2l} f}{\partial x^{2l}}\right)_{j-\frac{1}{2}}\right] +$$

$$O(\Delta x^{2m+1}) = \sum_{l=0}^{m-1}\sum_{k=l}^{m-1} \frac{a_{2l}\Delta x^{2k+1}}{2^{2k-2l}(2k-2l+1)!} \times$$

$$\left(\frac{\partial^{2k+1} f}{\partial x^{2k+1}}\right)_j + O(\Delta x^{2m+1}) = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{k} \frac{a_{2l}\Delta x^{2k+1}}{2^{2k-2l}(2k-2l+1)!} \times$$

$$\left(\frac{\partial^{2k+1} f}{\partial x^{2k+1}}\right)_j + O(\Delta x^{2m+1})$$

显然,如果 $a_2, a_4, a_6, \cdots, a_{2m-2}$ 满足如下方程组

$$\sum_{l=0}^{k} \frac{a_{2l}}{2^{2k-2l}(2k-2l+1)!} = 0, (k = 1, 2, \cdots, m-1) \tag{5.4.16}$$

则条件(5.4.14)将得到满足。

由方程组(5.4.16),用递推法容易得到如下待定常数

$$a_2 = -\frac{1}{24}, \quad a_4 = \frac{7}{5760}, \quad a_6 = -\frac{31}{967680}, \cdots \tag{5.4.17}$$

剩下的问题是如何确定满足式(5.4.15)的数值通量 $h_{j+\frac{1}{2}}$。下面来介绍关于 $h_{j+\frac{1}{2}}$的三种具体算法。

5.4.1 ENO-LF 算法

先将通量 $f(u)$分裂成

$$f(u) = f^+(u) + f^-(u) \tag{5.4.18}$$

式中

$$\frac{\mathrm{d}f^+}{\mathrm{d}u} \geqslant 0, \quad \frac{\mathrm{d}f^-}{\mathrm{d}u} \leqslant 0$$

满足上述要求的通量分裂方法有许多,现采用如下简单方法

$$\left.\begin{aligned} f^+(u) &= \frac{1}{2}[f(u) + \alpha u] \\ f^-(u) &= \frac{1}{2}[f(u) - \alpha u] \end{aligned}\right\} \tag{5.4.19}$$

式中

$$\alpha = \max\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\right|$$

然后利用由分布的$\{u_j\}$(其中 $u_j = u(x_j)$)所确定的$\{f_j^{\pm}\}$,其中 $f_j^{\pm} = f^{\pm}(u(x_j)) \equiv f^{\pm}(x_j)$,来构造 $x = x_{j+\frac{1}{2}}$附近的插值多项式 $P_{j+\frac{1}{2}}^{\pm}(x)$,并要求它具有所要求的精度,即

$$P_{j+\frac{1}{2}}^{\pm}(x) = f^{\pm}(x) + O(\Delta x^{2m+1}), \text{当} \ |x - x_{j+\frac{1}{2}}| \leqslant \frac{1}{2}\Delta x \text{时}, \tag{5.4.20}$$

逐次求导可得

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}P_{j+\frac{1}{2}}^{\pm}\right)_{j+\frac{1}{2}} &= \left(\frac{\partial^{2k}f^{\pm}}{\partial x^{2k}}\right)_{j+\frac{1}{2}} + O(\Delta x^{2m-2k+1}) \\ (k &= 0,1,\cdots,m) \end{aligned}\right\} \tag{5.4.21}$$

最后，按如下方法就可确定所要求的数值通量 $h_{j+\frac{1}{2}}$

$$\left.\begin{aligned} h_{j+\frac{1}{2}} &= h^{+}_{j+\frac{1}{2}} + h^{-}_{j+\frac{1}{2}} \\ h^{\pm}_{j+\frac{1}{2}} &= P^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}(x_{j+\frac{1}{2}}) + \sum_{k=1}^{m-1} a_{2k}\Delta x^{2k}\left(\frac{\partial^{2k}P^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}}{\partial x^{2k}}\right)_{j+\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{5.4.22}$$

式中系数 $a_{2k}, k=1,2,\cdots,m-1$ 由关系式(5.4.16)决定。实际上，由式(5.4.22)，式(5.4.21)和式(5.4.20)可得

$$h^{\pm}_{j+\frac{1}{2}} = f^{\pm}(x_{j+\frac{1}{2}}) + \sum_{k=1}^{m-1} a_{2k}\Delta x^{2k}\left(\frac{\partial^{2k}f^{\pm}}{\partial x^{2k}}\right)_{j+\frac{1}{2}} + O(\Delta x^{2m+1})$$

相加后即得

$$h_{j+\frac{1}{2}} = f(x_{j+\frac{1}{2}}) + \sum_{k=1}^{m-1} a_{2k}\Delta x^{2k}\left(\frac{\partial^{2k}f}{\partial x^{2k}}\right)_{j+\frac{1}{2}} + O(\Delta x^{2m+1})$$

这就说明由式(5.4.22)确定的数值通量 $h_{j+\frac{1}{2}}$ 是满足式(5.4.15)的要求的。

至此，剩下的工作是构造满足式(5:4.20)条件的插值多项式。为此，要利用 ENO 格式中的移动模板思想，意即自动地在可能的插值区域中选择最光滑的 $2m+1$ 个节点来进行插值计算。对于只给定在离散点上的值 $\{w(x_i)\}$ 的函数 $w(x)$ 而言，其光滑性的信息只能由它的各级差商表来提供

零级差商表　　$w[x_i] = w(x_i)$

一级差商表　　$w[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{w[x_{i+1}] - w[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$

当已经确定了 $k-1$ 级差商表后，k 级差商表可由下式计算确定

$$w[x_i, \cdots, x_{i+k}] = \frac{w[x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}] - w[x_i, \cdots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \tag{5.4.23}$$

现在就可以来确定 $P^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}(x)$了。$P^{+}_{j+\frac{1}{2}}(x)$的递推算法如下。

(1) 给定如下初值 $K^{(0)}_{\min}=K^{(0)}_{\max}=j, Q^{(0)}_{+}=f^{+}(x_j)$。其中上标(0)表示初值;$K_{\min}$和 $K_{\max}$分别表示插值区间左、右两端节点的编号;Q_{+}表示插值多项式。

(2) 递推算法。假定已经有了 $K^{(n-1)}_{\min}, K^{(n-1)}_{\max}$和 $Q^{(n-1)}_{+}(x)$,这意味着已经有了一个含 n 个节点的模板$[x_{K^{(n-1)}_{\min}}, x_{K^{(n-1)}_{\max}}]$(插值区间),以及在此模板上的 $n-1$ 阶插值多项式 $Q^{(n-1)}_{+}(x)$。在如下两种可能扩大的模板$[x_{K^{(n-1)}_{\min}}, x_{K^{(n-1)}_{\max}}+1]$和$[x_{K^{(n-1)}_{\min}}-1, x_{K^{(n-1)}_{\max}}]$上分别计算 $f^{+}(x)$的 n 阶差商

$$\left.\begin{aligned} a^{(n)} &= f^{+}[x_{K^{(n-1)}_{\min}}, \cdots, x_{K^{(n-1)}_{\max}}+1] \\ b^{(n)} &= f^{+}[x_{K^{(n-1)}_{\min-1}}-1, \cdots, x_{K^{(n-1)}_{\max}}] \end{aligned}\right\} \tag{5.4.24}$$

并根据它们的绝对值大小来确定新的模板的范围 $K^{(n)}_{\min}$、$K^{(n)}_{\max}$和在$[x_{K^{(n)}_{\min}}, x_{K^{(n)}_{\max}}]$上的 n 阶插值多项式$Q^{(n)}_{+}(x)$:

(i) 当$|a^{(n)}|\geqslant|b^{(n)}|$时,$K^{(n)}_{\min}=K^{(n-1)}_{\min}-1, K^{(n)}_{\max}=K^{(n-1)}_{\max}$,

$$Q^{(n)}_{+}(x) = Q^{(n-1)}_{+}(x) + b^{(n)}\prod_{K^{(n-1)}_{\min}}^{K^{(n-1)}_{\max}}(x-x_k) \tag{5.4.25a}$$

(ii) 当$|a^{(n)}|<|b^{(n)}|$时,$K^{(n)}_{\min}=K^{(n-1)}_{\min}, K^{(n)}_{\max}=K^{(n-1)}_{\max}+1$,

$$Q^{(n)}_{+}(x) = Q^{(n-1)}_{+}(x) + a^{(n)}\prod_{K^{(n-1)}_{\min}}^{K^{(n-1)}_{\max}}(x-x_k) \tag{5.4.25b}$$

(3) 继续上述递推算法，直至 $n=2m$ 为止。令 $P^{+}_{j+\frac{1}{2}}(x)=Q^{(2m)}_{+}(x)$，这就是所要求的 $2m$ 阶插值多项式。

$P^{-}_{j+\frac{1}{2}}(x)$的递推算法如下。

(1) 给定如下初值 $K^{(0)}_{\min}=K^{(0)}_{\max}=j+1$，$Q^{(0)}_{-}(x)=f^{-}(x_{j+1})$。

(2) 递推算法。在已知 $K^{(n-1)}_{\min}$，$K^{(n-1)}_{\max}$和 $Q^{(n-1)}_{-}(x)$的条件下确定 $K^{(n)}_{\min}$，$K^{(n)}_{\max}$和 $Q^{(n)}_{-}(x)$。其确定方法与 $P^{+}_{j+\frac{1}{2}}(x)$的递推算法中的步骤(2)完全类似，差别仅在于以 f^{-} 替代 f^{+} 并以 Q_{-} 替代 Q_{+}。

(3) 继续上述递推算法，直至 $n=2m$ 为止。令 $P^{-}_{j+\frac{1}{2}}(x)=Q^{(2m)}_{-}(x)$，这就是所要求的 $2m$ 阶插值多项式。

为便于实际应用，下面给出若干低阶的插值多项式 $P^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}(x)$及相应的数值通量 $h_{j+\frac{1}{2}}$。

(1) 一阶格式的数值通量

此时取 $P^{+}_{j+\frac{1}{2}}(x)=Q^{(0)}_{+}(x)$，$P^{-}_{j+\frac{1}{2}}(x)=Q^{(0)}_{-}(x)$。于是数值通量为

$$h^{+}_{j+\frac{1}{2}}=P^{+}_{j+\frac{1}{2}}(x_{j+\frac{1}{2}})=f^{+}_{j}=\frac{1}{2}[f(u_j)+\alpha u_j]$$

$$h^{-}_{j+\frac{1}{2}}=P^{-}_{j+\frac{1}{2}}(x_{j+\frac{1}{2}})=f^{-}_{j+1}=\frac{1}{2}[f(u_{j+1})-\alpha u_{j+1}]$$

$$h_{j+\frac{1}{2}}=h^{+}_{j+\frac{1}{2}}+h^{-}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}[f(u_j)+f(u_{j+1})-\alpha(u_{j+1}-u_j)] \tag{5.4.26}$$

由此可知,在选择表达式(5.4.19)形式的 $f^+(u)$和 $f^-(u)$的情况下,得到的数值通量式(5.4.26)是 Lax-Friedrichs 型格式的数值通量。若取 $a=\frac{\Delta x}{\Delta t}\geqslant\max|f'(u)|$,则是经典的 Lax-Friedrichs 格式的数值通量。这表明 ENO－LF 算法是在一阶的 Lax-Friedrichs 型格式的基础上来构造高阶的具有 ENO 性质的数值通量。

(2) 二阶格式的数值通量

此时取 $P^+_{j+\frac{1}{2}}(x)=Q^{(1)}_+(x)$, $P^-_{j+\frac{1}{2}}(x)=Q^{(1)}_-(x)$。为了表示上述确定 $P^+_{j+\frac{1}{2}}(x)$的递推算法步骤(2)中的计算过程(式(5.4.25)),需要引进以下函数

$$mM(a,b)=\begin{cases}a, 当|a|<|b|时\\ b, 当|a|\geqslant|b|时\end{cases}\tag{5.4.27}$$

这个函数对其变量 a,b 是不对称的。于是有

$$Q^{(1)}_+(x)=f^+_j+(x-x_j)mM\left[\frac{\Delta_{j+\frac{1}{2}}f^+}{\Delta x},\frac{\Delta_{j-\frac{1}{2}}f^+}{\Delta x}\right]$$

$$Q^{(1)}_-(x)=f^-_{j+1}+(x-x_{j+1})mM\left[\frac{\Delta_{j+\frac{3}{2}}f^-}{\Delta x},\frac{\Delta_{j+\frac{1}{2}}f^-}{\Delta x}\right]$$

式中,$\Delta_{j+\frac{1}{2}}f^+=f^+_{j+1}-f^+_j$, $\Delta_{j+\frac{1}{2}}f^-=f^-_{j+1}-f^-_j$。

由式(5.4.22)可得二阶格式的数值通量为

$$\left.\begin{aligned}h^+_{j+\frac{1}{2}}&=P^+_{j+\frac{1}{2}}(x_{j+\frac{1}{2}})=f^+_j+\frac{1}{2}mM(\Delta_{j+\frac{1}{2}}f^+,\Delta_{j-\frac{1}{2}}f^+)\\ h^-_{j+\frac{1}{2}}&=P^-_{j+\frac{1}{2}}(x_{j+\frac{1}{2}})=f^-_{j+1}-\frac{1}{2}mM(\Delta_{j+\frac{3}{2}}f^-,\Delta_{j+\frac{1}{2}}f^-)\end{aligned}\right\}\tag{5.4.28}$$

它相当于在式(5.4.26)的基础上作了相应修正。

(3) 三阶格式的数值通量

此时取 $P^{+}_{j+\frac{1}{2}}(x)=Q^{(2)}_{+}(x),P^{-}_{j+\frac{1}{2}}(x)=Q^{(2)}_{-}(x)$。

$$Q^{(2)}_{+}(x)=Q^{(1)}_{+}(x)+$$

$$\begin{cases}\dfrac{(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2\Delta x^2}mM[(\Delta_{j+\frac{3}{2}}f^{+}-\Delta_{j+\frac{1}{2}}f^{+}),\\[2ex] (\Delta_{j+\frac{1}{2}}f^{+}-\Delta_{j-\frac{1}{2}}f^{+})],\text{当}\,|\Delta_{j+\frac{1}{2}}f^{+}|<|\Delta_{j-\frac{1}{2}}f^{+}|\,\text{时}\\[2ex] \dfrac{(x-x_j)(x-x_{j-1})}{2\Delta x^2}mM[(\Delta_{j+\frac{1}{2}}f^{+}-\Delta_{j-\frac{1}{2}}f^{+}),\\[2ex] (\Delta_{j-\frac{1}{2}}f^{+}-\Delta_{j-\frac{3}{2}}f^{+})],\text{当}\,|\Delta_{j+\frac{1}{2}}f^{+}|\geqslant|\Delta_{j-\frac{1}{2}}f^{+}|\,\text{时}\end{cases}$$

$$Q^{(2)}_{-}(x)=Q^{(1)}_{-}(x)+$$

$$\begin{cases}\dfrac{(x-x_{j+1})(x-x_{j+2})}{2\Delta x^2}mM[(\Delta_{j+\frac{5}{2}}f^{-}-\Delta_{j+\frac{3}{2}}f^{-}),\\[2ex] (\Delta_{j+\frac{3}{2}}f^{-}-\Delta_{j+\frac{1}{2}}f^{-})],\text{当}\,|\Delta_{j+\frac{3}{2}}f^{-}|<|\Delta_{j+\frac{1}{2}}f^{-}|\,\text{时}\\[2ex] \dfrac{(x-x_{j+1})(x-x_j)}{2\Delta x^2}mM[(\Delta_{j+\frac{3}{2}}f^{-}-\Delta_{j+\frac{1}{2}}f^{-}),\\[2ex] (\Delta_{j+\frac{1}{2}}f^{-}-\Delta_{j-\frac{1}{2}}f^{-})],\text{当}\,|\Delta_{j+\frac{3}{2}}f^{-}|\geqslant|\Delta_{j+\frac{1}{2}}f^{-}|\,\text{时}\end{cases}$$

由式(5.4.22)可得三阶格式的数值通量为

$$
\left.
\begin{aligned}
h^{+}_{j+\frac{1}{2}} &= P^{+}_{j+\frac{1}{2}}(x_{j+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{24}\Delta x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} P^{+}_{j+\frac{1}{2}}(x_{j+\frac{1}{2}}) = \\
&\quad f^{+}_{j} + \frac{1}{2} mM(\Delta_{j+\frac{1}{2}} f^{+}, \Delta_{j-\frac{1}{2}} f^{+}) + \\
&\quad \begin{cases}
\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right) mM[(\Delta_{j+\frac{3}{2}} f^{+} - \Delta_{j+\frac{1}{2}} f^{+}), \\
(\Delta_{j+\frac{1}{2}} f^{+} - \Delta_{j-\frac{1}{2}} f^{+})], \text{当} |\Delta_{j+\frac{1}{2}} f^{+}| < |\Delta_{j-\frac{1}{2}} f^{+}| \text{时} \\
\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{24}\right) mM[(\Delta_{j+\frac{1}{2}} f^{+} - \Delta_{j-\frac{1}{2}} f^{+}), \\
(\Delta_{j-\frac{1}{2}} f^{+} - \Delta_{j-\frac{3}{2}} f^{+})], \text{当} |\Delta_{j+\frac{1}{2}} f^{+}| \geqslant |\Delta_{j-\frac{1}{2}} f^{+}| \text{时}
\end{cases} \\
h^{-}_{j+\frac{1}{2}} &= P^{-}_{j+\frac{1}{2}}(x_{j+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{24}\Delta x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} P^{-}_{j+\frac{1}{2}}(x_{j+\frac{1}{2}}) = \\
&\quad f^{-}_{j+1} - \frac{1}{2} mM(\Delta_{j+\frac{3}{2}} f^{-}, \Delta_{j+\frac{1}{2}} f^{-}) + \\
&\quad \begin{cases}
\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{24}\right) mM[(\Delta_{j+\frac{5}{2}} f^{-} - \Delta_{j+\frac{3}{2}} f^{-}), \\
(\Delta_{j+\frac{3}{2}} f^{-} - \Delta_{j+\frac{1}{2}} f^{-})], \text{当} |\Delta_{j+\frac{3}{2}} f^{-}| < |\Delta_{j+\frac{1}{2}} f^{-}| \text{时} \\
\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right) mM[(\Delta_{j+\frac{3}{2}} f^{-} - \Delta_{j+\frac{1}{2}} f^{-}), \\
(\Delta_{j+\frac{1}{2}} f^{-} - \Delta_{j-\frac{1}{2}} f^{-})], \text{当} |\Delta_{j+\frac{3}{2}} f^{-}| \geqslant |\Delta_{j+\frac{1}{2}} f^{-}| \text{时}
\end{cases}
\end{aligned}
\right\}
\tag{5.4.29}
$$

它相当于在式(5.4.28)的基础上又作了修正,并且修正项是分叉的。更高阶的数值通量的计算中将会出现更多的分叉。

将式(5.4.29)与式(5.3.23)及式(5.3.24)进行比较,发现 ENO－LF 算法中给出的三阶格式与三阶 ENN 格式在形式上是

十分类似的，它们之间的差别仅在于其中的限制函数 $mM(a,b)$，式(5.4.27)与 $ms(a,b)$，式(5.3.25)不同而已。

5.4.2 ENO－Roe 算法

这种算法的特点是采用原函数重构技术，在一阶 Roe 格式的基础上构造高阶数值通量 $h_{j+\frac{1}{2}}$。

令 $F(x)$是 $f(u(x))$的原函数

$$F(x) \equiv \int_{x_0}^{x} f(u(x))\mathrm{d}x$$

根据已知分布 $\{u_j\}$，$u_j = u(x_j)$，确定分布 $\{f_j\}$

$$f_j = f(u_j) \equiv \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(u(x))\mathrm{d}x$$

则原函数 F 在 $x = x_{j+\frac{1}{2}}$处的值为

$$F(x_{j+\frac{1}{2}}) = \sum_{k=k_0}^{j} f_k \Delta x = \sum_{k=k_0}^{j} f(u_k)\Delta x$$

由此可确定原函数的各级差商表

$$F[x_{l-\frac{1}{2}}, x_{l+\frac{1}{2}}] = f(u_l)$$

$$\vdots$$

$$F[x_{l-\frac{1}{2}},\cdots,x_{l+k+\frac{1}{2}}] = \frac{F[x_{l+\frac{1}{2}},\cdots,x_{l+k+\frac{1}{2}}] - F[x_{l-\frac{1}{2}},\cdots,x_{l+k-\frac{1}{2}}]}{x_{l+k+\frac{1}{2}} - x_{l-\frac{1}{2}}}$$

下面给出 ENO－Roe 算法中确定数值通量 $h_{j+\frac{1}{2}}$的步骤。

(1) 根据 Roe 速度值 $\bar{a}_{j+\frac{1}{2}} = \dfrac{f_{j+1} - f_j}{u_{j+1} - u_j}$，按如下方法确定 $K_{\min}^{(1)}$ 和 $Q_F^{(1)}(x)$

$$K_{\min}^{(1)} = \begin{cases} j, & \text{当 } \bar{a}_{j+\frac{1}{2}} \geqslant 0 \text{ 时} \\ j+1 & \text{当 } \bar{a}_{j+\frac{1}{2}} < 0 \text{ 时} \end{cases} \tag{5.4.30}$$

$$Q_F^{(1)}(x) = F[x_{K_{\min}^{(1)}-\frac{1}{2}}, x_{K_{\min}^{(1)}+\frac{1}{2}}](x - x_{K_{\min}^{(1)}-\frac{1}{2}}) \tag{5.4.31}$$

(2) 递推算法。假定已知 $K_{\min}^{(n-1)}$ 和 $Q_F^{(n-1)}(x)$,按如下方法确定 $K_{\min}^{(n)}$ 和 $Q_F^{(n)}(x)$。

令
$$a^{(n)} = F[x_{K_{\min}^{(n-1)}-\frac{1}{2}}, \cdots, x_{K_{\min}^{(n-1)}+n-\frac{1}{2}}]$$

$$b^{(n)} = F[x_{K_{\min}^{(n-1)}-1-\frac{1}{2}}, \cdots, x_{K_{\min}^{(n-1)}+n-1-\frac{1}{2}}]$$

(i) 当 $|a^{(n)}| \geqslant |b^{(n)}|$ 时,取

$$\left.\begin{aligned} K_{\min}^{(n)} &= K_{\min}^{(n-1)} - 1 \\ Q_F^{(n)}(x) &= Q_F^{(n-1)}(x) + b^{(n)} \prod_{k=K_{\min}^{(n-1)}}^{K_{\min}^{(n-1)}+n-1} (x - x_{k-\frac{1}{2}}) \end{aligned}\right\} \tag{5.4.32a}$$

(ii) 当 $|a^{(n)}| < |b^{(n)}|$ 时,取

$$\left.\begin{aligned} K_{\min}^{(n)} &= K_{\min}^{(n-1)} \\ Q_F^{(n)}(x) &= Q_F^{(n-1)}(x) + a^{(n)} \prod_{k=K_{\min}^{(n-1)}}^{K_{\min}^{(n-1)}+n-1} (x - x_{k-\frac{1}{2}}) \end{aligned}\right\} \tag{5.4.32b}$$

(3) $r+1$ 阶格式数值通量

$$h_{j+\frac{1}{2}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q_{j+\frac{1}{2}}(x)\right]_{x = x_{j+\frac{1}{2}}} \tag{5.4.33}$$

式中

$$Q_{j+\frac{1}{2}}(x) \equiv Q_F^{(r+1)}(x)$$

为了便于实际应用,下面给出一阶和二阶格式的数值通量。

(1) 一阶格式的数值通量

此时取

$$Q_{j+\frac{1}{2}}(x) = Q_F^{(1)}(x) = F[x_{K_{\min}^{(1)}-\frac{1}{2}}, x_{K_{\min}^{(1)}+\frac{1}{2}}](x - x_{K_{\min}^{(1)}-\frac{1}{2}})$$

于是有

$$h_{j+\frac{1}{2}} = F[x_{K_{\min}^{(1)}-\frac{1}{2}}, x_{K_{\min}^{(1)}+\frac{1}{2}}] = f(u_{K_{\min}^{(1)}}) = \begin{cases} f(u_j), 当\ \bar{a}_{j+\frac{1}{2}} \geqslant 0\ 时 \\ f(u_{j+1}), 当\ \bar{a}_{j+\frac{1}{2}} < 0\ 时 \end{cases}$$

上式也可写成

$$h_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}[f(u_j) + f(u_{j+1}) - |\bar{a}_{j+\frac{1}{2}}|(u_{j+1} - u_j)] \tag{5.4.34}$$

它正好是 Roe 格式的数值通量。

(2) 二阶格式的数值通量

此时取

$$Q_{j+\frac{1}{2}}(x) = Q_F^{(2)}(x) =$$

$$\begin{cases} f(u_j)(x - x_{j-\frac{1}{2}}) + (x - x_{j-\frac{1}{2}})(x - x_{j+\frac{1}{2}}) \times \\ mM\left(\dfrac{f_{j+1} - f_j}{2\Delta x}, \dfrac{f_j - f_{j-1}}{2\Delta x}\right), 当\ \bar{a}_{j+\frac{1}{2}} \geqslant 0\ 时 \\ f(u_{j+1})(x - x_{j+\frac{1}{2}}) + (x - x_{j+\frac{1}{2}})(x - x_{j+\frac{3}{2}}) \times \\ mM\left(\dfrac{f_{j+2} - f_{j+1}}{2\Delta x}, \dfrac{f_{j+1} - f_j}{2\Delta x}\right), 当\ \bar{a}_{j+\frac{1}{2}} < 0\ 时 \end{cases}$$

于是有

$$h_{j+\frac{1}{2}}=\begin{cases} f(u_j)+\dfrac{1}{2}mM(\Delta_{j+\frac{1}{2}}f,\Delta_{j-\frac{1}{2}}f), & \text{当 } \bar{a}_{j+\frac{1}{2}}\geqslant 0 \text{ 时} \\ f(u_{j+1})-\dfrac{1}{2}mM(\Delta_{j+\frac{3}{2}}f,\Delta_{j+\frac{1}{2}}f), & \text{当 } \bar{a}_{j+\frac{1}{2}}<0 \text{ 时} \end{cases} \tag{5.4.35}$$

5.4.3 ENO-LLF 算法

这个算法的特点是采用原函数重构技术，在一阶局部的 Lax-Friedrichs 格式的基础上构造高阶数值通量 $h_{j+\frac{1}{2}}$。

先将通量 $f(u)$ 分裂成

$$f(u)=f^{+}(u)+f^{-}(u) \tag{5.4.36}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} f^{+}(u)&=\frac{1}{2}[f(u)+\alpha_{j+\frac{1}{2}}u] \\ f^{-}(u)&=\frac{1}{2}[f(u)-\alpha_{j+\frac{1}{2}}u] \\ \alpha_{j+\frac{1}{2}}&=\max|f'(u)| \\ &u \text{ 在 } u_j,u_{j+1} \text{ 之间} \end{aligned}\right\} \tag{5.4.37}$$

与 ENO-LF 算法中的通量分裂方法的区别在于此时的 α 是与 $j+\dfrac{1}{2}$ 有关的常数。

令 $F^{\pm}(x)$ 分别是 $f^{\pm}(u(x))$ 的原函数

$$F^{\pm}(x)\equiv\int_{x_0}^{x}f^{\pm}(u(x))\mathrm{d}x$$

根据已知分布 $\{u_j\}$，$u_j=u(x_j)$，确定分布 $\{f_j^{\pm}\}$

$$f_j^{\pm}=f^{\pm}(u_j)\equiv\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}f^{+}(u(x))\mathrm{d}x$$

则原函数 F^+ 在 $x = x_{j+\frac{1}{2}}$ 处的值为

$$F^{\pm}(x_{j+\frac{1}{2}}) = \sum_{k=k_0}^{j} f_k^{\pm}\Delta x = \sum_{k=k_0}^{j} f^{\pm}(u_k)\Delta x$$

据此可确定函数 $f^+(u(x))$、$f^-(u(x))$ 的原函数 $F^+(x)$，$F^-(x)$ 的各级差商表

$$F^{\pm}[x_{l-\frac{1}{2}}, x_{l+\frac{1}{2}}] = f^{\pm}(u_l) = \frac{1}{2}[f(u_l) \pm \alpha_{l+\frac{1}{2}} u_l]$$

$$\vdots$$

$$F^{\pm}[x_{l-\frac{1}{2}}, \cdots, x_{l+k+\frac{1}{2}}] =$$

$$\frac{F^{\pm}[x_{l+\frac{1}{2}}, \cdots, x_{l+k+\frac{1}{2}}] - F^{\pm}[x_{l-\frac{1}{2}}, \cdots, x_{l+k-\frac{1}{2}}]}{x_{l+k-\frac{1}{2}} - x_{l-\frac{1}{2}}}$$

下面给出 ENO－LLF 算法中确定数值通量 $h_{j+\frac{1}{2}}$ 的步骤。

(1) 计算 $Q_{F^+}^{(r+1)}(x)$

首先取如下初值

$$K_{\min}^{(1)} = j$$

$$Q_{F^+}^{(1)}(x) = f^+(u_j)(x - x_{j-\frac{1}{2}})$$

然后用 ENO－Roe 算法中的步骤(2)由已知 $K_{\min}^{(n-1)}$、$Q_{F^+}^{(n-1)}(x)$ 计算 $K_{\min}^{(n)}$、$Q_{F^+}^{(n)}(x)$，直到 $Q_{F^+}^{(r+1)}(x)$ 为止。

(2) 计算 $Q_{F^-}^{(r+1)}(x)$

首先取如下初值

$$K_{\min}^{(1)} = j + 1$$

$$Q_{F^-}^{(1)}(x) = f^-(u_{j+1})(x - x_{j+\frac{1}{2}})$$

然后用 ENO－Roe 算法中的步骤(2)由已知 $K_{\min}^{(n-1)}$、$Q_F^{(n-1)}(x)$计算 $K_{\min}^{(n)}$、$Q_F^{(n)}(x)$直到 $Q_{F^-}^{(r+1)}(x)$为止。

(3) $r+1$ 阶格式的数值通量为

$$h_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\mathrm{d}Q_{j+\frac{1}{2}}^{+}}{\mathrm{d}x}(x_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{\mathrm{d}Q_{j+\frac{1}{2}}^{-}}{\mathrm{d}x}(x_{j+\frac{1}{2}}) \tag{5.4.38}$$

式中 $Q_{j+\frac{1}{2}}^{+}(x) \equiv Q_{F^+}^{(r+1)}(x)$， $Q_{j+\frac{1}{2}}(x) \equiv Q_{F^-}^{(r+1)}(x)$。

5.4.4 用统一的方式构造 ENO 格式(UENO)[10]

在构造高精度的半离散格式时,往往要使用一些限制函数。例如

$$\mathrm{minmod}(x,y) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(x)\min(|x|,|y|), & \text{当 } xy > 0 \text{ 时} \\ 0 \quad , & \text{当 } xy < 0 \text{ 时} \end{cases} \tag{5.4.39}$$

$$\mathrm{ms}(x,y) = \begin{cases} x, & \text{当} |x| < |y| \text{时} \\ y, & \text{当} |y| < |x| \text{时} \\ x, & \text{当} |x| = |y| \text{且} xy > 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当} |x| = |y| \text{且} xy \leqslant 0 \text{ 时} \end{cases} \tag{5.4.40}$$

还有许多其它的限制函数。另一方面,在 ENO 格式的构造中还使用了滑动模板技术,即需要比较各级差商绝对值的大小来确定插值函数所使用的插值区间。在以这种方式构造的格式中,计算公式将根据不同条件进行分叉,且精度越高分叉越多,因而不适合于并行计算处理。为此邬华谟提出了用统一方式构造 ENO 格式,避免在计算中出现条件判断,以便于作并行计算。

首先,上面给出的两种限制函数式(5.4.39)和式(5.4.40)可以通过改写它们的表达式形式来达到既保持原来的函数关系不变,又避免计算分叉的目的。容易检验,如下表达式形式正是所需要的

$$\mathrm{minmod}(x,y)=\frac{1}{4}[\mathrm{sgn}(x)+\mathrm{sgn}(y)]\times$$

$$\Big(|x|+|y|-\Big||x|-|y|\Big|\Big) \qquad (5.4.41)$$

$$\mathrm{ms}(x,y)=\frac{1}{2}\mathrm{sgn}[xy(x+y)]\times$$

$$\Big(|x|+|y|-\Big||x|-|y|\Big|\Big) \qquad (5.4.42)$$

下面介绍 UENO 格式的构造方法。现讨论如下一个变量的非线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0 \qquad (5.4.43)$$

其目的在于用统一的方式来构造上述方程的具有 r 阶精度和 ENO 性质的半离散格式

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_j=-\frac{1}{\Delta x}(h_{j+\frac{1}{2}}-h_{j-\frac{1}{2}}) \qquad (5.4.44)$$

也就是要确定使格式满足上述要求的数值通量 $h_{j+\frac{1}{2}}$ 的表达式。

首先决定采用矢通量分裂技术，即将通量函数 $f(u)$ 分裂成

$$f(u)=f^{+}(u)+f^{-}(u)$$

式中

$$\frac{\mathrm{d}f^{+}}{\mathrm{d}u}\geqslant 0,\quad \frac{\mathrm{d}f^{-}}{\mathrm{d}u}\leqslant 0$$

与之相应，数值通量也被分裂成

$$h_{j+\frac{1}{2}}=h^{+}_{j+\frac{1}{2}}+h^{-}_{j+\frac{1}{2}}$$

格式具有 r 阶精度，意味着要求所构造的数值通量 $h_{j+\frac{1}{2}}$ 满足如下条件

$$\frac{1}{\Delta x}(h_{j+\frac{1}{2}}-h_{j-\frac{1}{2}})=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j+O(\Delta x^r) \qquad (5.4.45)$$

或者要求分别地满足如下两个条件

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\Delta x}(h^{+}_{j+\frac{1}{2}}-h^{+}_{j-\frac{1}{2}})&=\left(\frac{\partial f^{+}}{\partial x}\right)_j+O(\Delta x^{r})\\ \frac{1}{\Delta x}(h^{-}_{j+\frac{1}{2}}-h^{-}_{j-\frac{1}{2}})&=\left(\frac{\partial f^{-}}{\partial x}\right)_j+O(\Delta x^{r})\end{aligned}\right\}\quad(5.4.46)$$

正如本节开头已证明的那样,如果

$$h^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}=f^{\pm}(x_{j+\frac{1}{2}})+\sum_{l=1}^{\left[\frac{t-1}{2}\right]}a_{2l}\Delta x^{2l}\left(\frac{\partial^{2l}f^{\pm}}{\partial x^{2l}}\right)_{j+\frac{1}{2}}+O(\Delta x^{r+1})\tag{5.4.47}$$

其中 t 是不大于 r 的最大奇数值,且诸系数 $a_2,a_4,\cdots$ 满足关系式(5.4.16),其中 $a_0=1$,那么这样的 $h^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}$ 就满足式(5.4.46)。

至此,问题被归结为如何用统一的方式来构造 $\left(\frac{\partial^{2l}f^{\pm}}{\partial x^{2l}}\right)_{j+\frac{1}{2}}$,$(l=0,1,\cdots,(t-1)/2)$ 的具有 r 阶精度的近似表达式。

邬华谟证明了,对于真正非线性的守恒律方程,高于二阶精度的 MUSCL 型格式是不存在的[10]。为了获得高于二阶精度的 ENO 格式,将讨论限制于非 MUSCL 型格式的构造。

为此,需要利用已知的分布 $\{f^{\pm}_i\}$

$$f^{\pm}_i=f^{\pm}(u_i)=f^{\pm}(u(x_i))=f^{\pm}(x_i)$$

来构造 $x=x_{j+\frac{1}{2}}$ 附近的多项式 $P^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}(x)$,使得

$$P^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}(x)=f^{\pm}(x)+O(\Delta x^{r+1}),\text{当}\ |x-x_{j+\frac{1}{2}}|\leqslant\Delta x\ \text{时}\tag{5.4.48}$$

有了这个多项式之后,令

$$h^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}=P^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}(x_{j+\frac{1}{2}})+\sum_{l=1}^{\left[\frac{t-1}{2}\right]}a_{2l}\Delta x^{2l}\left(\frac{\partial^{2l}P^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}}{\partial x^{2l}}\right)_{j+\frac{1}{2}}\tag{5.4.49}$$

显然,它满足式(5.4.47)的要求,也就是所需要的 r 阶格式的数值通量。

满足条件式(5.4.48)的多项式 $P^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}(x)$ 不是惟一的,下面介绍确定以迎风方式和对称方式逼近 $f^{\pm}(x)$ 的多项式 $P^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}(x)$ 的两种方法。

(1) 在迎风方法中,规定

$$\left.\begin{aligned} P^{+}_{j+\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{r} \frac{(x-x_j)^k}{k!\Delta x^k} D_j^{+(k)} \\ P^{-}_{j+\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{r} \frac{(x-x_{j+1})^k}{k!\Delta x^k} D_{j+1}^{-(k)} \end{aligned}\right\} \tag{5.4.50}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} D_j^{+(k)} &= \Delta x^k \left(\frac{\partial^k f^+}{\partial x^k}\right)_j + O(\Delta x^{r+1}) \\ D_{j+1}^{-(k)} &= \Delta x^k \left(\frac{\partial^k f^-}{\partial x^k}\right)_{j+1} + O(\Delta x^{r+1}) \\ &(k = 0,1,2,\cdots,r) \end{aligned}\right\} \tag{5.4.51}$$

(2) 在对称方法中,规定

$$\left.\begin{aligned} P^{+}_{j+\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{r} \frac{(x-x_{j+\frac{1}{2}})^k}{k!\Delta x^k} D_{j+\frac{1}{2}}^{+(k)} \\ P^{-}_{j+\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{r} \frac{(x-x_{j+\frac{1}{2}})^k}{k!\Delta x^k} D_{j+\frac{1}{2}}^{-(k)} \end{aligned}\right\} \tag{5.4.52}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} D_{j+\frac{1}{2}}^{+(k)} &= \Delta x^k \left(\frac{\partial^k f^+}{\partial x^k}\right)_{j+\frac{1}{2}} + O(\Delta x^{r+1}) \\ D_{j+\frac{1}{2}}^{-(k)} &= \Delta x^k \left(\frac{\partial^k f^-}{\partial x^k}\right)_{j+\frac{1}{2}} + O(\Delta x^{r+1}) \\ &(k = 0,1,2,\cdots,r) \end{aligned}\right\} \tag{5.4.53}$$

显然，如果对于各阶精度 $r=2,3,4,\cdots$ 已经分别确定了满足条件式(5.4.51)及式(5.4.53)的 $D_j^{+(k)}, D_{j+1}^{-(k)}, D_{j+\frac{1}{2}}^{+(k)}, D_{j-\frac{1}{2}}^{(k)}$，$k=0,1,\cdots,r$，那么由表达式(5.4.50)、式(5.4.49)及表达式(5.4.52)、式(5.4.49)即可确定各阶精度的迎风型数值通量和对称型数值通量。其结果如下。

(1) 二阶精度 $r=2$ 的情况

(i) 迎风型格式

$$\left.\begin{aligned} h_{j+\frac{1}{2}}^{+} &= D_j^{+(0)} + \frac{1}{2}D_j^{+(1)} + \frac{1}{8}D_j^{+(2)} \\ h_{j+\frac{1}{2}}^{-} &= D_{j+1}^{-(0)} - \frac{1}{2}D_{j+1}^{-(1)} + \frac{1}{8}D_{j+1}^{-(2)} \end{aligned}\right\} \tag{5.4.54}$$

(ii) 对称型格式

$$\left.\begin{aligned} h_{j+\frac{1}{2}}^{+} &= D_{j+\frac{1}{2}}^{+(0)} \\ h_{j+\frac{1}{2}}^{-} &= D_{j+\frac{1}{2}}^{-(0)} \end{aligned}\right\} \tag{5.4.55}$$

(2) 三阶精度 $r=3$ 的情况

(i) 迎风型格式

$$\left.\begin{aligned} h_{j+\frac{1}{2}}^{+} =& D_j^{+(0)} + \frac{1}{2}D_j^{+(1)} + \frac{1}{8}D_j^{+(2)} + \frac{1}{48}D_j^{+(3)} - \\ & \frac{1}{24}\left(D_j^{+(2)} + \frac{1}{2}D_j^{+(3)}\right) \\ h_{j+\frac{1}{2}}^{-} =& D_{j+1}^{-(0)} - \frac{1}{2}D_{j+1}^{-(1)} + \frac{1}{8}D_{j+1}^{-(2)} - \frac{1}{48}D_{j+1}^{-(3)} - \\ & \frac{1}{24}\left(D_{j+1}^{-(2)} - \frac{1}{2}D_{j+1}^{-(3)}\right) \end{aligned}\right\} \tag{5.4.56}$$

(ii) 对称型格式

$$\left.\begin{aligned} h_{j+\frac{1}{2}}^{+} &= D_{j+\frac{1}{2}}^{+(0)} - \frac{1}{24}D_{j+\frac{1}{2}}^{+(2)} \\ h_{j+\frac{1}{2}}^{-} &= D_{j+\frac{1}{2}}^{-(0)} - \frac{1}{24}D_{j+\frac{1}{2}}^{-(2)} \end{aligned}\right\} \tag{5.4.57}$$

(3) 四阶精度 $r=4$ 的情况

(i) 迎风型格式

$$\left.\begin{aligned} h_{j+\frac{1}{2}}^{+} &= D_{j}^{+(0)}+\frac{1}{2}D_{j}^{+(1)}+\frac{1}{8}D_{j}^{+(2)}+\frac{1}{48}D_{j}^{+(3)}+ \\ &\quad \frac{1}{384}D_{j}^{+(4)}-\frac{1}{24}\left(D_{j}^{+(2)}+\frac{1}{2}D_{j}^{+(3)}+\frac{1}{8}D_{j}^{+(4)}\right) \\ h_{j+\frac{1}{2}}^{-} &= D_{j+1}^{-(0)}-\frac{1}{2}D_{j+1}^{-(1)}+\frac{1}{8}D_{j+1}^{-(2)}-\frac{1}{48}D_{j+1}^{-(3)}+ \\ &\quad \frac{1}{384}D_{j+1}^{-(4)}-\frac{1}{24}\left(D_{j+1}^{-(2)}-\frac{1}{2}D_{j+1}^{-(3)}+\frac{1}{8}D_{j+1}^{-(4)}\right) \end{aligned}\right\} \tag{5.4.58}$$

(ii) 对称型格式

$$\left.\begin{aligned} h_{j+\frac{1}{2}}^{+} &= D_{j+\frac{1}{2}}^{+(0)}-\frac{1}{24}D_{j+\frac{1}{2}}^{+(2)} \\ h_{j+\frac{1}{2}}^{-} &= D_{j+\frac{1}{2}}^{-(0)}-\frac{1}{24}D_{j+\frac{1}{2}}^{-(2)} \end{aligned}\right\} \tag{5.4.59}$$

需要说明的是,虽然在上述不同阶精度的数值通量的各个表达式中出现某些符号相同的量,例如 $D_{j}^{+(1)}$,$D_{j+\frac{1}{2}}^{+(0)}$ 等,但是由于精度要求不同,它们的计算公式是不相同的。

最后,剩下的工作是推导各种精度下 $D_{j}^{\pm(k)}$,$D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(k)}$ 的计算公式。

首先,由给定的分布 $\{f_{j}^{\pm}\}$ 作出各级差分表,令

$$\Delta_{j}^{\pm(0)} \equiv f_{j}^{\pm}$$

$$\Delta_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(1)} \equiv \Delta_{j+1}^{\pm(0)}-\Delta_{j}^{\pm(0)} = f_{j+1}^{\pm}-f_{j}^{\pm}$$

$$\Delta_{j}^{\pm(2)} \equiv \Delta_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(1)}-\Delta_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(1)} = f_{j+1}^{\pm}-2f_{j}^{\pm}+f_{j-1}^{\pm}$$

$$\Delta_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(3)} \equiv \Delta_{j+1}^{\pm(2)}-\Delta_{j}^{\pm(2)} = f_{j+2}^{\pm}-3f_{j+1}^{\pm}+3f_{j}^{\pm}-f_{j-1}^{\pm}$$

$$\Delta_j^{\pm(4)} \equiv \Delta_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(3)} - \Delta_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(3)} = f_{j+2}^{\pm} - 4f_{j+1}^{\pm} + 6f_j^{\pm} - 4f_{j-1}^{\pm} + f_{j-2}^{\pm}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(2k-1)} \equiv \Delta_{j+1}^{\pm(2k-2)} - \Delta_j^{\pm(2k-2)}$$

$$\Delta_j^{\pm(2k)} \equiv \Delta_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(2k-1)} - \Delta_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(2k-1)}$$

(1) 二阶精度 $r=2$ 的情况

由于

$$\Delta_j^{\pm(2)} = \Delta x^2\left(\frac{\partial^2 f^{\pm}}{\partial x^2}\right)_j + O(\Delta x^3) =$$

$$\Delta x^2\left(\frac{\partial^2 f^{\pm}}{\partial x^2}\right)_{j+\frac{1}{2}} + O(\Delta x^3) = \Delta x^2\left(\frac{\partial^2 f^{\pm}}{\partial x^2}\right)_{j-\frac{1}{2}} + O(\Delta x^3)$$

因此令

$$\left.\begin{aligned} D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(2)} &\equiv \mathrm{ms}(\Delta_{j+1}^{\pm(2)}, \Delta_j^{\pm(2)}) = \Delta x^2\left(\frac{\partial^2 f^{\pm}}{\partial x^2}\right)_{j+\frac{1}{2}} + O(\Delta x^3) \\ D_j^{\pm(2)} &\equiv \frac{1}{2}(D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(2)} + D_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(2)}) = \Delta x^2\left(\frac{\partial^2 f^{\pm}}{\partial x^2}\right)_j + O(\Delta x^3) \end{aligned}\right\} \tag{5.4.60}$$

又由于

$$\Delta_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(1)} = \Delta x\left(\frac{\partial f^{\pm}}{\partial x}\right)_j + \frac{1}{2}\Delta x^2\left(\frac{\partial^2 f^{\pm}}{\partial x^2}\right)_j + O(\Delta x^3)$$

$$\Delta_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(1)} = \Delta x\left(\frac{\partial f^{\pm}}{\partial x}\right)_j - \frac{1}{2}\Delta x^2\left(\frac{\partial^2 f^{\pm}}{\partial x^2}\right)_j + O(\Delta x^3)$$

则有

$$\Delta_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(1)} - \frac{1}{2}D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(2)} = \Delta x\left(\frac{\partial f^{\pm}}{\partial x}\right)_j + O(\Delta x^3)$$

$$\Delta_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(1)} + \frac{1}{2}D_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(2)} = \Delta x\left(\frac{\partial f^{\pm}}{\partial x}\right)_j + O(\Delta x^3)$$

因此令

$$\left.\begin{aligned} D_j^{\pm(1)} &\equiv \mathrm{ms}\left(\Delta_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(1)} - \frac{1}{2}D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(2)}, \Delta_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(1)} + \frac{1}{2}D_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(2)}\right) = \\ &\quad \Delta x\left(\frac{\partial f^{\pm}}{\partial x}\right)_j + O(\Delta x^3) \\ D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(1)} &\equiv \frac{1}{2}\left(D_{j+1}^{\pm(1)} + D_j^{\pm(1)}\right) = \Delta x\left(\frac{\partial f^{\pm}}{\partial x}\right)_{j+\frac{1}{2}} + O(\Delta x^3) \end{aligned}\right\} \tag{5.4.61}$$

又因为

$$f_j^+ = f_{j+\frac{1}{2}}^+ - \frac{1}{2}\Delta x\left(\frac{\partial f^+}{\partial x}\right)_{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\Delta x^2\left(\frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2}\right)_{j+\frac{1}{2}} + O(\Delta x^3)$$

$$f_{j+1} = f_{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\Delta x^2\left(\frac{\partial^2 f^-}{\partial x^2}\right)_{j+\frac{1}{2}} + O(\Delta x^3)$$

因此令

$$\left.\begin{aligned} D_{j+\frac{1}{2}}^{+(0)} &\equiv f_j^+ + \frac{1}{2}D_{j+\frac{1}{2}}^{+(1)} - \frac{1}{8}D_{j+\frac{1}{2}}^{+(2)} = f_{j+\frac{1}{2}}^+ + O(\Delta x^3) \\ D_{j+\frac{1}{2}}^{-(0)} &\equiv f_{j+1} - \frac{1}{2}D_{j+\frac{1}{2}}^{(1)} - \frac{1}{8}D_{j+\frac{1}{2}}^{(2)} = f_{j+\frac{1}{2}} + O(\Delta x^3) \end{aligned}\right\} \tag{5.4.62}$$

最后直接令

$$D_j^{\pm(0)} \equiv \Delta_j^{\pm(0)} = f_j^{\pm} \tag{5.4.63}$$

由表达式(5.4.60)～式(5.4.63)给出的 $D_j^{\pm(k)}, D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(k)}, k=0,1,2$ 是满足关系式(5.4.51)、式(5.4.53)要求的。将它们代入表达式(5.4.54)、式(5.4.55)即可得到二阶 UENO 格式的数值通量。

(2) 三阶精度 $r=3$ 的情况

此时，满足关系式(5.4.51)、式(5.4.53)要求的 $D_j^{\pm(k)}$、$D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(k)}$,($k=0,1,2,3$)可给出如下

$$
\left.\begin{aligned}
D_j^{\pm(3)} &\equiv \mathrm{ms}\left(\Delta_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(3)}, \Delta_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(3)}\right) \\
D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(3)} &\equiv \frac{1}{2}\left(D_{j+1}^{\pm(3)} + D_j^{\pm(3)}\right) \\
D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(2)} &\equiv \mathrm{ms}\left(\Delta_{j+1}^{\pm(2)} - \frac{1}{2} D_{j+1}^{\pm(3)}, \Delta_j^{\pm(2)} + \frac{1}{2} D_j^{\pm(3)}\right) \\
D_j^{\pm(2)} &\equiv \frac{1}{2}\left(D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(2)} + D_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(2)}\right) \\
D_j^{\pm(1)} &\equiv \mathrm{ms}\left(\Delta_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(1)} - \frac{1}{2} D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(2)} + \frac{1}{12} D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(3)},\right. \\
&\qquad\quad \left.\Delta_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(1)} + \frac{1}{2} D_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(2)} + \frac{1}{12} D_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(3)}\right) \\
D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(1)} &\equiv \frac{1}{2}\left(D_{j+1}^{\pm(1)} + D_j^{\pm(1)}\right) - \frac{1}{8} D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(3)} \\
D_j^{\pm(0)} &\equiv \Delta_j^{\pm(0)} = f_j^{\pm} \\
D_{j+\frac{1}{2}}^{+(0)} &\equiv f_j^{+} + \frac{1}{2} D_{j+\frac{1}{2}}^{+(1)} - \frac{1}{8} D_{j+\frac{1}{2}}^{+(2)} + \frac{1}{48} D_{j+\frac{1}{2}}^{+(3)} \\
D_{j+\frac{1}{2}}^{-(0)} &\equiv f_{j+1}^{-} - \frac{1}{2} D_{j+\frac{1}{2}}^{-(1)} - \frac{1}{8} D_{j+\frac{1}{2}}^{-(2)} - \frac{1}{48} D_{j+\frac{1}{2}}^{-(3)}
\end{aligned}\right\}
\tag{5.4.64}
$$

将式(5.4.64)代入式(5.4.56)、式(5.4.57)即可得到三阶 UENO 格式的数值通量。

(3) 四阶精度 $r=4$ 的情况

此时，满足关系式(5.4.51)、式(5.4.53)要求的 $D_j^{\pm(k)}$、$D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(k)}, k=0,1,2,3,4$ 可给出如下

$$
\left.\begin{aligned}
&D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(4)} \equiv \mathrm{ms}\left(\Delta_{j+1}^{\pm(4)}, \Delta_j^{\pm(4)}\right) \\
&D_j^{\pm(4)} \equiv \frac{1}{2}\left(D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(4)} + D_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(4)}\right) \\
&D_j^{\pm(3)} \equiv \mathrm{ms}\left(\Delta_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(3)} - \frac{1}{2}D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(4)}, \Delta_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(3)} + \frac{1}{2}D_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(4)}\right) \\
&D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(3)} \equiv \frac{1}{2}\left(D_{j+1}^{\pm(3)} + D_j^{\pm(3)}\right) \\
&D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(2)} \equiv \mathrm{ms}\left(\Delta_{j+1}^{\pm(2)} - \frac{1}{2}D_{j+1}^{\pm(3)} + \frac{1}{24}D_{j+1}^{\pm(4)},\right. \\
&\qquad\qquad \left.\Delta_j^{\pm(2)} + \frac{1}{2}D_j^{\pm(3)} + \frac{1}{24}D_j^{\pm(4)}\right) \\
&D_j^{\pm(2)} \equiv \frac{1}{2}\left(D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(2)} + D_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(2)}\right) - \frac{1}{8}D_j^{\pm(4)} \\
&D_j^{\pm(1)} \equiv \mathrm{ms}\left(\Delta_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(1)} - \frac{1}{2}D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(2)} + \frac{1}{12}D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(3)} - \frac{1}{48}D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(4)},\right. \\
&\left.\Delta_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(1)} + \frac{1}{2}D_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(2)} + \frac{1}{12}D_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(3)} + \frac{1}{48}D_{j-\frac{1}{2}}^{\pm(4)}\right) \\
&D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(1)} \equiv \frac{1}{2}\left(D_{j+1}^{\pm(1)} + D_j^{\pm(1)}\right) - \frac{1}{8}D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(3)} \\
&D_j^{\pm(0)} \equiv \Delta_j^{\pm(0)} = f_j^{\pm} \\
&D_{j+\frac{1}{2}}^{+(0)} \equiv f_j^{+} + \frac{1}{2}D_{j+\frac{1}{2}}^{+(1)} - \frac{1}{8}D_{j+\frac{1}{2}}^{+(2)} + \frac{1}{48}D_{j+\frac{1}{2}}^{+(3)} - \frac{1}{384}D_{j+\frac{1}{2}}^{+(4)} \\
&D_{j+\frac{1}{2}}^{-(0)} \equiv f_{j+1}^{-} - \frac{1}{2}D_{j+\frac{1}{2}}^{-(1)} - \frac{1}{8}D_{j+\frac{1}{2}}^{-(2)} - \frac{1}{48}D_{j+\frac{1}{2}}^{-(3)} - \frac{1}{384}D_{j+\frac{1}{2}}^{-(4)}
\end{aligned}\right\}
\tag{5.4.65}
$$

将式(5.4.65)代入式(5.4.58)、式(5.4.59)即可得到四阶 UENO 格式的数值通量。

5.4.5 WENO 格式

ENO 格式的主要思想是在若干个可能的插值区域中选择一个最光滑的插值区域,用来进行插值计算以使高精度地逼近网格界面处的通量,并且同时可避免激波附近的虚假振荡。

ENO 格式除激波处外全场具有一致的高阶精度。但它们也有某些缺点,而这些缺点也正是由在若干可能的插值区域中选择一个最光滑的区域这个主要思想所产生的。一个缺点是在解和它的导数的零值附近即使一个舍入误差扰动也可能改变最光滑区域的位置;另一个缺点是由于在选择插值区域的步骤中包含着大量使用逻辑语句而不便于进行并行运算;最后一个缺点是增加了格式点数。

显然,如果插值区域位于解的光滑区,则利用高次多项式来逼近网格界面处的数值通量可以达到足够高的精度,但如果该插值区域中包含着间断,那么利用高次多项式来逼近网格界面处的数值通量将不太精确甚至根本是不精确的。因此,在若干可能的插值区域中选择一个最光滑的插值区域,用来进行插值计算以便高精度地逼近网格界面处的数值通量这种做法在间断附近是非常希望的,因为这样可禁止使用包含间断的插值区域中的信息。但是这种做法在光滑区域中就不是那么希望的了,因为这时每一个可能的插值区域能给出几乎同样精确的网格界面处数值通量的近似值。

基于上述分析,Liu,Osher 和 Chan[11]提出了 WENO(weighted essentially non-oscillatory)格式,它是从由 Harten,Osher,Engquist 和 Chakravarthy[6]首先提出的网格平均形式的 ENO 格式的基础上发展出来的。稍后,Jiang 和 Shu[12]把由 Shu 和 Osher 提出的通量形式的 ENO 格式[8,9]发展成 WENO 格式。

WENO 格式的基本思想是将 ENO 格式中只用一个最光滑的插值区域来提供网格界面处数值通量的近似值的做法改成将每一个可能的插值区域提供的网格界面处数值通量作加权平均。具体地说,对每一个可能的插值区域赋予一个权重,它决定了该插值区

域对于最终的网格界面处的数值通量的贡献。这些权重可以这样规定,使得在光滑区域内,它们趋近于某种最佳的权重以达到更高阶的精度;而在间断附近的区域中,那些包含间断的插值区域被赋予几乎为零的权重。这样,在间断周围由于模仿了 ENO 格式的做法(包含间断的插值区域对网格界面处的最终的数值通量的贡献几乎为零),从而获得了基本无振荡的特性;并且在离开间断的区域内由于模仿了带有最佳权重的上游中心格式而具有更高阶的精度。

WENO 格式完全取消了出现在 ENO 格式的选择插值区域步骤中的逻辑语句,其结果是如在向量机上进行计算,WENO 格式的计算效率至少比 ENO 格式高一倍,并且对于在实际计算中出现的舍入误差不敏感。

下面对 WENO 格式作简单介绍。仍然以如下一维标量守恒律方程为例来说明

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0 \tag{5.4.66}$$

它的半离散守恒型格式为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_j = L = -\frac{1}{\Delta x}\left(h_{j+\frac{1}{2}}-h_{j-\frac{1}{2}}\right) \tag{5.4.67}$$

将通量 $f(u)$ 分裂成

$$f(u)=f^{+}(u)+f^{-}(u) \tag{5.4.68}$$

该处 $\frac{\mathrm{d}f^{+}(u)}{\mathrm{d}u}\geqslant 0$ 和 $\frac{\mathrm{d}f^{-}(u)}{\mathrm{d}u}\leqslant 0$。例如可以定义

$$f^{\pm}(u)\equiv\frac{1}{2}[f(u)\pm \alpha u] \tag{5.4.69}$$

该处 $\alpha=\max\left|\frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}\right|$,这里是在 u 的整个相关范围内取最大值。这就是整体 Lax-Friedrichs(LF)通量分裂。与之相应,数值通量也被分裂成

$$h_{j+\frac{1}{2}} = h^{+}_{j+\frac{1}{2}} + h^{-}_{j+\frac{1}{2}} \tag{5.4.70}$$

下面将只介绍如何确定 $h^{+}_{j+\frac{1}{2}}$，并且为了书写简单，将略去上标"+"。至于 $h^{-}_{j-\frac{1}{2}}$的确定方法是完全类似的，不再赘述。

在 5.4.4 节中已经表明，如果根据已知的分布 $\{f_i^t\}$ 来构造 $x=x_{j-\frac{1}{2}}$附近的多项式 $P_{j+\frac{1}{2}}(x)$，使得

$$P_{j+\frac{1}{2}}(x) = f(x) + O(\Delta x^{r+1}),\text{当} |x - x_{j+\frac{1}{2}}| \leqslant \Delta x \text{ 时} \tag{5.4.71}$$

然后令

$$h_{j+\frac{1}{2}} = P_{j+\frac{1}{2}}(x_{j+\frac{1}{2}}) + \sum_{l=1}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} a_{2l}\Delta x^{2l}\left(\frac{\partial^{2l}P_{j+\frac{1}{2}}}{\partial x^{2l}}\right)_{j+\frac{1}{2}} \tag{5.4.72}$$

式中 $a_0=1$；$a_2,a_4,\cdots$满足关系式(5.4.16)，那么这就是所需要的 r 阶格式的数值通量。

由上述知道，r 阶 ENO 格式是从 r 个可能的插值区域中选择一个最光滑的插值区域，并且只使用选出的这一个插值区域来计算数值通量 $h_{j+\frac{1}{2}}$。用 $S_K, K=0,1,\cdots,r-1$ 表示 r 个可能的插值区域，该处

$$S_K = (x_{j+K-r+1}, x_{j+K-r+2}, \cdots, x_{j+K})$$

如果 S_K 被选为 ENO 的插值区间，那么 r 阶 ENO 格式的数值通量是

$$h_{j+\frac{1}{2}} = q_K^r(f_{j+K-r+1}, \cdots, f_{j+K}) \tag{5.4.73}$$

该处

$$q_K^r(g_0, \cdots, g_{r-1}) = \sum_{l=0}^{r-1} a_{K,l}^r g_l \tag{5.4.74}$$

这里 $a_{K,l}^r, 0 \leqslant K, l \leqslant r-1$ 是常系数。

今以三阶 ENO 格式为例说明之。此时有三个可能的插值区

域：$S_0(x_{j-2},x_{j-1},x_j)$，$S_1(x_{j-1},x_j,x_{j+1})$和$S_2(x_j,x_{j+1},x_{j+2})$。与它们相应的数值通量分别为$q_0^3(f_{j-2},f_{j-1},f_j)$，$q_1^3(f_{j-1},f_j,f_{j+1})$和$q_2^3(f_j,f_{j+1},f_{j+2})$。首先来确定$q_0^3(f_{j-2},f_{j-1},f_j)$

$$q_0^3(f_{j-2},f_{j-1},f_j) = q_0^3(x_{j+\frac{1}{2}})$$

而

$$q_0^3(x) = P_0^3(x) + a_2\Delta x^2\frac{\partial^2 P_0^3(x)}{\partial x^2}$$

式中，$a_2=-\dfrac{1}{24}$，$P_0^3(x)$是由f_{j-2},f_{j-1},f_j构成的二次插值多项式，易于得到

$$P_0^3(x) = f_{j-1} + \frac{f_j - f_{j-2}}{2\Delta x}(x - x_{j-1}) + \frac{f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2}}{2\Delta x^2}(x - x_{j-1})^2$$

于是有

$$q_0^3(x) = f_{j-1} + \frac{f_j - f_{j-2}}{2\Delta x}(x - x_{j-1}) + \frac{f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2}}{2\Delta x^2}\times (x - x_{j-1})^2 - \frac{1}{24}(f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2})$$

$$q_0^3(f_{j-2},f_{j-1},f_j) = q_0^3(x_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{3}f_{j-2} - \frac{7}{6}f_{j-1} + \frac{11}{6}f_j \tag{5.4.75}$$

同理可得

$$q_1^3(x) = f_j + \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta x}(x - x_j) + \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{2\Delta x^2}\times (x - x_j)^2 - \frac{1}{24}(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1})$$

$$q_1^3(f_{j-1},f_j,f_{j+1}) = -\frac{1}{6}f_{j-1} + \frac{5}{6}f_j + \frac{1}{3}f_{j+1} \tag{5.4.76}$$

$$q_2^3(x) = f_{j+1} + \frac{f_{j+2} - f_j}{2\Delta x}(x - x_{j+1}) + \frac{f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j}{2\Delta x^2}\times$$

$$(x - x_{j+1})^2 - \frac{1}{24}(f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j)$$

$$q_2^3(f_j, f_{j+1}, f_{j+2}) = \frac{1}{3}f_j + \frac{5}{6}f_{j+1} - \frac{1}{6}f_{j+2} \quad (5.4.77)$$

在若干个可能的插值区域中只选出一个最光滑的插值区域，并由它算出数值通量。这种方法在间断附近区域内是非常希望的，因为它能排除来自包含间断的插值区域中的不那么精确甚至完全不精确的信息。然而上述这种方法在光滑区域内就不是那么所希望的了，因为此时所有可能的插值区域将提供出同样精确的信息，于是若同时使用所有可能的插值区域就可能给出关于网格界面处通量的更高阶近似。事实上，对于 r 阶 ENO 格式而言，有 r 个可能的插值区域，如果将它们合在一起将形成一个包含 $(2r-1)$ 个 f 的格点值的合成插值区域，它能给出网格界面处通量 $f(x_{j+\frac{1}{2}})$ 的 $(2r-1)$ 阶近似

$$h_{j+\frac{1}{2}} = q^{2r-1}(f_{j-r+1}, \cdots, f_{j+r-1})$$

下面仍以三阶 ENO 格式为例，给出 $q^5(f_{j-2}, f_{j-1}, f_j, f_{j+1}, f_{j+2})$ 的表示式。

由式(5.4.27)知

$$q^5(f_{j-2}, f_{j-1}, f_j, f_{j+1}, f_{j+2}) = P^5(x_{j+\frac{1}{2}}) + a_2\Delta x^2\left(\frac{\partial^2 P^5}{\partial x^2}\right)_{j+\frac{1}{2}} + a_4\Delta x^4\left(\frac{\partial^4 P^5}{\partial x^4}\right)_{j+\frac{1}{2}} \quad (5.4.78)$$

式中 $a_2 = -\frac{1}{24}$，$a_4 = \frac{7}{5760}$，$P^5_{j+\frac{1}{2}}(x)$ 是由 $f_{j-2}, f_{j-1}, f_j, f_{j+1}, f_{j+2}$ 得到的四次插值多项式。易于得到

$$P^5(x) = f_j - \frac{f_{j+2} - 8f_{j+1} + 8f_{j-1} - f_{j-2}}{12\Delta x}(x - x_j) - \frac{f_{j+2} - 16f_{j+1} + 30f_j - 16f_{j-1} + f_{j-2}}{24\Delta x^2}(x - x_j)^2 +$$

$$\frac{f_{j+2}-2f_{j+1}+2f_{j-1}-f_{j-2}}{12\Delta x^3}(x-x_j)^3+$$

$$\frac{f_{j+2}-4f_{j+1}+6f_j-4f_{j-1}+f_{j-2}}{24\Delta x^4}(x-x_j)^4$$

将它代入式(5.4.78)可得

$$q^5(f_{j-2},f_{j-1},\cdots,f_{j+2})=\frac{1}{30}f_{j-2}-\frac{13}{60}f_{j-1}+$$
$$\frac{47}{60}f_j+\frac{9}{20}f_{j+1}-\frac{1}{20}f_{j+2} \tag{5.4.79}$$

它正好是五阶上游中心格式的数值通量。

如果将此 $q^5(f_{j-2},f_{j-1},\cdots,f_{j+2})$ 作为数值通量，虽然格式精度为五阶，但它不能排除来自包含间断的插值区域的不精确的信息，在激波附近将产生虚假的振荡。

为此，构造 WENO 格式，它的数值通量的表达式为

$$h_{j+\frac{1}{2}}=\sum_{K=0}^{r-1}\mathrm{W}_K q_K^r(f_{j+K-r+1},\cdots,f_{j+K}) \tag{5.4.80}$$

式中 $q_K^r(f_{j+K-r+1},\cdots,f_{j+K})$ 由式(5.4.74)所规定，W_K 是赋予每一个可能的插值区域 S_K，$K=0,1,\cdots,r-1$ 的权重。关键是如何决定 W_K。

为了获得基本无振荡特性，应该使 W_K 与相应插值区域中 f 的光滑性关联起来，使得任何包含间断的插值区域将被赋予接近于零的权重。同时要求在光滑区域中权重的分布将导致尽可能与式(5.4.78)给出的数值通量相接近的 $h_{j+\frac{1}{2}}$。令

$$q^{2r-1}(f_{j-r+1},\cdots,f_{j+r-1})=$$
$$\sum_{K=0}^{r-1}C_K^r q_K^r(f_{j+K-r+1},\cdots,f_{j+K}) \tag{5.4.81}$$

经简单的代数运算就可确定这些系数，并满足 $\sum_{K=0}^{r-1}C_K^r=1$。

今以三阶 ENO 格式为例说明之。将由式(5.4.79)确定的

$q^5(f_{j-2},f_{j-1},\cdots,f_{j+2})$以及分别由式(5.4.75)、式(5.4.76)和式(5.4.77)确定的 $q_0^3(f_{j-2},f_{j-1},f_j)$,$q_1^3(f_{j-1},f_j,f_{j+1})$和 $q_2^{(3)}(f_j,f_{j+1},f_{j+2})$代入式(5.4.81),可得

$$C_0^3 = \frac{1}{10},\quad C_1^3 = \frac{3}{5},\quad C_2^3 = \frac{3}{10} \tag{5.4.82}$$

由式(5.4.80)和式(5.4.81)可得

$$h_{j+\frac{1}{2}} = q^{2r-1}(f_{j-r+1},\cdots,f_{j+r-1}) + \sum_{K=0}^{r-1}(W_K - C_K^r)q_K^r(f_{j+K-r+1},\cdots,f_{j+K}) \tag{5.4.83}$$

由式(5.4.78)所定义的 $q^{2r-1}(f_{j-r+1},\cdots,f_{j+r-1})$是$f(x_{j+\frac{1}{2}})$的$(2r-1)$阶近似。因为 $\sum_{K=0}^{r-1}C_K^r = 1$,如果要求 $\sum_{K=0}^{r-1}W_K = 1$,那么式(5.4.83)右端最后的求和项可以被改写为

$$\sum_{K=0}^{r-1}(W_K - C_K^r)[q_K^r(f_{j+K-r+1},\cdots,f_{j+K}) - f(u_{j+\frac{1}{2}})] \tag{5.4.84}$$

如果再要求

$$W_K = C_K^r + O(\Delta x^{r-1}) \tag{5.4.85}$$
$$(K = 0,1,2,\cdots,r-1)$$

那么式(5.4.83)右端最后的求和项将为$O(\Delta x^{2r-1})$。这就是说,如果将权重 W_K 选取得满足关系式(5.4.85)及 $\sum_{K=0}^{r-1}W_K = 1$,那么由式(5.4.80)规定的数值通量 $h_{j+\frac{1}{2}}$ 将具有$(2r-1)$阶精度。因而称 C_K^r 为最佳权重。

至此,剩下的问题就是如何确定权重 W_K,使得它满足下列要求。

(1) $\sum_{K=0}^{r-1}W_K = 1$。

(2) 在光滑区域中,它满足关系式(5.4.85)。

(3) 任何包含间断的插值区域将被赋予接近于零的权重。

在文献[11]中,权重被规定如下

$$W_K = \frac{\alpha_K}{\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{r-1}} \tag{5.4.86}$$

式中

$$\alpha_K = \frac{C_K^r}{(\varepsilon + IS_K)^p}, k = 0,1,\cdots,r-1 \tag{5.4.87}$$

这里,ε 是一个正的实数,引进它的目的在于避免分母为零,一般说可取 $\varepsilon = 10^{-6}$;p 取大于等于 2 的正整数;IS_K 是第 K 个可能的插值区域的光滑性度量。它可以有不同的定义,文献[12]中的定义如下

$$IS_K = \sum_{l=1}^{r-1} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (\Delta x)^{2l-1} (q_K^{r(l)})^2 \mathrm{d}x \quad (k=0,1,\cdots,r-1) \tag{5.4.88}$$

式中 $q_K^{r(l)}$ 是 $q_K^r(x)$的 l 阶导数。

仍以三阶 ENO 格式说明之。此时,$r=3$。将前面的 $q_0^3(x)$,$q_1^3(x)$和 $q_2^3(x)$的表达式代入式(5.4.88)可得

$$IS_0 = \frac{13}{12}(f_{j-2} - 2f_{j-1} + f_j)^2 + \frac{1}{4}(f_{j-2} - 4f_{j-1} + 3f_j)^2 \tag{5.4.89}$$

$$IS_1 = \frac{13}{12}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1})^2 + \frac{1}{4}(f_{j-1} - f_{j+1})^2 \tag{5.4.90}$$

$$IS_2 = \frac{13}{12}(f_j - 2f_{j+1} + f_{j+2})^2 + \frac{1}{4}(3f_j - 4f_{j+1} + f_{j+2})^2 \tag{5.4.91}$$

在光滑区域,式(5.4.89)~式(5.4.91)的 Taylor 展开分别给出

$$IS_0 = \frac{13}{12}(\Delta x^2 f_j'')^2 + \frac{1}{4}(2\Delta x f_j' - \frac{2}{3}\Delta x^3 f_j''')^2 + O(\Delta x^5) \tag{5.4.92}$$

$$\mathrm{IS}_1 = \frac{13}{12}(\Delta x^2 f_j'')^2 + \frac{1}{4}(2\Delta x f_j' + \frac{1}{3}\Delta x^3 f_j''')^2 + O(\Delta x^6) \tag{5.4.93}$$

$$\mathrm{IS}_2 = \frac{13}{12}(\Delta x^2 f_j'')^2 + \frac{1}{4}(2\Delta x f_j' - \frac{2}{3}\Delta x^3 f_j''')^2 + O(\Delta x^5) \tag{5.4.94}$$

如果 $f_j' \neq 0$,那么有

$$\mathrm{IS}_K = (\Delta x f_j')^2[1 + O(\Delta x^2)], K = 0,1,2 \tag{5.4.95}$$

现在分析由式(5.4.86),式(5.4.87)和式(5.4.88)共同确定的权重 W_K 是否满足上述三个要求。首先,由式(5.4.86)显然可得 $\sum_{K=0}^{r-1} W_K = 1$。其次,将式(5.4.95) 代入式(5.4.87)(考虑 $r = 3$ 的情况),并利用 Taylor 展开可得

$$\alpha_K = (\Delta x f_j')^{-2p} C_K^3 (1 + \Delta x^2)$$

将它代入式(5.4.86),并利用 Taylor 展开及 $\sum_{K=0}^{2} C_K^3 = 1$ 可得

$$W_K = C_K^3 + O(\Delta x^2)$$

这就证明了它满足关系式(5.4.85)。最后,由式(5.4.95)知,若插值区域 S_K 中包含间断,则对应的 IS_K 将是很大的值,从而 α_K 以及 W_K 将是接近于零的。

综上所述,可得如下结论(对于 $r=3$ 的情况)。

式(5.4.67),式(5.4.70),式(5.4.80),式(5.4.75),式(5.4.76),式(5.4.77),式(5.4.86),式(5.4.87),式(5.4.82),式(5.4.89),式(5.4.90),式(5.4.91)所决定的格式在光滑区具有五阶精度并能避免激波附近的虚假振荡。

应当说明的是,上面这些式子并未构成一个完整的格式,它只给出了 $h^+_{j+\frac{1}{2}}$,至于 $h^-_{j+\frac{1}{2}}$,它与 $h^+_{j+\frac{1}{2}}$ 对于 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 是对称的,这里没有给出。

5.5 广义紧致格式

高精度计算格式的研究与应用在当今计算流体力学中已占有不容忽视的地位,并越来越多地被工程应用计算所采用。

尽管高精度计算格式的研究与应用取得了巨大的进展,但还存在某些不足。例如,对于大多数高精度格式而言,随着格式精度阶数的提高,格式点数增加,导致边界条件处理困难、在毗邻边界的内点处不得不降低格式的精度;又例如,相当多的高精度格式难于同时满足稳定性和无振荡条件。

紧致格式的深入研究与应用是当前高精度格式研究的主要方向之一。它以精度高且格式点数少的特点而受到重视。早在20世纪60年代末Kreiss就已提出四阶紧致差分格式的雏形,但由于当时计算条件的限制和人们认识的局限性未能得到很好的发展。经历了近三十年的发展,目前已有不少工作将紧致格式应用于流体力学问题的求解。20世纪90年代以来,紧致格式有了新进展,Lele[13]给出不限于三点的对称型紧致格式,如五点的六阶精度格式、七点的十阶精度格式等;并且给出了高阶导数的紧致逼近公式,同时对这些逼近所能正确模拟的波数范围作了近似分析。这些紧致格式的不足之处有:①格式点数还嫌多,导致边界及毗邻边界的内点处理困难;②不满足"抑制波动原则",因此单独使用这些格式,数值解在激波附近将产生非物理振荡,格式精度越高,振荡越严重。Halt[14]认为,紧致格式的进一步发展在于无波动的激波捕捉技术的研究。为了改善数值解在激波附近的非物理的高频振荡,I.Christie(1985),傅德薰和马延文(1992)提出了迎风紧致格式[15]。为了不增加格式点数而进一步提高格式精度,马延文和傅德薰又提出了超紧致格式[16]。但这两类格式都不满足"抑制波动原则"。我们将上述这些紧致格式进一步推广,提出了广义紧致格式[17]。前述对称紧致格式、迎风紧致格式和超紧致格式都是它的特例。并且在达到同样精度的条件下,广义紧致格式所需的格式

点数最少。广义紧致格式本身也不满足“抑制波动原则”，为了能计算带激波的复杂流场，将广义紧致格式分别与 UENO 格式和 WENO 格式结合起来构造了任意阶精度三点广义紧致 UENO 格式[18]和任意阶精度三点广义紧致 WENO-FCT 格式[19]。这些格式的格式点数均为 3，因此排除了毗邻边界内点处精度下降的困难，同时又能抑制激波附近的非物理数值振荡。最近，我们利用广义紧致格式结合待定系数法提出了构造高精度、高分辨率格式的一条新途径，它能从事先规定的保证格式具有所希望性能的一些原则和要求（例如“抑制波动原则”、“稳定性原则”、“熵增原则”、精度阶数、格式点数等）出发，用一种普遍性的方法构造出所需要的高精度、高分辨率格式[20]。

5.5.1 关于差分格式的一种新的理解

为简单起见，以如下常微分方程的两点边值问题为例说明之

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + by + cx = 0 \tag{5.5.1}$$

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{5.5.2}$$

在[0,1]区间上，记网格点的坐标为$\{x_j\}$，网格间距为 Δx，格点函数值为$\{y_j\}$，$j=1,2,\cdots,N$。

差分格式的通常理解是，在每一个内格点 x_j 处，将方程(5.5.1)中的一阶和二阶导数分别用某种差商替代后得到的代数方程，称之为方程(5.5.1)的一个差分格式（或差分方程）。例如用如下中心差商代替相应的导数

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_j = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2\Delta x}, (j = 2,3,\cdots,N-1) \tag{5.5.3}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right)_j = \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{\Delta x^2}, (j = 2,3,\cdots,N-1) \tag{5.5.4}$$

将它们代入式(5.5.1)，得到

$$\left.\begin{array}{l}\left(1+\frac{a\Delta x}{2}\right)y_{j+1}+(b\Delta x^2-2)y_j+\\ \left(1-\frac{a\Delta x}{2}\right)y_{j-1}+C\Delta x^2 x_j=0\\ \qquad (j=2,3,\cdots,N-1)\end{array}\right\}\tag{5.5.5}$$

称式(5.5.5)为式(5.5.1)的中心差分格式。

由边界条件式(5.5.2)得

$$y_1=y_N=0\tag{5.5.6}$$

将式(5.5.5)和式(5.5.6)合在一起就形成了一个封闭的代数方程组。它的解就是边值问题{式(5.5.1),式(5.5.2)}的数值解。

还可以从另一个角度来看待上述求解过程。在每一内格点 $x=x_j$ 处,式(5.5.1)表达为

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)_j+a\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_j+by_j+cx_j=0\\ (j=2,3,\cdots,N-1)\end{array}\right\}\tag{5.5.7}$$

如果把格点函数值 y_j 和一阶、二阶导数值 $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_j$ 和 $\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)_j$ 都视为独立的未知量,那么上述代数方程组(5.5.7)显然是不封闭的。为了使它封闭,必须加上适当数目的联系各阶导数和函数值之间的补充关系式。式(5.5.3)和式(5.5.4)就可看作这样的补充关系式。将式(5.5.7)、式(5.5.3)、式(5.5.4)和式(5.5.6)合起来就形成了一个封闭的代数方程组。它的解包括了边值问题{式(5.5.1)、式(5.5.2)}的数值解 y_j,($j=1,2,\cdots,N$)及其一阶和二阶导数的内格点值 $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_j$ 和 $\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)_j$,($j=2,3,\cdots,N-1$)。

5.5.2 广义紧致格式

如果 m 个补充关系式中每一个补充关系式都允许包含若干个格点处的函数值及直至 m 阶导数的值,这种差分格式称为广义紧致格式。

以 r 阶常微分方程 $F(x,u,u^{(1)},u^{(2)},\cdots,u^{(r)})=0$ 为例，在 $[a,b]$ 区间上，记网格点坐标为 $\{x_j\}$，网格间距为 Δx，格点处函数值为 $\{u_j\}$，$(j=1,2,\cdots,N)$。任意阶精度的广义紧致格式可表述为

$$\left.\begin{aligned}&F(x_j,u_j,u_j^{(1)},u_j^{(2)},\cdots,u_j^{(r)})=0\\&\sum_{S=0}^{m}\sum_{K=K_1}^{K_2}a_{S,K}^{l}\Delta x^S u_{j+K}^{(S)}=0,(l=1,2,\cdots,m)\\&\qquad\qquad(j=1,2,\cdots,N)\end{aligned}\right\}\tag{5.5.8}$$

式中，m 为需要的补充关系式的数目，它等于补充关系式中出现的导数的最高阶数，$(m\geqslant r)$；K_1 和 K_2 分别为补充关系式中用到的最左和最右格点编号与所考察格点编号 (j) 之差，故 (K_2-K_1+1) 为格式点数；上标 (S) 表示 S 阶导数；$a_{S,K}^{l}$ 是待定系数。

选取不同的 $a_{S,K}^{l}$ $(K=K_1,K_1+1,\cdots,K_2;S=0,1,\cdots,m;l=1,2,\cdots,m)$ 的值就决定了不同的补充关系式，从而决定了不同的广义紧致格式。正是这些待定系数 $a_{S,K}^{l}$ 决定了广义紧致格式的格式精度、计算稳定性以及抑制非物理的数值振荡的能力等。因而，采用什么方法来适当地选定这些待定系数无疑是构造高性能广义紧致格式的关键。应当着重指出，选取的 $a_{S,K}^{l}$ 必须保证式 (5.5.8) 中第二式所包含的 m 个代数方程是线性无关的。

若 m 个补充关系式都是 P 阶精度的，则由此 m 个补充关系式所构成的广义紧致格式是 P 阶精度的。下面谈到的广义紧致格式的精度都是这种含义下的精度。应当指出，这种陈述是 P 阶广义紧致格式的充分条件，而非必要条件。

今考察式 (5.5.8) 中任意一个补充关系式

$$\sum_{S=0}^{m}\sum_{K=K_1}^{K_2}a_{S,K}\Delta x^S u_{j+K}^{(S)}=0\tag{5.5.9}$$

对式 (5.5.9) 在 $x=x_j$ 点邻域作 Taylor 展开，合并同阶次导数项，得到式 (5.5.9) 的展开式。若希望这个补充关系式是 P 阶精度

的，则上述展开式中的第 0,1,…,P 阶导数项的系数必须为零，从而得到关于待定系数 $\alpha_{S,K}$ 的如下$(P+1)$个约束方程

$$
\left.\begin{aligned}
&\sum_{K=K_1}^{K_2}\alpha_{0,K}=0\\
&\sum_{K=K_1}^{K_2}(K\alpha_{0,K}+\alpha_{1,K})=0\\
&\vdots\\
&\sum_{K=K_1}^{K_2}\left(\frac{K^n}{n!}\alpha_{0,K}+\frac{K^{n-1}}{(n-1)!}\alpha_{1,K}+\cdots+\alpha_{m,K}\right)=0\\
&\vdots\\
&\sum_{K=K_1}^{K_2}\left(\frac{K^P}{P!}\alpha_{0,K}+\frac{K^{P-1}}{(P-1)!}\alpha_{1,K}+\cdots+\frac{K^{P-m}}{(P-m)!}\alpha_{m,K}\right)=0
\end{aligned}\right\}
\tag{5.5.10}
$$

式(5.5.10)中共有$(P+1)$个齐次方程，不难验证这$(P+1)$个方程是彼此线性无关的。而式(5.5.10)中共有待定系数$(m+1)(K_2-K_1+1)$个。因此为了保证该方程组有非零解，必须满足$P+1<(m+1)(K_2-K_1+1)$。另一方面，为了能从式(5.5.10)中得到 m 组彼此线性无关的补充关系式中的系数，必须在 $\alpha_{S,K}$ 中取 m 个作为自由参数，因此 $\alpha_{S,K}$ 中独立系数的个数为

$$R=(m+1)(K_2-K_1+1)-m \tag{5.5.11}$$

将这 m 个自由参数按规定次序排列，形成一个 m 维向量，称为自由参数向量。适当赋值可得到 m 个彼此线性无关的自由参数向量。对于每一个选定的自由参数向量，须要有 R 个方程才能确定 R 个其余的 $\alpha_{S,K}$。如果这样，就得到了 m 组独立的系数 $\alpha_{S,K}$，从而构造了式(5.5.8)中的 m 个线性无关的补充关系式。若$(P+1)<R$，即约束方程的个数少于独立待定系数的个数，因而可有无穷多组解。这表明还可增加约束，使构造的广义紧致格式具有某种所希望的性能，例如满足“抑制波动原则”和“稳定性原

则"等。反之,若 $P+1>R$,即约束方程个数多于独立待定系数个数,将无解,此时只有减少约束方程的个数。在式(5.5.10)中取前 R 个方程作为约束方程,从而可解得 m 组独立的 $\alpha_{S,K}$,由此构造出式(5.5.8)中的 m 个线性无关的补充关系式。但此时因放弃了式(5.5.10)中最后($P+1-R$)个约束方程,故而所构造的广义紧致格式(5.5.8)的精度只有($R-1$)阶。由上述分析很易得到结论:广义紧致格式(5.5.8)所能达到的最高精度的阶数为 $P_{\max}=(K_2-K_1)(m+1)$。

下面作为例子来构造一些具体的紧致格式。

(1) Collatz 给出的五点六阶对称型紧致格式

此格式是广义紧致格式(5.5.8)中当 $m=1, K_1=-2, K_2=2, P=6$ 的特殊情况。此时,由式(5.5.10)得到关于待定系数 $\alpha_{S,K}$ 的约束方程组如下

$$
\left.
\begin{aligned}
&\alpha_{0,-2}+\alpha_{0,-1}+\alpha_{0,0}+\alpha_{0,1}+\alpha_{0,2}=0\\
&-2\alpha_{0,-2}-\alpha_{0,-1}+\alpha_{0,1}+2\alpha_{0,2}+\alpha_{1,-2}+\alpha_{1,-1}+\\
&\quad\alpha_{1,0}+\alpha_{1,1}+\alpha_{1,2}=0\\
&2\alpha_{0,-2}+\frac{1}{2}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{2}\alpha_{0,1}+2\alpha_{0,2}-2\alpha_{1,-2}-\\
&\quad\alpha_{1,-1}+\alpha_{1,1}+2\alpha_{1,2}=0\\
&-\frac{8}{6}\alpha_{0,-2}-\frac{1}{6}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{6}\alpha_{0,1}+\frac{8}{6}\alpha_{0,2}+2\alpha_{1,-2}+\\
&\quad\frac{1}{2}\alpha_{1,-1}+\frac{1}{2}\alpha_{1,1}+2\alpha_{1,2}=0\\
&\frac{16}{24}\alpha_{0,-2}+\frac{1}{24}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{24}\alpha_{0,1}+\frac{16}{24}\alpha_{0,2}-\frac{8}{6}\alpha_{1,-2}-\\
&\quad\frac{1}{6}\alpha_{1,-1}+\frac{1}{6}\alpha_{1,1}+\frac{8}{6}\alpha_{1,2}=0\\
&-\frac{32}{120}\alpha_{0,-2}-\frac{1}{120}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{120}\alpha_{0,1}+\frac{32}{120}\alpha_{0,2}+\frac{16}{24}\alpha_{1,-2}+\\
&\quad\frac{1}{24}\alpha_{1,-1}+\frac{1}{24}\alpha_{1,1}+\frac{16}{24}\alpha_{1,2}=0
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{64}{720}\alpha_{0,-2}+\frac{1}{720}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{720}\alpha_{0,1}+\frac{64}{720}\alpha_{0,2}-\frac{32}{120}\alpha_{1,-2}-\\
&\quad\frac{1}{120}\alpha_{1,-1}+\frac{1}{120}\alpha_{1,1}+\frac{32}{120}\alpha_{1,2}=0
\end{aligned}\right\}
\tag{5.5.12}
$$

这里共有 7 个方程,但包含 10 个待定系数,故可有 3 个自由参数。若选定 $\alpha_{0,0}$,$\alpha_{1,-2}$和 $\alpha_{1,2}$为自由参数并赋值如下:$\alpha_{0,0}=0$,$\alpha_{1,-2}=0$ 和 $\alpha_{1,2}=0$,则将它们代入式(5.5.12)可解出其余 7 个系数为

$$
\alpha_{0,-2}=\frac{1}{36},\alpha_{0,-1}=\frac{28}{36},\alpha_{0,1}=-\frac{28}{36},\alpha_{0,2}=-\frac{1}{36},
$$

$$
\alpha_{1,-1}=\frac{1}{3},\alpha_{1,0}=1,\alpha_{1,1}=\frac{1}{3}
$$

意即得到了如下补充关系式

$$
\begin{aligned}
&\Delta x\left(\frac{1}{3}u_{j-1}^{(1)}+u_{j}^{(1)}+\frac{1}{3}u_{j+1}^{(1)}\right)+\\
&\quad\frac{1}{36}u_{j-2}+\frac{14}{18}u_{j-1}-\frac{14}{18}u_{j+1}-\frac{1}{36}u_{j+2}=0
\end{aligned}
\tag{5.5.13}
$$

这就是 Collatz 给出的五点六阶对称型紧致格式。

(2) Collatz 给出的五点八阶对称型紧致格式

此格式是广义紧致格式(5.5.8)中当 $m=1,K_1=-2,K_2=2,P=8$ 的特殊情况。此时,由式(5.5.10)得到关于待定系数 $\alpha_{S,K}$的约束方程组如下

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{0,-2}+\alpha_{0,-1}+\alpha_{0,0}+\alpha_{0,1}+\alpha_{0,2}=0\\
&-2\alpha_{0,-2}-\alpha_{0,-1}+\alpha_{0,1}+2\alpha_{0,2}+\alpha_{1,-2}+\alpha_{1,-1}+\\
&\quad\alpha_{1,0}+\alpha_{1,1}+\alpha_{1,2}=0\\
&2\alpha_{0,-2}+\frac{1}{2}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{2}\alpha_{0,1}+2\alpha_{0,2}-2\alpha_{1,-2}-\\
&\quad\alpha_{1,-1}+\alpha_{1,1}+2\alpha_{1,2}=0\\
&-\frac{8}{6}\alpha_{0,-2}-\frac{1}{6}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{6}\alpha_{0,1}+\frac{8}{6}\alpha_{0,2}+2\alpha_{1,-2}+
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\alpha_{1,-1}+\frac{1}{2}\alpha_{1,1}+2\alpha_{1,2}=0\\
&\frac{16}{24}\alpha_{0,-2}+\frac{1}{24}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{24}\alpha_{0,1}+\frac{16}{24}\alpha_{0,2}-\frac{8}{6}\alpha_{1,-2}-\\
&\quad\frac{1}{6}\alpha_{1,-1}+\frac{1}{6}\alpha_{1,1}+\frac{8}{6}\alpha_{1,2}=0\\
&-\frac{32}{120}\alpha_{0,-2}-\frac{1}{120}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{120}\alpha_{0,1}+\frac{32}{120}\alpha_{0,2}+\frac{16}{24}\alpha_{1,-2}+\\
&\quad\frac{1}{24}\alpha_{1,-1}+\frac{1}{24}\alpha_{1,1}+\frac{16}{24}\alpha_{1,2}=0\\
&\frac{64}{720}\alpha_{0,-2}+\frac{1}{720}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{720}\alpha_{0,1}+\frac{64}{720}\alpha_{0,2}-\frac{32}{120}\alpha_{1,-2}-\\
&\quad\frac{1}{120}\alpha_{1,-1}+\frac{1}{120}\alpha_{1,1}+\frac{32}{120}\alpha_{1,2}=0\\
&-\frac{128}{5040}\alpha_{0,-2}-\frac{1}{5040}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{5040}\alpha_{0,1}+\frac{128}{5040}\alpha_{0,2}+\\
&\quad\frac{64}{720}\alpha_{1,-2}+\frac{1}{720}\alpha_{1,-1}+\frac{1}{720}\alpha_{1,1}+\frac{64}{720}\alpha_{1,2}=0\\
&\frac{256}{40320}\alpha_{0,-2}+\frac{1}{40320}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{40320}\alpha_{0,1}+\frac{256}{40320}\alpha_{0,2}-\\
&\quad\frac{128}{5040}\alpha_{1,-2}-\frac{1}{5040}\alpha_{1,-1}+\frac{1}{5040}\alpha_{1,1}+\frac{128}{5040}\alpha_{1,2}=0
\end{aligned}\right\}
\tag{5.5.14}
$$

这里共有 9 个方程，但包含 10 个待定系数，故可有 1 个自由参数。若选定 $\alpha_{0,0}$ 为自由参数并赋值为零，即令 $\alpha_{0,0}=0$，则将它代入式(5.5.14)可解出其余 9 个系数为

$$
\alpha_{0,-2}=\frac{25}{216},\alpha_{0,-1}=\frac{20}{27},\alpha_{0,1}=-\frac{20}{27},\alpha_{0,2}=-\frac{25}{216},
$$

$$
\alpha_{1,-2}=\frac{1}{36},\alpha_{1,-1}=\frac{4}{9},\alpha_{1,0}=1,\alpha_{1,1}=\frac{4}{9},\alpha_{1,2}=\frac{1}{36}。
$$

意即得到了如下补充关系式

$$
\Delta x\left(\frac{1}{36}u_{j-2}^{(1)}+\frac{4}{9}u_{j-1}^{(1)}+u_{j}^{(1)}+\frac{4}{9}u_{j+1}^{(1)}+\frac{1}{36}u_{j+2}^{(1)}\right)+\frac{25}{216}u_{j-2}+
$$

$$\frac{20}{27}u_{j-1}-\frac{20}{27}u_{j+1}-\frac{25}{216}u_{j+2}=0 \qquad (5.5.15)$$

这就是 Collatz 给出的五点八阶对称型紧致格式。

(3) 傅德薰、马延文提出的三点三阶迎风紧致格式

此格式是广义紧致格式(5.5.8)中当 $m=1,K_1=-1,K_2=1,P=3$ 的特殊情况。此时,由式(5.5.10)得到关于待定系数 $\alpha_{S,K}$ 的约束方程组如下

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{0,-1}+\alpha_{0,0}+\alpha_{0,1}=0\\
&-\alpha_{0,-1}+\alpha_{0,1}+\alpha_{1,-1}+\alpha_{1,0}+\alpha_{1,1}=0\\
&\frac{1}{2}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{2}\alpha_{0,1}-\alpha_{1,-1}+\alpha_{1,1}=0\\
&-\frac{1}{6}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{6}\alpha_{0,1}+\frac{1}{2}\alpha_{1,-1}+\frac{1}{2}\alpha_{1,1}=0
\end{aligned}\right\} \qquad (5.5.16)$$

这里共有 4 个方程,但包含 6 个待定系数,故可有 2 个自由参数。若选定 $\alpha_{0,1}$ 和 $\alpha_{1,1}$ 为 2 个自由参数并赋值如下:$\alpha_{0,1}=\frac{1}{6}$ 和 $\alpha_{1,1}=0$,则将它们代入式(5.5.16),可解出其余 4 个系数

$$\alpha_{0,\ 1}=-\frac{5}{6},\alpha_{0,0}=\frac{2}{3},\alpha_{1,-1}=-\frac{1}{3},\alpha_{1,0}=-\frac{2}{3}$$

意即得到了如下补充关系式

$$-\Delta x\left(\frac{1}{3}u_{j-1}^{(1)}+\frac{2}{3}u_{j}^{(1)}\right)-\frac{5}{6}u_{j-1}+\frac{2}{3}u_{j}+\frac{1}{6}u_{j+1}=0 \qquad (5.5.17)$$

这就是傅德薰、马延文提出的三点三阶迎风紧致格式。

(4) 傅德薰、马延文提出的五点五阶迎风紧致格式

此格式是广义紧致格式(5.5.8)中当 $m=1,K_1=-2,K_2=2,P=5$ 的特殊情况。此时,由式(5.5.10)得到的关于待定系数 $\alpha_{S,K}$ 的约束方程组为式(5.5.12)中前 6 个方程,其中包含 10 个待定系数,故可有 4 个自由参数。若选定 $\alpha_{1,-2},\alpha_{1,1},\alpha_{1,2}$ 和 $\alpha_{0,-2}$ 为 4 个自由参数并赋值如下:$\alpha_{1,-2}=0,\alpha_{1,1}=0,\alpha_{1,2}=0$ 和 $\alpha_{0,-2}=$

$\frac{1}{20}$,则将它们代入式(5.5.12)中前6个方程,可解出其余6个系数

$$\alpha_{0,-1}=\frac{11}{15},\alpha_{0,0}=-\frac{3}{5},\alpha_{0,1}=-\frac{1}{5},$$
$$\alpha_{0,2}=\frac{1}{60},\alpha_{1,-1}=\frac{2}{5},\alpha_{1,0}=\frac{3}{5}$$

意即得到了如下补充关系式

$$\Delta x\left(\frac{2}{5}u_{j-1}^{(1)}+\frac{3}{5}u_{j}^{(1)}\right)+\frac{1}{20}u_{j-2}+\frac{11}{15}u_{j-1}-\frac{3}{5}u_{j}-\frac{1}{5}u_{j+1}+\frac{1}{60}u_{j+2}=0 \qquad (5.5.18)$$

这就是傅德薰、马延文提出的五点五阶迎风紧致格式。

(5) 经典的 Pade 紧致格式

关于逼近一阶和二阶导数的经典的三点四阶 Pade 紧致格式是广义紧致格式(5.5.8)中当 $m=2,K_1=-1,K_2=1,P=4$ 的特殊情况。

此时,由式(5.5.10)得到的关于待定系数 $\alpha_{S,K}$ 的约束方程组是

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{0,-1}+\alpha_{0,0}+\alpha_{0,1}=0\\
&-\alpha_{0,-1}+\alpha_{0,1}+\alpha_{1,-1}+\alpha_{1,0}+\alpha_{1,1}=0\\
&\frac{1}{2}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{2}\alpha_{0,1}-\alpha_{1,-1}+\alpha_{1,1}+\alpha_{2,-1}+\alpha_{2,0}+\alpha_{2,1}=0\\
&-\frac{1}{6}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{6}\alpha_{0,1}+\frac{1}{2}\alpha_{1,-1}+\frac{1}{2}\alpha_{1,1}-\alpha_{2,-1}+\alpha_{2,1}=0\\
&\frac{1}{24}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{24}\alpha_{0,1}-\frac{1}{6}\alpha_{1,-1}+\frac{1}{6}\alpha_{1,1}+\frac{1}{2}\alpha_{2,-1}+\frac{1}{2}\alpha_{2,1}=0
\end{aligned}\right\} \qquad (5.5.19)$$

这里共有5个方程,但包含9个待定系数,故可有4个自由参数。需要建立2个彼此线性无关的补充关系式。若选定 $\alpha_{0,0}$, $\alpha_{1,0},\alpha_{2,-1},\alpha_{2,1}$ 为4个自由参数,并分别选取如下两组值

$$\alpha_{0,0}^{1}=0,\alpha_{1,0}^{1}=-\frac{2}{3},\alpha_{2,-1}^{1}=0,\alpha_{2,1}^{1}=0 \qquad (5.5.20)$$

$$\alpha_{0,0}^{2}=-2,\alpha_{1,0}^{2}=0,\alpha_{2,-1}^{2}=-\frac{1}{12},\alpha_{2,1}^{2}=-\frac{1}{12} \tag{5.5.21}$$

分别将式(5.5.20),式(5.5.21)代入式(5.5.19)可解得其余 5 个系数如下

$$\alpha_{0,-1}^{1}=-\frac{1}{2},\alpha_{0,1}^{1}=\frac{1}{2},\alpha_{1,-1}^{1}=-\frac{1}{6},\alpha_{1,1}^{1}=-\frac{1}{6},\alpha_{2,0}^{1}=0 \tag{5.5.22}$$

$$\alpha_{0,-1}^{2}=1,\alpha_{0,1}^{2}=1,\alpha_{1,-1}^{2}=0,\alpha_{1,1}^{2}=0,\alpha_{2,0}^{2}=-\frac{5}{6} \tag{5.5.23}$$

意即得到了如下两个补充关系式

$$\frac{1}{2}(u_{j+1}-u_{j-1})-\frac{1}{6}\Delta x(u_{j+1}^{(1)}+4u_{j}^{(1)}+u_{j-1}^{(1)})=0 \tag{5.5.24}$$

$$u_{j+1}-2u_{j}+u_{j-1}-\frac{1}{12}\Delta x^{2}(u_{j+1}^{(2)}+10u_{j}^{(2)}+u_{j-1}^{(2)})=0 \tag{5.5.25}$$

它们分别是逼近一阶和二阶导数的经典的三点四阶 Pade 紧致格式。

(6) 一个新的三点六阶广义紧致格式

今考察广义紧致格式(5.5.8)中当 $m=2,K_1=-1,K_2=1,P=6$ 的特殊情况。

首先说明这时广义紧致格式(5.5.8)所能达到的最高精度的阶数 $P_{\max}=(K_2-K_1)(m+1)=6$。它表明我们研究的正是 $m=2,K_1=-1,K_2=1$ 时的最高阶的广义紧致格式。

此时,由式(5.5.10)得到的关于待定系数 $\alpha_{S,K}$ 的约束方程组是

$$\begin{aligned}&\alpha_{0,-1}+\alpha_{0,0}+\alpha_{0,1}=0\\&-\alpha_{0,-1}+\alpha_{0,1}+\alpha_{1,-1}+\alpha_{1,0}+\alpha_{1,1}=0\end{aligned}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{2}\alpha_{0,1}-\alpha_{1,-1}+\alpha_{1,1}+\alpha_{2,-1}+ \\
&\qquad \alpha_{2,0}+\alpha_{2,1}=0 \\
&-\frac{1}{6}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{6}\alpha_{0,1}+\frac{1}{2}\alpha_{1,-1}+\frac{1}{2}\alpha_{1,1}- \\
&\qquad \alpha_{2,-1}+\alpha_{2,1}=0 \\
&\frac{1}{24}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{24}\alpha_{0,1}-\frac{1}{6}\alpha_{1,-1}+\frac{1}{6}\alpha_{1,1}+ \\
&\qquad \frac{1}{2}\alpha_{2,-1}+\frac{1}{2}\alpha_{2,1}=0 \\
&-\frac{1}{120}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{120}\alpha_{0,1}+\frac{1}{24}\alpha_{1,-1}+\frac{1}{24}\alpha_{1,1}- \\
&\qquad \frac{1}{6}\alpha_{2,-1}+\frac{1}{6}\alpha_{2,1}=0 \\
&\frac{1}{720}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{720}\alpha_{0,1}-\frac{1}{120}\alpha_{1,-1}+\frac{1}{120}\alpha_{1,1}+ \\
&\qquad \frac{1}{24}\alpha_{2,-1}+\frac{1}{24}\alpha_{2,1}=0
\end{aligned}\right\}
\tag{5.5.26}
$$

这里共有 7 个方程,但包含 9 个待定系数,故可有 2 个自由参数。需要建立 2 个彼此线性无关的补充关系式。若选定 $\alpha_{0,0}$ 和 $\alpha_{2,-1}$ 为 2 个自由参数,并分别选取如下两组值

$$\alpha_{0,0}^{1}=-1,\alpha_{2,-1}^{1}=0 \tag{5.5.27}$$

$$\alpha_{0,0}^{2}=0,\alpha_{2,-1}^{2}=-\frac{1}{15} \tag{5.5.28}$$

分别将式(5.5.27),式(5.5.28)代入式(5.5.26)可解得其余 7 个系数如下

$$
\left.\begin{aligned}
&\alpha_{0,-1}^{1}=\frac{9}{48},\alpha_{0,1}^{1}=\frac{39}{48},\alpha_{1,-1}^{1}=\frac{1}{24},\alpha_{1,0}^{1}=-\frac{1}{3} \\
&\alpha_{1,1}^{1}=-\frac{1}{3},\alpha_{2,0}^{1}=-\frac{1}{6},\alpha_{2,1}^{1}=\frac{1}{24}
\end{aligned}\right\}
\tag{5.5.29}
$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_{0,-1}^{2}=-1,\alpha_{0,1}^{2}=1,\alpha_{1,-1}^{2}=-\frac{7}{15},\alpha_{1,0}^{2}=-\frac{16}{15}\\&\alpha_{1,1}^{2}=-\frac{7}{15},\alpha_{2,0}^{2}=0,\alpha_{2,1}^{2}=\frac{1}{15}\end{aligned}\right\}\tag{5.5.30}$$

意即得到了如下两个彼此独立的补充关系式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{48}(39u_{j+1}-48u_{j}+9u_{j-1})-\frac{\Delta x}{24}(8u_{j+1}^{(1)}+8u_{j}^{(1)}-\\&\qquad u_{j-1}^{(1)})+\frac{\Delta x^{2}}{24}(u_{j+1}^{(2)}-4u_{j}^{(2)})=0\\&u_{j+1}-u_{j-1}-\frac{\Delta x}{15}(7u_{j+1}^{(1)}+16u_{j}^{(1)}+7u_{j-1}^{(1)})+\\&\qquad\frac{\Delta x^{2}}{15}(u_{j+1}^{(2)}-u_{j-1}^{(2)})=0\\&\qquad\qquad(j=2,3,\cdots,N-1)\end{aligned}\right\}\tag{5.5.31}$$

这是我们提出的一个三点六阶广义紧致格式[18]。这个广义紧致格式与已有的那些紧致格式的不同之处在于在每一个补充关系式中同时出现函数本身及其一阶和二阶导数在相邻三个格点处的值。而对已有的那些紧致格式而言，在一个补充关系式中只同时出现函数本身及其一阶或二阶导数在若干格点处的值。虽然在计算一阶导数时，这个广义紧致格式所花费的计算工作量要稍多一些，但换来的是在达到同样精度的条件下，格式点数更少。例如达到六阶精度时格式点数只有 3。这是很重要的，因为它完全排除了毗邻边界的内点处精度下降的困难。

(7) 一个二点四阶广义紧致格式

为了适合采用通量分裂技术时作单侧逼近，希望构造一个两点格式。

今考察广义紧致格式(5.5.8)中当 $m=3, K_1=-1, K_2=0, P=4$ 的特殊情况。

这时，广义紧致格式(5.5.8)所能达到的最高精度的阶数

$P_{\max}=(K_2-K_1)(m+1)=4$。它表明我们研究的正是 $m=3$，$K_1=-1,K_2=0$ 时最高阶的广义紧致格式。

此时，由式(5.5.10)得到的关于待定系数 $\alpha_{S,K}$ 的约束方程组是

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{0,-1}+\alpha_{0,0}=0\\
&-\alpha_{0,-1}+\alpha_{1,-1}+\alpha_{1,0}=0\\
&\frac{1}{2}\alpha_{0,-1}-\alpha_{1,-1}+\alpha_{2,-1}+\alpha_{2,0}=0\\
&-\frac{1}{6}\alpha_{0,-1}+\frac{1}{2}\alpha_{1,-1}-\alpha_{2,-1}+\alpha_{3,-1}+\alpha_{3,0}=0\\
&\frac{1}{24}\alpha_{0,-1}-\frac{1}{6}\alpha_{1,-1}+\frac{1}{2}\alpha_{2,-1}-\alpha_{3,-1}=0
\end{aligned}\right\}\tag{5.5.32}$$

这里共有 5 个方程，但包含 8 个待定系数，故可有 3 个自由参数。需要建立 3 个彼此线性无关的补充关系式。若选定 $\alpha_{0,0}$，$\alpha_{1,0}$ 和 $\alpha_{2,0}$ 为 3 个自由参数，并分别选取如下三组值

$$\alpha_{0,0}=1,\alpha_{1,0}=0,\alpha_{2,0}=0\tag{5.5.33a}$$

$$\alpha_{0,0}=0,\alpha_{1,0}=1,\alpha_{2,0}=0\tag{5.5.33b}$$

$$\alpha_{0,0}=0,\alpha_{1,0}=0,\alpha_{2,0}=1\tag{5.5.33c}$$

分别将式(5.5.33a)，式(5.5.33b)，式(5.5.33c)代入式(5.5.32)可解得其余 5 个系数如下

$$\begin{aligned}&\alpha_{0,-1}=-1,\alpha_{1,-1}=-1,\alpha_{2,-1}=\\&\quad-\frac{1}{2},\alpha_{3,-1}=-\frac{1}{8},\alpha_{3,0}=-\frac{1}{24}\end{aligned}\tag{5.5.34a}$$

$$\begin{aligned}&\alpha_{0,-1}=0,\alpha_{1,-1}=-1,\alpha_{2,-1}=\\&\quad-1,\alpha_{3,-1}=-\frac{1}{3},\alpha_{3,0}=-\frac{1}{6}\end{aligned}\tag{5.5.34b}$$

$$\begin{aligned}&\alpha_{0,-1}=0,\alpha_{1,-1}=0,\alpha_{2,-1}=\\&\quad-1,\alpha_{3,-1}=-\frac{1}{2},\alpha_{3,0}=-\frac{1}{2}\end{aligned}\tag{5.5.34c}$$

即得到了如下 3 个彼此独立的补充关系式

$$\left.\begin{aligned}&u_j - u_{j-1} - \Delta x u_{j-1}^{(1)} - \frac{\Delta x^2}{2} u_{j-1}^{(2)} - \frac{\Delta x^3}{24} u_j^{(3)} - \frac{\Delta x^3}{8} u_{j-1}^{(3)} = 0\\&u_j^{(1)} - u_{j-1}^{(1)} - \Delta x u_{j-1}^{(2)} - \frac{\Delta x^2}{6} u_j^{(3)} - \frac{\Delta x^2}{3} u_{j-1}^{(3)} = 0\\&u_j^{(2)} - u_{j-1}^{(2)} - \frac{\Delta x}{2}(u_j^{(3)} + u_{j-1}^{(3)}) = 0\\&\qquad\qquad (j = 2,3,\cdots,N)\end{aligned}\right\} \tag{5.5.35}$$

采用完全类似的方法,可得到在左边界点 $j=1$ 处的如下两点三阶精度的 3 个补充关系式

$$\left.\begin{aligned}&u_2 - u_1 - \Delta x u_1^{(1)} - \frac{\Delta x^2}{6} u_2^{(2)} - \frac{\Delta x^2}{3} u_1^{(2)} = 0\\&u_2^{(1)} - u_1^{(1)} - \frac{\Delta x}{2}(u_2^{(2)} + u_1^{(2)}) = 0\\&u_2^{(2)} - u_1^{(2)} - \Delta x u_1^{(3)} = 0\end{aligned}\right\} \tag{5.5.36}$$

式(5.5.35)和式(5.5.36)共同构成了内点四阶、边界点三阶精度的两点广义紧致格式的完整的补充关系式。令

$$\{u\} = (u_1, u_2, \cdots, u_N)^{\mathrm{T}}$$

$$\{u^{(1)}\} = (u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \cdots, u_N^{(1)})^{\mathrm{T}}$$

$$\{u^{(2)}\} = (u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \cdots, u_N^{(2)})^{\mathrm{T}}$$

$$\{u^{(3)}\} = (u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, \cdots, u_N^{(3)})^{\mathrm{T}}$$

将所有格点上的补充关系式依次排列可写成如下矩阵代数方程的形式

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_1\{u\} + \boldsymbol{B}_1\{u^{(1)}\} + \boldsymbol{C}_1\{u^{(2)}\} + \boldsymbol{D}_1\{u^{(3)}\} = 0\\&\boldsymbol{B}_2\{u^{(1)}\} + \boldsymbol{C}_2\{u^{(2)}\} + \boldsymbol{D}_2\{u^{(3)}\} = 0\\&\boldsymbol{C}_3\{u^{(2)}\} + \boldsymbol{D}_3\{u^{(3)}\} = 0\end{aligned}\right\} \tag{5.5.37}$$

对式(5.5.37)作消去运算,即可得到由函数值 $u_j(j=1,2,\cdots,N)$

计算各阶导数 $u_j^{(1)}, u_j^{(2)}, u_j^{(3)} (j = 1,2,\cdots,N)$ 的显式表达式。今将它们表示如下

$$\left.\begin{aligned}\{u^{(1)}\} &= \boldsymbol{K}\{u\}\\ \{u^{(2)}\} &= \boldsymbol{L}\{u\}\\ \{u^{(3)}\} &= \boldsymbol{M}\{u\}\end{aligned}\right\} \tag{5.5.38}$$

式中矩阵 $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}$ 分别都是由矩阵 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{C}_2, \boldsymbol{D}_2, \boldsymbol{C}_3$ 和 $\boldsymbol{D}_3$ 决定的。由于过于繁琐,不明确写出了。对于确定的网格而言,$\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}$ 都是确定的矩阵,故只需计算一次,即可反复使用。导数的计算在每次迭代过程中仅需做一次矩阵相乘运算。因此计算工作量不会增加太多。

5.5.3 广义紧致格式的几个基本性质

在前面讨论的广义紧致格式的构造方法中尚未涉及边界处理,而实际计算中,边界点与内点一样需要建立补充关系式,否则方程组不封闭。为了正确构造内点和边界点的补充关系式,必须遵循以下 3 条基本性质中的前 2 条。

(1) 性质 1:若在求解域某方向采用的是 P 阶精度格式,则该方向的格点总数应大于等于 $P+1$,它们才能提供使方程组封闭所需要的足够数目的独立的补充关系式。

证明:设格点总数为 N,则补充 m 阶导数的以 N 为格式点数的 P 阶精度格式所能构造的独立的补充关系式数目为:$N(m+1)-(P+1)$,其中 $N(m+1)$ 是待定系数的总数,$(P+1)$ 是满足 P 阶精度要求时这些系数所需满足的方程数目。而为使方程组封闭,需要的独立补充关系式的数目为 $N\cdot m$。因此,为了能使方程组封闭,必须要求

$$N(m+1)-(P+1) \geqslant N\cdot m$$

由此可得

$$N \geqslant P+1$$

而补充 m 阶导数的以上述 N 个格点中任意 $(N-S)$ 个格点

为格式点的 P 阶精度格式所能构造的补充关系式的系数必然可以从以 N 为格式点数的 P 阶精度格式的系数所满足的方程组(5.5.10)中求得，其实只需令与那 S 个格点关联的待定系数为零即可。这就是说，以$(N-S)$个格点为格式点所能构造的补充关系式是以 N 个格点为格式点所能构造的补充关系式集合中的某个子集。意即若格点总数为 N，则任何以不大于 N 的$(N-S)$为格式点数的 P 阶精度广义紧致格式在这 N 个格点上所能构造的独立的补充关系式的数目最多为$N(m+1)-(P+1)$。从而证明了 P 阶精度格式至少需要 $P+1$ 个格点，才能提供使方程组封闭所需要的足够数目的独立补充关系式。

(2) 性质 2:如果所构造的广义紧致格式的精度 P 是对应于规定的 m，K_1 和 K_2 下的最高阶精度，即 $P=(K_2-K_1)(m+1)$，那么由同样的(K_2-K_1+1)个格点所构造的不同格点处的补充关系式之间彼此是线性相关的。今以 $m=2, K_1=-1, K_2=1$，$P=6$的三点六阶广义紧致格式为例说明之。此时 $P_{\max}=(K_2-K_1)(m+1)=6$，故 $P=P_{\max}$。可以证明，由同样三个格点$(j-1), j, (j+1)$构造的中心三点格式与偏心三点格式之间是线性相关的。这里，称在 j 点作 Taylor 展开所构造的广义紧致格式(即在格点 j 处的补充关系式)为中心三点格式;而在$(j-1)$或$(j+1)$点作 Taylor 展开所构造的广义紧致格式(即在$(j-1)$或$(j+1)$点处的补充关系式)为偏心三点格式。

关于这个性质可用反证法证明如下。

此时，六阶精度的中心三点格式就是式(5.5.31)，现把它记为

$$\left.\begin{aligned} F_j^1(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}; u_{j-1}^{(1)}, u_j^{(1)}, u_{j+1}^{(1)}; u_{j-1}^{(2)}, u_j^{(2)}, u_{j+1}^{(2)}) &= 0 \\ F_j^2(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}; u_{j-1}^{(1)}, u_j^{(1)}, u_{j+1}^{(1)}; u_{j-1}^{(2)}, u_j^{(2)}, u_{j+1}^{(2)}) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

这里 F_j^1 表示在j 点处第 1 个补充关系式，F_j^2 表示在j 点处第 2 个补充关系式。在 j 点作 Taylor 展开可得

$$F_j^1 = \nu_7^1 \Delta x^7 \left(\frac{\partial^7 u}{\partial x^7}\right)_j + \cdots$$

$$F_j^2 = \nu_7^2 \Delta x^7 \left(\frac{\partial^7 u}{\partial x^7}\right)_j + \cdots$$

式中 ν_7^1 和 ν_7^2 分别是 F_j^1 和 F_j^2 的截断误差首项的系数。

设六阶精度的偏心三点格式(以$(j+1)$点处的格式为例)为

$$\left.\begin{aligned} F_{j+1}^1(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}; u_{j-1}^{(1)}, u_j^{(1)}, u_{j+1}^{(1)}; u_{j-1}^{(2)}, u_j^{(2)}, u_{j+1}^{(2)}) = 0 \\ F_{j+1}^2(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}; u_{j-1}^{(1)}, u_j^{(1)}, u_{j+1}^{(1)}; u_{j-1}^{(2)}, u_j^{(2)}, u_{j+1}^{(2)}) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

在$(j+1)$点作 Taylor 展开可得

$$F_{j+1}^1 = \nu_7^3 \Delta x^7 \left(\frac{\partial^7 u}{\partial x^7}\right)_{j+1} + \cdots = \nu_7^3 \Delta x^7 \left(\frac{\partial^7 u}{\partial x^7}\right)_j + O(\Delta x^8)$$

$$F_{j+1}^2 = \nu_7^4 \Delta x^7 \left(\frac{\partial^7 u}{\partial x^7}\right)_{j+1} + \cdots = \nu_7^4 \Delta x^7 \left(\frac{\partial^7 u}{\partial x^7}\right)_j + O(\Delta x^8)$$

这里 ν_7^3 和 ν_7^4 分别是 F_{j+1}^1和 F_{j+1}^2的截断误差首项的系数。它表明六阶精度偏心三点格式(B)中的两个补充关系式也可作为 j 点处的两个六阶精度的补充关系式。

但由构造式(5.5.31)即(A)的过程知，此时有 7 个关于系数 $\alpha_{S,K}$的约束方程，而待定系数有 9 个，故有 2 个自由参数，因此只能解出两组线性无关的待定系数组，也即只能构造出两个线性无关的补充关系式。这样，导致如下结论：补充关系式(A)和(B)之间彼此是线性相关的。

用完全类似的方法可以证明在任意的 m, K_1, K_2 和 P 情况下这个性质 2 是成立的。

根据性质 2 可知，如果边界点补充关系式和毗邻内点的补充关系式使用相同的格点数，且 m 和 P 分别相同以及 $P = P_{\max}$，那么边界点偏心格式与其毗邻内点中心格式得到的补充关系式之间彼此是线性相关的。为了避免这种情况，可以在边界点处增加一个格式点而得到保持与内点有同样精度的补充关系式，或者不增加格式点而得到比内点低一阶精度的补充关系式。

对于格式(5.5.31)，采用降低一阶精度的边界补充关系式，在

左、右边界处它们分别是

$$\left.\begin{aligned}&u_1-2u_2+u_3+\frac{1}{6}\Delta x(u_1^{(1)}-u_3^{(1)})-\\&\quad\frac{1}{36}\Delta x^2(u_1^{(2)}+22u_2^{(2)}+u_3^{(2)})=0\\&u_1-u_2+\frac{1}{15}\Delta x(7u_1^{(1)}+8u_2^{(1)})+\\&\quad\frac{1}{360}\Delta x^2(25u_1^{(2)}-38u_2^{(2)}+u_3^{(2)})=0\end{aligned}\right\}\tag{5.5.39}$$

$$\left.\begin{aligned}&u_{N-2}-2u_{N-1}+u_N+\frac{1}{6}\Delta x(u_{N-2}^{(1)}-u_N^{(1)})-\\&\quad\frac{1}{36}\Delta x^2(u_{N-2}^{(2)}+22u_{N-1}^{(2)}+u_N^{(2)})=0\\&u_{N-2}-u_{N-1}+\frac{1}{15}\Delta x(7u_{N-2}^{(1)}+8u_{N-1}^{(1)})+\\&\quad\frac{1}{360}\Delta x^2(25u_{N-2}^{(2)}-38u_{N-1}^{(2)}+u_N^{(2)})=0\end{aligned}\right\}\tag{5.5.40}$$

式(5.5.31)、式(5.5.39)和式(5.5.40)共同构成了内点六阶，边界点五阶精度的三点广义紧致格式的完整补充关系式，它应与支配方程联立求解。对于 N 个格点的一维问题，在求解过程中每次都需求解由 $3N$ 个方程形成的线性代数方程组，高精度广义紧致格式的计算工作量将大大增加，严重影响广义紧致格式在多维问题中的应用。但这个缺点将因下面将论述的性质 3 而得到克服。

(3) 性质 3：根据所有格点处的补充关系式可导出由未知量的值直接计算未知量各阶导数值的显式关系式。

下面以引入导数的最高阶数 $m=2$ 的情况为例进行讨论。此时在每个格点(包括内点和边界点)上都有两个补充关系式。令

$$\{u\}=(u_1,u_2,\cdots,u_N)^{\mathrm{T}}$$

$$\{u^{(1)}\}=(u_1^{(1)},u_2^{(1)},\cdots,u_N^{(1)})^{\mathrm{T}}$$

$$\{u^{(2)}\}=(u_1^{(2)},u_2^{(2)},\cdots,u_N^{(2)})^{\mathrm{T}}$$

式中 N 为格点总数。将所有格点上的补充关系式依次排列写成如下矩阵代数方程的形式

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A}_1\{u^{(1)}\} + \boldsymbol{B}_1\{u^{(2)}\} + \boldsymbol{C}_1\{u\} = 0 \\ \boldsymbol{A}_2\{u^{(1)}\} + \boldsymbol{B}_2\{u^{(2)}\} + \boldsymbol{C}_2\{u\} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.5.41)$$

式中 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{C}_1$ 是由 $a_{S,K}^1\Delta x^S$ 为元素构成的矩阵，而 $\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{C}_2$ 则是由 $a_{S,K}^2\Delta x^S$ 为元素构成的矩阵。对式(5.5.41)作消去运算可得各阶导数值的逼近计算式如下

$$\left.\begin{aligned} \{u^{(1)}\} = (\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{A}_2)^{-1}(\boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{C}_2 - \boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{C}_1)\{u\} \\ \{u^{(2)}\} = (\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{B}_2)^{-1}(\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{C}_2 - \boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{C}_1)\{u\} \end{aligned}\right\} \qquad (5.5.42)$$

式(5.5.42)具有重要的应用价值。因为对于确定的网格而言，该式中的诸矩阵都是确定的，故只需计算一次，即可反复使用。导数的计算在每次迭代过程中仅需做一次矩阵相乘运算，而不再需要重复求解大型代数方程组，大幅度地减少了导数计算过程所增加的计算工作量。

5.5.4 GC－UENO 格式

在 5.4 节中讨论了 ENO 格式。这是 20 世纪 80 年代发展起来的一类高精度、高分辨率格式。近年来广泛的应用表明该类格式对激波间断和接触间断均有很好的分辨率，并且在极值点格式不降阶。因此受到普遍重视，并在越来越多的领域得到应用。但它也存在某些不足。最大的不足之处是随着格式精度的提高，格式点数不断增加，从而在毗邻边界的内点处不得不降低格式精度的阶数。为了克服这个缺点，我们将广义紧致格式与 UENO 格式结合起来，构造了 GC－UENO 格式[18]。其基本思想是将 UENO 格式中原来由差分决定的 $D_{j+\frac{1}{2}}^{(k)}, D_j^{(k)}, (k=1,2,\cdots,r)$ 改为由相应的导数来决定，而这些导数则用广义紧致格式求出。下面以一维守恒型标量方程为例来说明应用 GC－UENO 格式的求解过程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0 \tag{5.5.43}$$

它的具有 r 阶精度的半离散的 UENO 格式为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_j=-\frac{1}{\Delta x}(h_{j+\frac{1}{2}}-h_{j-\frac{1}{2}}) \tag{5.5.44}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} h_{j+\frac{1}{2}} &= h^{+}_{j+\frac{1}{2}}+h^{-}_{j+\frac{1}{2}} \\ h_{j-\frac{1}{2}} &= h^{+}_{j-\frac{1}{2}}+h^{-}_{j-\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{5.5.45}$$

$$h^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}=P^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}(x_{j+\frac{1}{2}})+\sum_{l=1}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]}a_{2l}\Delta x^{2l}\left(\frac{\partial^{2l}P^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}}{\partial x^{2l}}\right)_{j+\frac{1}{2}} \tag{5.5.46}$$

而系数 $a_0=1,a_2,a_4,\cdots$ 由式(5.4.16)递推决定。

在 5.4.4 节中介绍了确定以迎风方式和对称方式逼近 $f^{\pm}(x)$ 的多项式 $P^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}(x)$ 的两种方法。

(1) 在迎风方式中

$$\left.\begin{aligned} P^{+}_{j+\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{r}\frac{(x-x_j)^k}{k!\Delta x^k}D_j^{+(k)} \\ P^{-}_{j+\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{r}\frac{(x-x_{j+1})^k}{k!\Delta x^k}D_{j+1}^{-(k)} \end{aligned}\right\} \tag{5.5.47}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} D_j^{+(k)} &= \Delta x^k\left(\frac{\partial^k f^+}{\partial x^k}\right)_j+O(\Delta x^{r+1}) \\ D_{j+1}^{-(k)} &= \Delta x^k\left(\frac{\partial^k f^-}{\partial x^k}\right)_{j+1}+O(\Delta x^{r+1}) \\ (k &= 0,1,2,\cdots,r) \end{aligned}\right\} \tag{5.5.48}$$

(2) 在对称方法中

$$\left.\begin{aligned} P^{+}_{j+\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{r}\frac{(x-x_{j+\frac{1}{2}})^k}{k!\Delta x^k}D_{j+\frac{1}{2}}^{+(k)} \\ P^{-}_{j+\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{r}\frac{(x-x_{j+\frac{1}{2}})^k}{k!\Delta x^k}D_{j+\frac{1}{2}}^{-(k)} \end{aligned}\right\} \tag{5.5.49}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} D_{j+\frac{1}{2}}^{+(k)} &= \Delta x^k \left(\frac{\partial^k f^+}{\partial x^k}\right)_{j+\frac{1}{2}} + O(\Delta x^{r+1}) \\ D_{j+\frac{1}{2}}^{-(k)} &= \Delta x^k \left(\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right)_{j+\frac{1}{2}} + O(\Delta x^{r+1}) \\ (k &= 0,1,2,\cdots,r) \end{aligned}\right\} \tag{5.5.50}$$

这里，$D_j^{+(k)}, D_{j+1}^{-(k)}, D_{j+\frac{1}{2}}^{+(k)}, D_{j+\frac{1}{2}}^{-(k)}$是由相应的差商及 ms 限制函数确定的，并且它们的表达式是随精度阶数 r 的不同而不同的。例如，对于 $r=2,3,4$ 的情况，它们的具体表达式分别由{式(5.4.60)、式(5.4.61)、式(5.4.62)、式(5.4.63)}，式(5.4.64)和式(5.4.65)给出。从这些式子可以看出，随着格式精度阶数 r 的提高，格式点数越来越多。

GC－UENO 格式与 UENO 格式的不同之处就在于确定 $D_j^{\pm(k)}$ 和 $D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(k)}$ 的方法不同。在 GC－UENO 格式中，$D_j^{\pm(k)}$ 和 $D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(k)}$不是由相应的差分而是由相应的导数 $f_j^{(k)}$ 和 ms 限制函数确定的，而 $f_j^{(k)}$ 则是由广义紧致格式求出的。在 GC－UENO 格式中，随着格式精度阶数 r 的不同，$D_j^{\pm(k)}$ 和 $D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(k)}$的表达式也是不同的。今以 $r=3$ 的情况为例说明之。若 $f_j^{\pm(k)}(j=1,2,\cdots,N;k=1,2,3)$，是由内点和右边界点为二点四阶精度的格式(5.5.35)，而左边界点为二点三阶精度的格式(5.5.36)所构成的完整的补充关系式求出的(即由式(5.5.38)求出的)。显然有

$$\Delta x^k f_j^{\pm(k)} = \Delta x^k \left(\frac{\partial^k f^{\pm}}{\partial x^k}\right)_j + O(\Delta x^4)$$

易于证明，满足关系式(5.5.48)、式(5.5.50)要求的 $D_j^{\pm(k)}$、$D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(k)}$ $(k=0,1,2,3)$，可给出如下

$$
\left.
\begin{aligned}
D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(3)} &\equiv \mathrm{ms}\left[\Delta x^3 f_{j+1}^{\pm(3)}, \Delta x^3 f_j^{\pm(3)}\right] \\
D_j^{\pm(3)} &\equiv \frac{1}{2}\left(D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(3)} + D_{j-\frac{1}{2}}^{\mp(3)}\right) \\
D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(2)} &\equiv \mathrm{ms}\left[\Delta x^2 f_{j+1}^{\pm(2)} - \frac{1}{2}D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(3)}, \Delta x^2 f_j^{\pm(2)} + \frac{1}{2}D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(3)}\right] \\
D_j^{\pm(2)} &\equiv \frac{1}{2}\left(D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(2)} + D_{j-\frac{1}{2}}^{\mp(2)}\right) \\
D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(1)} &\equiv \mathrm{ms}\left[\Delta x f_{j+1}^{\pm(1)} - \frac{1}{2}D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(2)} - \frac{1}{8}D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(3)},\right. \\
&\qquad \left.\Delta x f_j^{\pm(1)} + \frac{1}{2}D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(2)} - \frac{1}{8}D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(3)}\right] \\
D_j^{\pm(1)} &\equiv \frac{1}{2}\left(D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(1)} + D_{j-\frac{1}{2}}^{\mp(1)}\right) - \frac{1}{8}D_j^{\pm(3)} \\
D_j^{\pm(0)} &\equiv f_j^{\pm} \\
D_{j+\frac{1}{2}}^{+(0)} &= f_j^{+} + \frac{1}{2}D_{j+\frac{1}{2}}^{+(1)} - \frac{1}{8}D_{j+\frac{1}{2}}^{+(2)} + \frac{1}{48}D_{j+\frac{1}{2}}^{+(3)} \\
D_{j+\frac{1}{2}}^{-(0)} &= f_{j+1}^{-} - \frac{1}{2}D_{j+\frac{1}{2}}^{-(1)} - \frac{1}{8}D_{j+\frac{1}{2}}^{-(2)} - \frac{1}{48}D_{j+\frac{1}{2}}^{-(3)}
\end{aligned}
\right\}
\tag{5.5.51}
$$

下面将三阶精度的 GC－UENO 格式的求解过程归纳如下。

(1) 由已知的 $u_j^n(j=1,2,\cdots,N)$，计算出通量函数值 $f_j^{\pm}=f^{\pm}(u_j^n)(j=1,2,\cdots,N)$。

(2) 由式(5.5.38)计算出 $f_j^{\pm(k)}(j=1,2,\cdots,N,k=1,2,3)$。

(3) 由式(5.5.51)计算出 $D_j^{\pm(k)}$ 和 $D_{j+\frac{1}{2}}^{\pm(k)}$。

(4) 按下列算式计算网格界面 $x=x_{j+\frac{1}{2}}$ 和 $x=x_{j-\frac{1}{2}}$ 处的数值通量 $h_{j+\frac{1}{2}}^{+}$ 和 $h_{j+\frac{1}{2}}^{-}$ 以及 $h_{j-\frac{1}{2}}^{+}$ 和 $h_{j-\frac{1}{2}}^{-}$

$$\left.\begin{aligned}h_{j+\frac{1}{2}}^{+} &= f_{j}^{+} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!}D_{j}^{+(k)} - \frac{1}{24}\left(D_{j}^{+(2)} + \frac{1}{2}D_{j}^{+(3)}\right)\\ h_{j+\frac{1}{2}}^{-} &= f_{j+1}^{-} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!}D_{j+1}^{-(k)} - \frac{1}{24}\left(D_{j+1}^{-(2)} - \frac{1}{2}D_{j+1}^{-(3)}\right)\end{aligned}\right\} \tag{5.5.52}$$

用类似的方法计算 $h_{j-\frac{1}{2}}^{+}$和 $h_{j-\frac{1}{2}}$(这里采用了迎风型格式)。

(5) 采用三阶精度的具有 TVD 保持性质的 Runge-Kutta 型时间离散格式求解常微分方程组(5.5.44)得到 u_j^{n+1}。

(6) 返回到(1),如此循环,直到计算至要求时刻或达到定常解为止。

由上述 GC－UENO 格式的求解过程可见,一旦求得 $f_j^{\pm(k)}$,每一点 j 处的计算仅与 $j-1, j, j+1$ 三点相关,且不因格式精度的增加而改变。故称之为广义紧致 UENO 型三点格式。

5.5.5 GC－WENO－FCT 格式

在 5.4.5 节中介绍了 WENO 格式,这是从 1994 年开始发展起来的一类新的 ENO 格式。与传统的 ENO 格式相比,它在计算过程中无需递推判断插值区域中解的光滑性以便选择一个最光滑的插值区域并由它来提供网格界面处的数值通量,而是将每一个可能的插值区域所提供的网格界面处的数值通量作加权平均。这样就取消了使用传统 ENO 格式的计算过程中出现的大量逻辑语句,大幅度地提高了并行计算的效率。但 WENO 格式仍保留着如下不足:随着格式精度阶数提高,格式点数相应增加,导致在毗邻边界的内点处格式精度不得不下降。我们将利用广义紧致格式导出的导数计算关系式,例如式(5.5.42)或式(5.5.38),与 WENO 格式相结合构造成可以达到任意阶精度的三点 WENO 格式,从而克服了在毗邻边界的内点处格式精度下降的缺点。为了能更好地应用于流体力学支配方程组的数值求解,我们又将上述广义紧致

加权基本无振荡格式(GC－WENO 格式)与 FCT(Flux－Corrected Transport)技术结合起来,构成了 GC－WENO－FCT 格式[19]。

为叙述方便,首先简要地归纳一下 WENO 格式。

考察如下一维标量守恒律方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0 \tag{5.5.53}$$

具有 r 阶精度的半离散的 WENO 格式可表述如下

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_j=-\frac{1}{\Delta x}(h_{j+\frac{1}{2}}-h_{j-\frac{1}{2}}) \tag{5.5.54}$$

$$h_{j+\frac{1}{2}}=h^+_{j+\frac{1}{2}}+h^-_{j+\frac{1}{2}} \tag{5.5.55}$$

$$h^+_{j+\frac{1}{2}}=\sum_{K=0}^{r-1}W^+_K q^{+r}_K(f^+_{j+K-r+1},\cdots,f^+_{j+K}) \tag{5.5.56}$$

$$q^{+r}_K(f^+_{j+K-r+1},\cdots,f^+_{j+K})=q^{+r}_K(x_{j+\frac{1}{2}}) \tag{5.5.57}$$

$$q^{+r}_K(x)=P^{+r}_K(x)+\sum_{l=1}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]}a_{2l}\Delta x^{2l}\left(\frac{\partial^{2l}P^{+r}_K}{\partial x^{2l}}\right) \tag{5.5.58}$$

式中 $a_0=1,a_2,a_4,\cdots$,由式(5.4.16)确定。$P^{+r}_K(x)$是由 r 个格点处的 f^+ 值,$f^+_{j+K-r+1},f^+_{j+K-r+2},\cdots,f^+_{j+K}$ 构成的$(r-1)$次插值多项式函数。

$$W^+_K=\frac{\alpha^+_K}{\alpha^+_0+\alpha^+_1+\cdots+\alpha^+_{r-1}},(K=0,1,\cdots,r-1) \tag{5.5.59}$$

$$\alpha^+_K=\frac{C^r_K}{(\varepsilon+IS^+_K)^p},(K=0,1,\cdots,r-1) \tag{5.5.60}$$

式中 $\varepsilon=10^{-6}$,p 可取大于等于 2 的正整数。

$$IS^+_K=\sum_{l=1}^{r-1}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}(\Delta x)^{2l-1}[q^{+r(l)}_K(x)]^2\mathrm{d}x \tag{5.5.61}$$

$$(K=0,1,\cdots,r-1)$$

式中 $q^{+r(l)}_K(x)$是 $q^{+r}_K(x)$的 l 阶导数,C^r_K 是最佳权重,由式

(5.4.81)确定。

$h^-_{j+\frac{1}{2}}$的确定方法与$h^+_{j+\frac{1}{2}}$的确定方法类似，不再赘述。

由上述知，$h^+_{j+\frac{1}{2}}$是由r个插值区域$S_K(x_{j+K-r+1}, x_{j+K-r+2}, \cdots, x_{j+K})$，$(K=0,1,2,\cdots,r-1)$分别得到的$r$个插值多项式函数$q^{+r}_K(x)$，$(K=0,1,2,\cdots,r-1)$在网格界面$x=x_{j+\frac{1}{2}}$处的值经加权平均得到的，而每一个插值多项式函数$q^{+r}_K(x)$中包含着$r$个格点处的$f^+$的值，故为了确定$h^+_{j+\frac{1}{2}}$需要用到$(2r-1)$个格点处的$f^+$值。正是因为式(5.5.56)、式(5.5.57)和式(5.5.58)的原因，导致了随格式精度阶数r提高，格式点数不断增加。

下面来介绍GC－WENO格式的构造方法。

为了克服WENO格式的上述缺点，将式(5.5.56)修改为

$$h^+_{j+\frac{1}{2}} = \sum_{S=-1}^{1} W^+_S q^{+r}_{j+S}(x_{j+\frac{1}{2}}) \tag{5.5.62}$$

式中

$$q^{+r}_{j+S}(x) = P^{+r}_{j+S}(x) + \sum_{l=1}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} a_{2l}\Delta x^{2l}\left(\frac{\partial^{2l}P^{+r}_{j+S}(x)}{\partial x^{2l}}\right) \quad (S=-1,0,1) \tag{5.5.63}$$

而

$$P^{+r}_{j+S}(x) = \sum_{K=0}^{r-1} \frac{1}{K!}\left(\frac{\partial^K f^+}{\partial x^K}\right)_{j+S}(x-x_{j+S})^K \quad (S=-1,0,1) \tag{5.5.64}$$

由此可知，此时$h^+_{j+\frac{1}{2}}$是由三个插值多项式函数$q^{+r}_{j-1}(x)$，$q^{+r}_j(x)$和$q^{+r}_{j+1}(x)$在网格界面$x=x_{j+\frac{1}{2}}$处的值经加权平均得到的，而每一个插值多项式函数$q^{+(r)}_{j+S}(x)$是由一个网格点$x=x_{j+S}$处的f^+及其直到$(r-1)$阶导数$\left(\frac{\partial^{r-1}f}{\partial x^{r-1}}\right)$的值所构成的。

将式(5.5.64)代入式(5.5.63)可得

$$q_{j+S}^{+r}(x) = \sum_{K=0}^{r-1} \frac{1}{K!}\left(\frac{\partial^K f^+}{\partial x^K}\right)_{j+S}(x - x_{j+S})^K +$$

$$\sum_{l=1}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} a_{2l}\Delta x^{2l}\sum_{K=2l}^{r-1}\frac{1}{(K-2l)!}\left(\frac{\partial^K f^+}{\partial x^K}\right)_{j+S}(x-x_{j+S})^{K-2l} \tag{5.5.65}$$

为明确起见,下面讨论三阶精度 $r=3$ 的情况。此时有

$$h_{j+\frac{1}{2}}^{+} = \sum_{S=-1}^{1} W_S^+ q_{j+S}^{+3}(x_{j+\frac{1}{2}}) \tag{5.5.66}$$

$$q_{j+S}^{+3}(x) = f_{j+S}^{+} + \left(\frac{\partial f^+}{\partial x}\right)_{j+S}(x - x_{j+S}) +$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2}\right)_{j+S}(x - x_{j+S})^2 - \frac{1}{24}\Delta x^2\left(\frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2}\right)_{j+S} =$$

$$f_{j+S}^{+} + f_{j+S}^{+(1)}(x - x_{j+S}) + \frac{1}{2}f_{j+S}^{+(2)}(x - x_{j+S})^2 - \frac{1}{24}f_{j+S}^{+(2)}\Delta x^2$$

$$(S = -1,0,1) \tag{5.5.67}$$

$$q_{j+S}^{+3}(x_{j+\frac{1}{2}}) = f_{j+S}^{+} + f_{j+S}^{+(1)}(x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j+S}) +$$

$$\frac{1}{2}f_{j+S}^{+(2)}(x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j+S})^2 - \frac{1}{24}f_{j+S}^{+(2)}\Delta x^2$$

$$(S = -1,0,1) \tag{5.5.68}$$

于是有

$$q_{j-1}^{+3}(x_{j+\frac{1}{2}}) = f_{j-1}^{+} + \frac{3}{2}\Delta x f_{j-1}^{+(1)} + \frac{13}{12}\Delta x^2 f_{j-1}^{+(2)} \tag{5.5.69}$$

$$q_{j}^{+3}(x_{j+\frac{1}{2}}) = f_{j}^{+} + \frac{1}{2}\Delta x f_{j}^{+(1)} + \frac{1}{12}\Delta x^2 f_{j}^{+(2)} \tag{5.5.70}$$

$$q_{j+1}^{+3}(x_{j+\frac{1}{2}}) = f_{j+1}^{+} - \frac{1}{2}\Delta x f_{j+1}^{+(1)} + \frac{1}{12}\Delta x^2 f_{j+1}^{+(2)} \tag{5.5.71}$$

$$W_S^+ = \frac{\alpha_S^+}{\alpha_{-1}^+ + \alpha_0^+ + \alpha_1^+}, (S = -1,0,1) \tag{5.5.72}$$

$$\alpha_S^+ = \frac{C_S^3}{(10^{-6} + IS_S^+)^2}, (S = -1,0,1) \tag{5.5.73}$$

$$C_{-1}^3 = \frac{3}{5}, C_0^3 = \frac{1}{10}, C_1^3 = \frac{3}{10} \tag{5.5.74}$$

$$\left.\begin{aligned} IS_{-1}^+ &= \frac{13}{12}\Delta x^4 (f_{j-1}^{+(2)})^2 + (\Delta x^2 f_{j-1}^{+(2)} + \Delta x f_{j-1}^{+(1)})^2 \\ IS_0^+ &= \frac{13}{12}\Delta x^4 (f_j^{+(2)})^2 + (\Delta x f_j^{+(1)})^2 \\ IS_1^+ &= \frac{13}{12}\Delta x^4 (f_{j+1}^{+(2)})^2 + (\Delta x^2 f_{j+1}^{+(2)} - \Delta x f_{j+1}^{+(1)})^2 \end{aligned}\right\} \tag{5.5.75}$$

由上述可知，$h_{j+\frac{1}{2}}^+$ 由 $j-1, j$ 和 $j+1$ 三个格点处的 f^+，$f^{+(1)}, f^{+(2)}$ 所确定。

完全类似地可确定 $h_{j+\frac{1}{2}}^-$，它也由 $j-1, j$ 和 $j+1$ 三个格点处的 $f^-, f^{-(1)}$ 和 $f^{-(2)}$ 所确定。

同样 $h_{j-\frac{1}{2}}^+$ 和 $h_{j-\frac{1}{2}}^-$ 也是由 $j-1, j$ 和 $j+1$ 三个格点处的信息所确定。

上面的 $f_{j+S}^{\pm(k)}, (S=-1,0,1; k=1,2)$ 是由内点和右边界点为二点四阶精度的广义紧致格式(5.5.35)而左边界点为二点三阶精度的广义紧致格式(5.5.36)所构成的完整的补充关系式求出的(即由式(5.5.38)求出的)。

式(5.5.54)，式(5.5.55)，式(5.5.66)，式(5.5.68)，式(5.5.69)，式(5.5.70)，式(5.5.71)，式(5.5.72)，式(5.5.73)，式(5.5.74)，式(5.5.75)，式(5.5.38)就构成了 GC－WENO 格式。

最后，扼要地介绍 FCT 技术。

FCT 技术最早是由 Boris 和 Book 在 20 世纪 70 年代发展起来的一类通量限制方法[20]，其目标是最大限度地利用高阶格式计算所得的通量值而又不至于产生过冲和下切现象。它的基本思想是首先将高阶格式通量与低阶格式通量之差定义为反扩散通量，

然后由低阶格式得到的预估解确定反扩散通量的修正系数，进而对反扩散通量加以限制、修正以满足局部单调性要求。它的实施步骤可归纳如下。

(1) 计算低阶格式通量 $h^L_{j+\frac{1}{2}}$和高阶格式通量 $h^H_{j+\frac{1}{2}}$。

(2) 计算反扩散通量 $A_{j+\frac{1}{2}}=h^H_{j+\frac{1}{2}}-h^L_{j+\frac{1}{2}}$。

(3) 用低阶格式求得预估解：$u^{td}_j=u^n_j-\dfrac{\Delta t}{\Delta x}(h^L_{j+\frac{1}{2}}-h^L_{j-\frac{1}{2}})$。

(4) 限制修正反扩散通量：$A^C_{j+\frac{1}{2}}=C_{j+\frac{1}{2}}A_{j+\frac{1}{2}}$，其中 $0\leqslant C_{j+\frac{1}{2}}\leqslant 1$，$C_{j+\frac{1}{2}}$称为修正系数。

(5) 应用限制修正后的反扩散通量计算下一时间层的解：$u^{n+1}_j=u^{td}_j-\dfrac{\Delta t}{\Delta x}(A^C_{j+\frac{1}{2}}-A^C_{j-\frac{1}{2}})$。

其中的关键在于修正系数 $C_{j+\frac{1}{2}}$的确定。确定 $C_{j+\frac{1}{2}}$的原则是使由上式算出的 u^{n+1}_j 既不产生新的极值点，也不对现有极值点加深影响。具体做法是使由上式算出的 u^{n+1}_j 既不超过某个规定的 $u^{\max}_j$，也不低于某个规定的 $u^{\min}_j$。这里 $u^{\max}_j$ 和 $u^{\min}_j$ 可根据 u^n_j 和 u^{td}_j，用某种适当的方法确定。例如

$$u^{\max}_j\equiv\max(u^{td}_{j-1},u^{td}_j,u^{td}_{j+1}),\ u^{\min}_j\equiv\min(u^{td}_{j-1},u^{td}_j,u^{td}_{j+1}) \tag{5.5.76}$$

采用 Zalesak[21]提出的一种确定修正系数 $C_{j+\frac{1}{2}}$的方法，首先定义进入和离开网格单元 j 的反扩散通量分别为

$$\left.\begin{aligned}P^+_j&\equiv\max(0,A_{j-\frac{1}{2}})-\min(0,A_{j+\frac{1}{2}})\\P^-_j&\equiv\max(0,A_{j+\frac{1}{2}})-\min(0,A_{j-\frac{1}{2}})\end{aligned}\right\} \tag{5.5.77}$$

定义预估解的上梯度和下梯度分别为

$$
\left.\begin{aligned}
Q^{+} &\equiv (u_j^{\max} - u_j^{td}) \frac{\Delta x_j}{\Delta t} \\
Q^{-} &\equiv (u_j^{td} - u_j^{\min}) \frac{\Delta x_j}{\Delta t}
\end{aligned}\right\} \tag{5.5.78}
$$

再定义保证网格点 j 处没有过冲(overshoot)和下切(undershoot)的进入和离开网格单元 j 的反扩散通量的临界系数分别为

$$
\begin{aligned}
R_j^{+} &\equiv \begin{cases} \min(1, Q_j^{+}/P_j^{+}), & \text{当 } P_j^{+} > 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } P_j^{+} = 0 \text{ 时} \end{cases} \\
R_j^{-} &\equiv \begin{cases} \min(1, Q_j^{-}/P_j^{-}), & \text{当 } P_j^{-} > 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } P_j^{-} = 0 \text{ 时} \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.5.79}
$$

显然,所有反扩散通量都是离开一个网格单元和进入相邻的一个网格单元,因而对前者将对下切进行限制,而对后者应对过冲进行限制。为了保证前者既不发生下切,后者又不发生过冲,要求取一个最小值。因此修正系数被确定为

$$
C_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \min(R_{j+1}^{+}, R_j^{-}), \text{当 } A_{j+\frac{1}{2}} > 0 \text{ 时} \\ \min(R_{j+1}^{-}, R_j^{+}), \text{当 } A_{j+\frac{1}{2}} < 0 \text{ 时} \end{cases} \tag{5.5.80}
$$

我们把由 NND 格式确定的数值通量作为 $h_{j+\frac{1}{2}}^{L}$,而把由 GC－WENO 格式确定的数值通量作为 $h_{j+\frac{1}{2}}^{H}$,然后再采用上述 FCT 技术。这就是我们提出的 GC－WENO－FCT 格式的实施过程。

5.5.6 满足"抑制波动原则"和"稳定性原则"的紧致格式

迄今为止,已有的紧致格式和广义紧致格式都不满足"抑制波动原则",因而为了能计算带激波的流场,不得不将广义紧致格式与 UENO 格式或 WENO 格式结合起来。

现在来介绍构造高精度、高分辨率格式的一条新途径。它利用紧致格式或广义紧致格式和待定系数法能从事先规定的保证格式具有某些所希望性能的一些原则和要求(例如"抑制波动原则","稳定性原则","熵增原则",精度阶数,格式点数等)出发,用一种

通用的方法构造出所需要的高精度、高分辨率格式。作为一个例子,构造了一个三阶精度的满足抑制波动原则、稳定性原则和熵增原则的三点紧致格式[22]。

考察如下一维波动方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{5.5.81}$$

其半离散方程为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j = -aF_j \tag{5.5.82}$$

采用如下 Hermite 补充关系式来逼近上述半离散方程中的 F_j

$$\Delta x(\beta_1 F_{j+1} + \beta_0 F_j + \beta_{-1} F_{j-1}) = \alpha_1 u_{j+1} + \alpha_0 u_j + \alpha_{-1} u_{j-1} \tag{5.5.83}$$

式中,$F_j = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j + O(\Delta x^4)$, $\beta_1, \beta_0, \beta_{-1}, \alpha_1, \alpha_0, \alpha_{-1}$均为待定常数。我们的目的在于适当选定这 6 个待定常数以便构造出满足"抑制波动原则"、"稳定性原则"和"熵增原则"的三阶精度的三点紧致格式。

首先来导出半离散格式{式(5.5.82),式(5.5.83)}的修正方程式。

将式(5.5.83)等号左、右两侧分别在 $x = x_j$ 点邻域作 Taylor 展开,经整理后可得

$$F_j = \lambda\left\{\alpha_T u_j + \Delta x \alpha_m u_j^{(1)} + \frac{\Delta x^2}{2!}\alpha_a u_j^{(2)} + \frac{\Delta x^3}{3!}\alpha_m u_j^{(3)} + \frac{\Delta x^4}{4!}\alpha_a u_j^{(4)} + \frac{\Delta x^5}{5!}\alpha_m u_j^{(5)} + \frac{\Delta x^6}{6!}\alpha_a u_j^{(6)} - \Delta x^2 \beta_m F_j^{(1)} - \frac{\Delta x^3}{2!}\beta_a F_j^{(2)} - \frac{\Delta x^4}{3!}\beta_m F_j^{(3)} - \frac{\Delta x^5}{4!}\beta_a F_j^{(4)} - \frac{\Delta x^6}{5!}\beta_m F_j^{(5)} + \cdots\right\} \tag{5.5.84}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\lambda \equiv \frac{1}{\Delta x \beta_T}, \beta_T \equiv \beta_1 + \beta_0 + \beta_{-1}, \beta_m \equiv \beta_1 - \beta_{-1}, \beta_a = \beta_1 + \beta_{-1} \\ &\alpha_T \equiv \alpha_1 + \alpha_0 + \alpha_{-1}, \alpha_m \equiv \alpha_1 - \alpha_{-1}, \alpha_a \equiv \alpha_1 + \alpha_{-1} \\ &u_j^{(n)} \equiv \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_j, F_j^{(n)} \equiv \left(\frac{\partial^n F}{\partial x^n}\right)_j, n = 1,2,3,4,5,6\end{aligned}\right\} \tag{5.5.85}$$

将式(5.5.84)对 x 逐次求导,然后再逐次回代,可得

$$\begin{aligned}F_j = \lambda(&\alpha_T u_j + d_{10} u_j^{(1)} + d_{20} u_j^{(2)} + d_{30} u_j^{(3)} + d_{40} u_j^{(4)} + \\ &d_{50} u_j^{(5)} + d_{60} u_j^{(6)} + C_{50} F_j^{(5)} + \cdots)\end{aligned} \tag{5.5.86}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&d_{10} \equiv \alpha_m \Delta x - \lambda \alpha_T \beta_m \Delta x^2 = d_{21} = d_{32} = d_{43} \\ &d_{20} \equiv \alpha_a \frac{\Delta x^2}{2!} - \lambda d_{21} \beta_m \Delta x^2 - \lambda \alpha_T \beta_a \frac{\Delta x^3}{2!} = d_{31} = d_{42} \\ &d_{30} \equiv \alpha_m \frac{\Delta x^3}{3!} - \lambda d_{31} \beta_m \Delta x^2 - \lambda d_{32} \beta_a \frac{\Delta x^3}{2!} - \lambda \alpha_T \beta_m \frac{\Delta x^4}{3!} = \\ &\qquad d_{41} \\ &d_{40} \equiv \alpha_a \frac{\Delta x^4}{4!} - \lambda d_{41} \beta_m \Delta x^2 - \lambda d_{42} \beta_a \frac{\Delta x^3}{2!} - \lambda d_{43} \beta_m \frac{\Delta x^4}{3!} - \\ &\qquad \lambda \alpha_T \beta_a \frac{\Delta x^5}{4!} \\ &d_{50} \equiv \alpha_m \frac{\Delta x^5}{5!} - \lambda d_{51} \beta_m \Delta x^2 - \lambda d_{52} \beta_a \frac{\Delta x^3}{2!} - \lambda d_{53} \beta_m \frac{\Delta x^4}{3!} - \\ &\qquad \lambda \alpha_m \beta_a \frac{\Delta x^6}{4!} \\ &d_{60} \equiv \alpha_a \frac{\Delta x^6}{6!} - \lambda d_{61} \beta_m \Delta x^2 - \lambda d_{62} \beta_a \frac{\Delta x^3}{2!} - \lambda d_{63} \beta_m \frac{\Delta x^4}{3!} - \\ &\qquad \lambda \alpha_a \beta_a \frac{\Delta x^7}{48} \\ &C_{50} \equiv \lambda \beta_m \beta_a \frac{\Delta x^7}{4!} - \beta_m \frac{\Delta x^6}{5!} - \lambda C_{53} \beta_m \frac{\Delta x^4}{3!} - \lambda C_{52} \beta_a \frac{\Delta x^3}{2!} - \\ &\qquad \lambda C_{51} \beta_m \Delta x^2\end{aligned}\right\}$$

$$
\left.\begin{aligned}
d_{53} &\equiv \alpha_a \frac{\Delta x^2}{2!} - \lambda \alpha_m \beta_m \Delta x^3, \\
d_{52} &\equiv \alpha_m \frac{\Delta x^3}{3!} - \lambda d_{53} \beta_m \Delta x^2 - \lambda \alpha_m \beta_a \frac{\Delta x^4}{2!} \\
d_{51} &\equiv \alpha_a \frac{\Delta x^4}{4!} - \lambda d_{52} \beta_m \Delta x^2 - \lambda d_{53} \beta_a \frac{\Delta x^3}{2!} - \lambda \alpha_m \beta_m \frac{\Delta x^5}{3!} \\
d_{63} &\equiv \alpha_m \frac{\Delta x^3}{3!} - \lambda \alpha_a \beta_m \frac{\Delta x^4}{2!} \\
d_{62} &\equiv \alpha_a \frac{\Delta x^4}{4!} - \lambda d_{63} \beta_m \Delta x^2 - \lambda \alpha_a \beta_a \frac{\Delta x^5}{4} \\
d_{61} &\equiv \alpha_m \frac{\Delta x^5}{5!} - \lambda d_{62} \beta_m \Delta x^2 - \lambda d_{63} \beta_a \frac{\Delta x^3}{2!} - \lambda \alpha_a \beta_m \frac{\Delta x^6}{12} \\
C_{53} &\equiv \lambda \beta_m^2 \Delta x^4 - \beta_a \frac{\Delta x^3}{2!} \\
C_{52} &\equiv \lambda \beta_m \beta_a \frac{\Delta x^5}{2!} - \lambda C_{53} \beta_m \Delta x^2 - \beta_m \frac{\Delta x^4}{3!} \\
C_{51} &\equiv \lambda \beta_m^2 \frac{\Delta x^6}{3!} - \lambda C_{53} \beta_a \frac{\Delta x^3}{2!} - \lambda C_{52} \beta_m \Delta x^2 - \beta_a \frac{\Delta x^5}{4!}
\end{aligned}\right\}
\tag{5.5.87}
$$

将式(5.5.86)代入式(5.5.82)即可得到由 Hermite 补充关系式(5.5.83)来逼近一阶空间导数的半离散格式(5.5.82)的修正方程式

$$
\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j + a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \nu_0 u_j + \nu_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j + \nu_2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j + \nu_3\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j + \nu_4\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_j + \nu_5\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_j + \cdots \tag{5.5.88}
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
\nu_0 &= -a\lambda\alpha_T \\
\nu_1 &= a(1 - \lambda d_{10}) \\
\nu_n &= -a\lambda d_{n0} (n = 2,3,4,5)
\end{aligned}\right\}
\tag{5.5.89}
$$

若要求格式具有三阶精度，则 $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ 都必须为零，由此可得

$$\alpha_1 + \alpha_0 + \alpha_{-1} = 0 \tag{5.5.90}$$

$$\alpha_1 - \alpha_{-1} = \beta_1 + \beta_0 + \beta_{-1} \tag{5.5.91}$$

$$\beta_1 - \beta_{-1} = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_{-1}) \tag{5.5.92}$$

$$\beta_1 + \beta_{-1} = \frac{1}{3}(\alpha_1 - \alpha_{-1}) \tag{5.5.93}$$

并且此时有

$$\nu_4 = \frac{a\Delta x^3}{24}\left(\frac{\alpha_a}{\alpha_m}\right) \tag{5.5.94}$$

$$\nu_5 = a\Delta x^4\left[\frac{1}{180} - \frac{1}{48}\left(\frac{\alpha_a}{\alpha_m}\right)^2\right] \tag{5.5.95}$$

根据式(5.2.16)，以及式(5.2.13)和式(5.2.14)知，对于三阶格式而言，应满足下列条件。

$$\text{稳定性条件：}\nu_4 < 0\text{，在全流场} \tag{5.5.96}$$

$$\text{抑制波动条件：}\nu_5 < 0\text{，在激波左方} \tag{5.5.97}$$

$$\nu_5 > 0\text{，在激波右方} \tag{5.5.98}$$

由式(5.5.94)～式(5.5.98)可得

$$\left.\begin{array}{l}
\text{当 } a > 0 \text{ 时}\begin{cases}\dfrac{\alpha_a}{\alpha_m} < -0.51639, & \text{在激波左方}\\[2ex] -0.51639 < \dfrac{\alpha_a}{\alpha_m} < 0, & \text{在激波右方}\end{cases}\\[6ex]
\text{当 } a < 0 \text{ 时}\begin{cases}0 < \dfrac{\alpha_a}{\alpha_m} < 0.51639, & \text{在激波左方}\\[2ex] 0.51639 < \dfrac{\alpha_a}{\alpha_m}, & \text{在激波右方}\end{cases}
\end{array}\right\} \tag{5.5.99}$$

而由式(5.5.90)～式(5.5.93)可得

$$\beta_1 = \left[\frac{3X - 2}{6(1 + X)}\right]\alpha_{-1} \tag{5.5.100}$$

$$\beta_0 = -\left[\frac{4}{3(1+X)}\right]\alpha_{-1} \tag{5.5.101}$$

$$\beta_{-1} = -\left[\frac{3X+2}{6(1+X)}\right]\alpha_{-1} \tag{5.5.102}$$

$$\alpha_1 = \left(\frac{X-1}{1+X}\right)\alpha_{-1} \tag{5.5.103}$$

$$\alpha_0 = -\left(\frac{2X}{1+X}\right)\alpha_{-1} \tag{5.5.104}$$

其中，$X \equiv -\left(\frac{\alpha_a}{\alpha_m}\right)$。

综上所述，为了构造满足稳定性条件和抑制波动条件的三阶精度格式，补充关系式(5.5.83)中的6个待定系数应按如下方法来确定：在任意选定 α_{-1}和依据条件式(5.5.99)适当选定 X 的前提下，利用式(5.5.100)～式(5.5.104)分别定出 $\beta_1,\beta_0,\beta_{-1},\alpha_1$ 和 α_0。

现给出下列四种不同情况下，用上述方法选定的待定系数。

(1) $a>0$，且位于激波左方

$$\beta_{-1}=2,\beta_0=4,\beta_1=0,$$
$$\alpha_{-1}=-5,\alpha_0=4,\alpha_1=1 \tag{5.5.105}$$

(2) $a>0$，且位于激波右方

$$\beta_{-1}=7,\beta_0=16,\beta_1=1,$$
$$\alpha_{-1}=-18,\alpha_0=12,\alpha_1=6 \tag{5.5.106}$$

(3) $a<0$，且位于激波左方

$$\beta_{-1}=1,\beta_0=16,\beta_1=7,$$
$$\alpha_{-1}=-6,\alpha_0=-12,\alpha_1=18 \tag{5.5.107}$$

(4) $a<0$，且位于激波右方

$$\beta_{-1}=0,\beta_0=4,\beta_1=2,$$
$$\alpha_{-1}=-1,\alpha_0=-4,\alpha_1=5 \tag{5.5.108}$$

最后，将前面的讨论归纳如下。

式(5.5.82)，式(5.5.83)，式(5.5.105)～式(5.5.108)构造了内

点的满足抑制波动原则和稳定性原则的二阶精度的三点紧致格式。

为了使得补充关系式封闭,除了上述内点的补充关系式之外,还需要规定边界点处的补充关系式。采用与内点完全类似的方法可以定出边界点补充关系式中的诸待定系数。现将所得到的满足抑制波动原则和稳定性原则的二阶精度的三点边界紧致格式给出如下。

(1) 左边界点($j=1$)处的二阶三点紧致格式

补充关系式为

$$\Delta x(\beta_1 F_{j+1} + \beta_0 F_j) = \alpha_2 u_{j+2} + \alpha_1 u_{j+1} + \alpha_0 u_j \tag{5.5.109}$$

下面给出四种不同情况下,上式中的诸待定系数。

(i) $a>0$,且位于激波左方

$$\beta_0 = 5, \beta_1 = 9, \alpha_0 = -12, \alpha_1 = 10, \alpha_2 = 2 \tag{5.5.110}$$

(ii) $a>0$,且位于激波右方

$$\beta_0 = 3, \beta_1 = 7, \alpha_0 = -8, \alpha_1 = 6, \alpha_2 = 2 \tag{5.5.111}$$

(iii) $a<0$,且位于激波左方

$$\beta_0 = 3, \beta_1 = -5, \alpha_0 = -2, \alpha_1 = 6, \alpha_2 = -4 \tag{5.5.112}$$

(iv) $a<0$,且位于激波右方

$$\beta_0 = 3, \beta_1 = -1, \alpha_0 = -4, \alpha_1 = 6, \alpha_2 = -2 \tag{5.5.113}$$

式(5.5.82),式(5.5.109),式(5.5.110)~式(5.5.113)构成了左边界点($j=1$)处的满足抑制波动原则和稳定性原则的二阶精度的三点紧致格式。

(2) 右边界点($j=N$)处的二阶三点紧致格式

补充关系式为

$$\Delta x(\beta_0 F_j + \beta_{-1} F_{j-1}) = \alpha_0 u_j + \alpha_{-1} u_{j-1} + \alpha_{-2} u_{j-2} \tag{5.5.114}$$

下面给出四种不同情况下,上式中的诸待定系数。

(i) $a>0$，且位于激波左方

$$\beta_{-1}=1,\beta_0=-3,\alpha_{-2}=\\-2,\alpha_{-1}=6,\alpha_0=-4 \tag{5.5.115}$$

(ii) $a>0$，且位于激波右方

$$\beta_{-1}=5,\beta_0=-3,\alpha_{-2}=\\-4,\alpha_{-1}=6,\alpha_0=-2 \tag{5.5.116}$$

(iii) $a<0$，且位于激波左方

$$\beta_{-1}=-7,\beta_0=-3,\alpha_{-2}=\\2,\alpha_{-1}=6,\alpha_0=-8 \tag{5.5.117}$$

(iv) $a<0$，且位于激波右方

$$\beta_{-1}=-9,\beta_0=-5,\alpha_{-2}=\\2,\alpha_{-1}=10,\alpha_0=-12 \tag{5.5.118}$$

式(5.5.82)，式(5.5.114)，式(5.5.115)～式(5.5.118)构成了右边界点($j=N$)处的满足抑制波动原则和稳定性原则的二阶精度的三点紧致格式。

多个典型例子的实际计算表明，本小节中构造的紧致格式除了在激波附近有小波动之外，能够在绝大部分区域获得无波动的解。但如果格式不满足式(5.5.99)，则会导致大范围内解出现波动。为了进一步抑制激波附近的波动，可要求在激波处满足"熵增条件"式(5.2.23)。它可表述为

$$\nu_4\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{\partial f}{\partial x}>0 \tag{5.5.119}$$

式中 f 代表 f^+ 和 f^-。为了满足这一条件，首先由下式判断激波位置

$$\left|\frac{p_{j+1}-2p_j+p_{j-1}}{p_{j+1}+2p_j+p_{j-1}}\right|>C \tag{5.5.120}$$

式中 C 为给定常数。与满足上式的点相毗邻的点处格式的系数应按式(5.5.119)的要求来决定。采用这一方法，通过调整常数 C 可以有效地抑制激波附近解的虚假波动。

5.6 时—空守恒方法

时—空守恒元和解元方法(简称'CE/SE'方法)是 S. C. Chang[23]提出的求解双曲型守恒律方程的一种崭新的数值方法。无论从概念上还是从构造方法上,它都与传统的数值方法有所不同。首先,它把时间和空间完全统一起来,并同等对待,并从守恒律积分型方程出发,通过设立守恒元与解元,使格式局部和全局都严格保证其时间和空间统一的物理守恒律。其次,该方法把流场变量及其对空间偏导数均作为独立变量同时进行求解,这样一来,与传统的差分格式相比,在相同格式点数的情况下,其格式精度可以达到更高,还更便于边界条件的精确履行。第三,它除利用了简单的 Taylor 展开逼近外,无须其它的插值技术,也不需要任何特征分解或通量分裂技术,因此,格式构造思想非常简单,物理意义清晰,通用性好。最后,该方法可直接推广到多维情形,无须采用维数分解或交替方向技术。更具吸引力的是,该方法不仅可用来求解连续流动问题,而且可用来求解含有激波等的不连续流动问题,其高分辨率的数值结果甚至比目前广泛流行的某些高分辨率格式的计算结果还好。正是由于上述这些独特的优点,该方法正越来越受到人们的广泛关注。目前,该方法已经开始用于一些复杂流场的计算,如内爆和外爆问题、声/波及波/涡干扰问题、ZND 爆轰波问题等[24~26],而且它还被美国 NASA 列为第二代 CFD 程序中的主要算法之一。但是,由于 CE/SE 方法把流动变量及其对空间偏导数均作为独立变量同时进行求解,因此该方法要求在每一个网格点上守恒元的个数与该点待求变量个数相等。即使在解元中仅用一阶 Taylor 展开式来逼近有关函数时,在一维情形它在每个网格点需要设置两个守恒元,在二维及三维情形分别需要设置三个及四个守恒元。于是,在多维情形下守恒元的设置成为该方法的关键也是难点之一。正是由于这一点,目前还未见到国外有三维 CE/SE 格式正式发表。为此,我们对格式的构造方法作出

了改进[27-31]，使得无论在一维、二维还是三维情形，在每个网格点上都只需要设置一个守恒元，用来导出一个主要的离散方程，而利用两个相邻的不同时间半层的解元之公共点上流动变量连续的要求来导出关于流动变量及其对空间偏导数之间的补充计算关系式。由此导出的新格式不仅保留了原格式的优点，而且格式更为简单、实用，尤其是很容易推广到多维情形和高阶格式。下面将分别介绍采用上述新的格式构造方法导出的一维、二维及三维 Euler 方程的时—空守恒格式。

5.6.1 一维 Euler 方程的时—空守恒格式

一维非定常 Euler 方程组可写成如下形式

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + \frac{\partial f_m}{\partial x} = 0, m = 1,2,3 \tag{5.6.1}$$

式中

$$u_1 \equiv \rho, u_2 \equiv \rho V, u_3 \equiv E_t = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho V^2 \tag{5.6.2}$$

$$\left.\begin{aligned} f_1 &\equiv \rho V = u_2 \\ f_2 &\equiv \rho V^2 + p = (\gamma - 1)u_3 + \frac{1}{2}(3 - \gamma)u_2^2/u_1 \\ f_3 &\equiv (E_t + p)V = \gamma u_2 u_3/u_1 - \frac{1}{2}(\gamma - 1)u_2^3/u_1^2 \end{aligned}\right\} \tag{5.6.3}$$

遵照文献[23]的做法，令 $x_1 \equiv x, x_2 \equiv t$ 代表 Euclidean 空间 E_2 中的两个坐标。利用 Gauss 散度定理由式(5.6.1)可得如下积分型守恒律方程式

$$\oint_{S(V)} H_m \cdot \mathrm{dS} = 0, m = 1,2,3 \tag{5.6.4}$$

式中 S(V)是 E_2 中任一区域 V 的封闭界面；而

$$H_m \equiv (f_m, u_m), m = 1,2,3 \tag{5.6.5}$$

它们分别是时间—空间中的质量、动量及能量的流密度向量；$\mathrm{dS} \equiv (\mathrm{d}t, -\mathrm{d}x)$。

应当强调指出的是,积分方程(5.6.4)是把时间和空间完全统一起来同等看待而得到的。

下面介绍守恒元和解元的划分方法。如何设计守恒元(即CE)和解元(即SE)是CE/SE方法的关键之一。不同的设计方法将导致不同的计算格式。所谓守恒元就是时一空中选定的某一区域,在其中要求积分方程(5.6.4)成立。为此可把整个求解域按一定要求划分成许多个相互搭接而不重叠的守恒元,并要求积分方程(5.6.4)在其上得到满足,由此导出若干个离散方程,用来求解各网格点上的流动变量及其空间偏导数。这样做还可保证积分方程(5.6.4)在局部(即各个守恒元上)及全局(即所有守恒元之和)均得到满足。所谓解元则是在每一个网格点附近取定的一个微小区域,在其中假定流动变量足够光滑并可用某一简单函数来近似。在原始的CE/SE方法中,在每一网格点上要求设置守恒元的个数与待求变量的个数相等,以便得到相应数量的离散方程来求解这些变量。因此,在一维情形下,如果每一网格点上有两个独立的待求变量 u_m 和 u_{mx},那么CE/SE方法中在每一网格点需要设置两个守恒元。而在我们改进了的方法中,无论是在一维、二维还是三维情形,在每一个网格点上都只需设置一个守恒元,由此得到一个主要的离散方程,而采用流动变量在两个相邻时间半层解元的公共点上连续的要求(或简单地采用差商逼近微商的方法)来提供足够数量的补充关系式。这种做法使得守恒元的设置很容易,格式构造也非常简单,便于应用,同时也易于进一步推广到多维情形。具体来说,对于一维情形,在 $x—t$ 平面上采用如图5-2(a)中的交错网格,用 Ω 代表 E_2 中的网格点 (i,n) 集合,其中 i 和 n 分别代表空间方向和时间方向的标号,$n=0,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{2}{2},\cdots$;对每一个 n,取 $i=n\pm\frac{1}{2},n\pm\frac{3}{2},\cdots$。$\forall(i,n)\in\Omega$,设有一个解元SE$(i,n)$和一个守恒元CE$(i,n)$与之对应。这里,相应于网格点 $A(i,n)$的解元取为图5-2(b)中的四边形 $BDFG$ 所围区域,守恒元CE

(i,n)则取图 5-2(b)中矩形 $BCEF$ 所围区域。

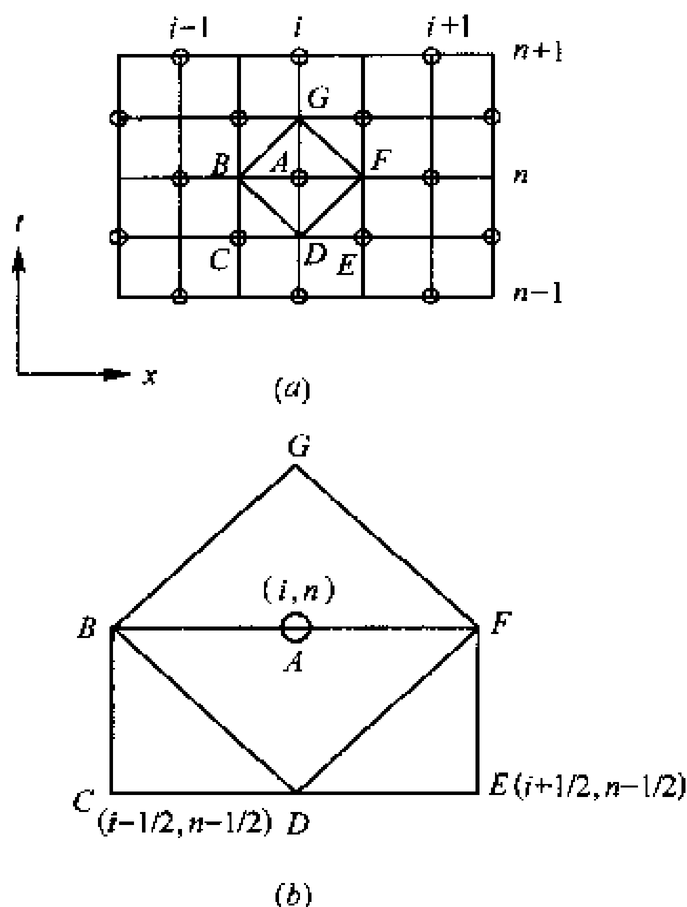


图 5-2　网格点分布及解元、守恒元的划分

(a) 网格点分布;(b) 解元 SE(i,n)和守恒元 CE(i,n)的划分。

根据上面关于解元的假定,$\forall (x,t)\in \mathrm{SE}(i,n)$,我们可采用不同形式的函数 $u_m^*(x,t;i,n)$和 $f_m^*(x,t;i,n)$来逼近方程中的 $u_m(x,t)$和 $f_m(x,t)$。这里采用最简单的一阶 Taylor 展开式来逼近 $u_m(x,t)$和 $f_m(x,t)$,即取

$$u_m^*(x,t;i,n) = (u_m)_i^n + (u_{mx})_i^n(x - x_i) + (u_{mt})_i^n(t - t^n) \tag{5.6.6}$$

$$f_m^*(x,t;i,n) = (f_m)_i^n + (f_{mx})_i^n(x - x_i) + (f_{mt})_i^n(t - t^n) \tag{5.6.7}$$

相应地可设

$$H_m^*(x,t;i,n) = (f_m^*(x,t;i,n), u_m^*(x,t;i,n)) \tag{5.6.8}$$

于是方程(5.6.4)便可以用下式来进行逼近

$$\oint_{S(CE(i,n))} H_m^* \cdot dS = 0, \forall (i,n) \in \Omega \qquad (5.6.9)$$

$$(m = 1,2,3)$$

现将 $u_m = u_m^*(x,t;i,n)$ 和 $f_m = f_m^*(x,t;i,n)$(其中 $u_m^*(x,t;i,n)$ 和 $f_m^*(x,t;i,n)$ 分别由式(5.6.6)和式(5.6.7)决定)代入式(5.6.1)可得

$$(u_{mt})_i^n = -(f_{mx})_i^n \qquad (5.6.10)$$

由式(5.6.10)及简单分析不难看出,在每个网格点上要求的独立变量只有 u_m 和 u_{mx}。

将式(5.6.6)~式(5.6.8)代入式(5.6.9),可得

$$\oint_{S(CE(i,n))} H_m^* \cdot dS = \oint_{S(CE(i,n))} [f_m^* dt - u_m^* dx] =$$

$$-\int_{CD} u_m^* dx - \int_{DE} u_m^* dx + \int_{EF} f_m^* dt - \int_{FB} u_m^* dx + \int_{BC} f_m^* dt =$$

$$-\int_{x_{i-1/2}}^{x_i} [(u_m)_{i-1/2}^{n-1/2} + (u_{mx})_{i-1/2}^{n-1/2}(x - x_{i-1/2})]dx -$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1/2}} [(u_m)_{i+1/2}^{n-1/2} + (u_{mx})_{i+1/2}^{n-1/2}(x - x_{i+1/2})]dx +$$

$$\int_{t^{n-1/2}}^{t^n} [(f_m)_{i+1/2}^{n-1/2} + (f_{mt})_{i+1/2}^{n-1/2}(t - t^{n-1/2})]dt -$$

$$\int_{x_{i+1/2}}^{x_{i-1/2}} [(u_m)_i^n + (u_{mx})_i^n(x - x_i)]dx +$$

$$\int_{t^n}^{t^{n-1/2}} [(f_m)_{i-1/2}^{n-1/2} + (f_{mt})_{i-1/2}^{n-1/2}(t - t^{n-1/2})]dt =$$

$$-\frac{\Delta x}{2}[(u_m)_{i-1/2}^{n-1/2}+(u_m)_{i+1/2}^{n-1/2}]-\frac{\Delta x^2}{8}[(u_{mx})_{i-1/2}^{n-1/2}-(u_{mx})_{i+1/2}^{n-1/2}]+$$

$$\frac{\Delta t}{2}[(f_m)_{i+1/2}^{n-1/2}-(f_m)_{i-1/2}^{n-1/2}]+\frac{\Delta t^2}{8}[(f_{mt})_{i+1/2}^{n-1/2}-(f_{mt})_{i-1/2}^{n-1/2}]+$$

$$(u_m)_i^n\Delta x=0$$

经整理后可得

$$(u_m)_i^n=\left(\frac{1}{2}\right)[(u_m)_{i-1/2}^{n-1/2}+(u_m)_{i+1/2}^{n-1/2}+(S_m)_{i-1/2}^{n-1/2}-(S_m)_{i+1/2}^{n-1/2}] \tag{5.6.11}$$

式中

$$(S_m)_i^n\equiv\frac{\Delta x}{4}(u_{mx})_i^n+\frac{\Delta t}{\Delta x}(f_m)_i^n+\frac{\Delta t^2}{4\Delta x}(f_{mt})_i^n \tag{5.6.12}$$

式(5.6.11)是我们得到的一个主要的离散方程。

为了得到求 u_{mx} 的补充关系式，要求 u_m^* 在两个不同时间半层的相邻解元公共点 B 和 F（见图 5-2(b)）上连续（或相容），分别可得

$$(u_m)_i^n-(u_{mx})_i^n\frac{1}{2}\Delta x=(u_m)_{i-1/2}^{n-1/2}+(u_{mt})_{i-1/2}^{n-1/2}\frac{1}{2}\Delta t$$

$$(u_m)_i^n+(u_{mx})_i^n\frac{1}{2}\Delta x=(u_m)_{i+1/2}^{n-1/2}+(u_{mt})_{i+1/2}^{n-1/2}\frac{1}{2}\Delta t$$

由此可得

$$(u_{mx})_i^n=\frac{1}{2}[(u_{mx}^+)_i^n+(u_{mx}^-)_i^n] \tag{5.6.13}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}(u_{mx}^{\pm})_i^n&\equiv\pm\frac{2}{\Delta x}[(\bar{u}_m)_{i\pm1/2}^n-(u_m)_i^n]\\(\bar{u}_m)_{i\pm1/2}^n&\equiv(u_m)_{i\pm1/2}^{n-1/2}+\frac{\Delta t}{2}(u_{mt})_{i\pm1/2}^{n-1/2}\end{aligned}\right\} \tag{5.6.14}$$

式(5.6.13)实际上也可以看成是一个中心差分逼近。

离散方程式(5.6.11)和式(5.6.13)就是我们得到的一维

Euler方程的时一空守恒格式。非常巧合的是上述格式与文献[23]中的 $a-\epsilon$ 格式在 $\epsilon=0.5$ 时的形式完全一样,而文献[23]中的 $a-\epsilon$ 格式则是在标准的无粘 a-μ 格式(即 $\mu=0$ 时的 a-μ 格式)基础上通过加入适当的人工粘性,然后经过一系列繁杂的推导过程而得到的,有兴趣的读者可参见文献[23]。而这里只用上述简单的构造方法便可得到。后面还将看到,应用上述构造方法也很容易得到二维及三维 Euler 方程的时一空守恒格式。

对于不光滑或变化比较剧烈的流场计算,应对式(5.6.13)作适当修正。例如可将其右端的简单算术平均用下面的加权平均来替代

$$(u_{mx})_i^n = W((u_{mx}^-)_i^n, (u_{mx}^+)_i^n, \alpha) \tag{5.6.15}$$

式中 W 是一个限制函数,其定义为

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ W(0,0,\alpha)=0 \\ (2)\ W(x_-,x_+,\alpha)=[|x_+|^\alpha x_- + |x_-|^\alpha x_+]/[|x_+|^\alpha + |x_-|^\alpha] \\ \quad \text{当 } |x_+|^\alpha + |x_-|^\alpha \neq 0 \text{ 时}\end{array}\right\} \tag{5.6.16}$$

这里,α 是一个可调参数,一般取 1 或 2 即可。上式相当于一个简单的梯度限制器,它能有效地抑制激波附近的非物理数值振荡。当然,也可以采用其它形式的限制函数,例如 MinMod 函数等,其效果类似。

上面介绍的一维 Euler 方程的时一空守恒格式的构造方法很容易推广到一维 Navier-Stokes 方程的情况,此处不再赘述。有兴趣的读者请阅读文献[27]。

5.6.2 二维 Euler 方程的时一空守恒格式

现将上面的一维 Euler 方程的时一空守恒格式推广到二维情形[39]。二维非定常 Euler 方程组可写成如下形式

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + \frac{\partial f_m}{\partial x} + \frac{\partial g_m}{\partial y} = 0, m = 1,2,3,4 \tag{5.6.17}$$

式中

$$u_1 \equiv \rho, u_2 \equiv \rho u, u_3 \equiv \rho v, u_4 \equiv E_t = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \tag{5.6.18}$$

$$\left.\begin{aligned} f_1 &\equiv \rho u = u_2, \\ f_2 &\equiv \rho u^2 + p = (\gamma - 1)u_4 + \left(\frac{3-\gamma}{2}\right)\frac{u_2^2}{u_1} - \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)\frac{u_3^2}{u_1} \\ f_3 &\equiv \rho uv = \frac{u_2 u_3}{u_1}, \\ f_4 &\equiv (E_t + p)u = \gamma\frac{u_4 u_2}{u_1} - \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)\frac{(u_2^2 + u_3^2)u_2}{u_1^2} \end{aligned}\right\} \tag{5.6.19}$$

$$\left.\begin{aligned} g_1 &\equiv \rho v = u_3, \\ g_2 &\equiv \rho uv = \frac{u_2 u_3}{u_1} \\ g_3 &\equiv \rho v^2 + p = (\gamma - 1)u_4 + \left(\frac{3-\gamma}{2}\right)\frac{u_3^2}{u_1} - \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)\frac{u_2^2}{u_1} \\ g_4 &\equiv (E_t + p)v = \gamma\frac{u_4 u_3}{u_1} - \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)\frac{(u_2^2 + u_3^2)u_3}{u_1^2} \end{aligned}\right\} \tag{5.6.20}$$

令 $x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv t$ 代表 Euclidean 空间 E_3 中的三个坐标。利用 Gauss 散度定理由式(5.6.17)可得如下积分型守恒律方程式

$$\oint_{S(V)} H_m \cdot \mathrm{d}S = 0, m = 1,2,3,4 \tag{5.6.21}$$

式中 $S(V)$是 E_3 中任一区域 V 的封闭界面,而

$$H_m \equiv (f_m, g_m, u_m), m = 1,2,3,4 \tag{5.6.22}$$

分别是时一空中的质量、x 和 y 方向动量及能量的流密度向量;$\mathrm{d}S \equiv \mathrm{d}\sigma \boldsymbol{n}$,这里 $\mathrm{d}\sigma$ 和 $\boldsymbol{n}$ 分别是$S(V)$上一个面元素的面积和单位外法线向量。

现在来讨论守恒元和解元的划分方法。在二维情形，如果每一网格点上有三个独立的待求变量 u_m，u_{mx} 和 u_{my}，那么在原始的 CE/SE 方法中每一网格点需要设置三个守恒元，以便利用由此得到的三个离散方程联立求解这三个独立变量。这种做法使得守恒元的设置很复杂，网格布局为三角形状，同时格式推导也非常繁琐，使用起来不大方便。而在我们改进的格式构造方法中，在每个网格点只需设置一个守恒元，使得守恒元的设置很简单。下面将给出一种比较简单的守恒元和解元的划分方法，它是一维情形的一种自然推广。

设在 x-y 平面上的网格点布局如图 5-3(a)所示，其中空心圆点和叉点分别表示两个不同时间半层上的网格点，它们是相互交错的。用 Ω 代表 E_3 中的网格点(i,j,n)集合，其中 i,j,n 分别代表两个空间方向和一个时间方向的标号，$n=0,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{2}{2},\cdots$；$i,j=n\pm\frac{1}{2},n\pm\frac{2}{2},\cdots$。$\forall(i,j,n)\in\Omega$，设有一个解元 SE($i,j,n$)和一个守恒元 CE($i,j,n$)与之对应(见图 5-3($b$))，其中解元 SE($i,j,n$)取图中六面体 $P'Q'R'S'S''R''Q''P''$ 再加上中间平面 E-

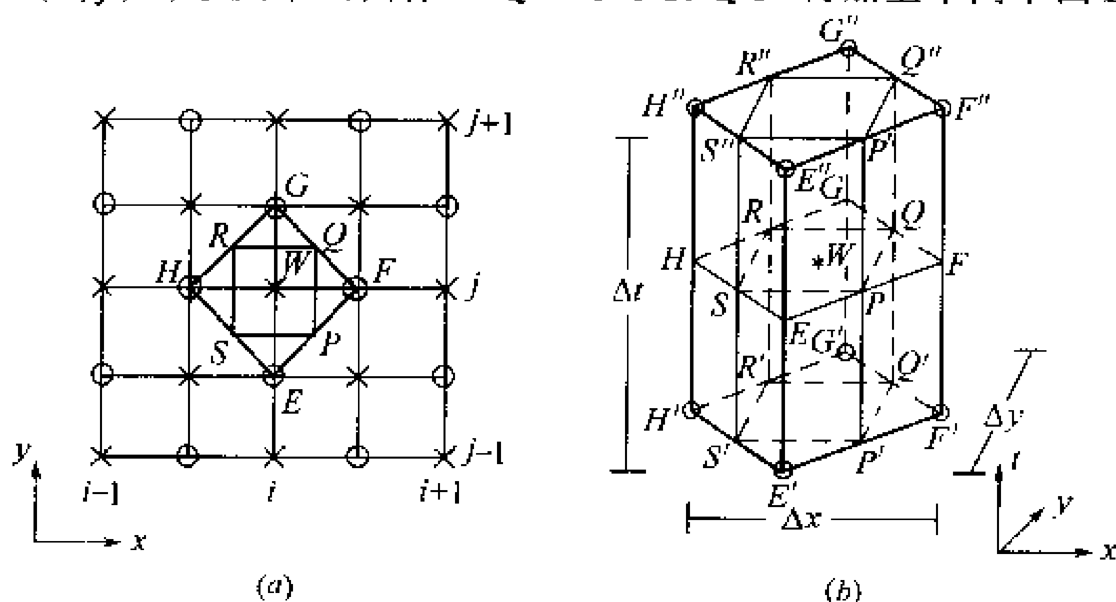


图 5-3 网格点分布及解元、守恒元的构成

(a) x-y 平面上的网格点分布；(b) 解元 SE(i,j,n)和守恒元 CE(i,j,n)的构成。

FGH、而守恒元 CE(i,j,n)则取图中六面体 $EFGHH'G'F'E'$。

与一维情形类似，$\forall(x,y,t)\in$ SE(i,j,n)，用下面的一阶 Taylor 展开式来逼近方程(5.6.17)中的 $u_m(x,y,t)$，$f_m(x,y,t)$ 和 $g_m(x,y,t)$

$$u_m^*(x,y,t;i,j,n) = (u_m)_{i,j}^n + (u_{mx})_{i,j}^n(x-x_i) + (u_{my})_{i,j}^n(y-y_j) + (u_{mt})_{i,j}^n(t-t^n) \qquad (5.6.23)$$

$$f_m^*(x,y,t;i,j,n) = (f_m)_{i,j}^n + (f_{mx})_{i,j}^n(x-x_i) + (f_{my})_{i,j}^n(y-y_j) + (f_{mt})_{i,j}^n(t-t^n) \qquad (5.6.24)$$

$$g_m^*(x,y,t;i,j,n) = (g_m)_{i,j}^n + (g_{mx})_{i,j}^n(x-x_i) + (g_{my})_{i,j}^n(y-y_j) + (g_{mt})_{i,j}^n(t-t^n) \qquad (5.6.25)$$

相应地有

$$H_m^*(x,y,t;i,j,n) = (f_m^*(x,y,t;i,j,n), g_m^*(x,y,t;i,j,n), u_m^*(x,y,t;i,j,n)) \qquad (5.6.26)$$

于是方程式(5.6.21)便可用下式来逼近

$$\oint_{S(\mathrm{CE}(i,j,n))} H_m^* \cdot \mathrm{d}S = 0, \forall(i,j,n)\in\Omega \qquad (5.6.27)$$

将 $u_m = u_m^*(x,y,t;i,j,n)$、$f_m = f_m^*(x,y,t;i,j,n)$ 和 $g_m = g_m^*(x,y,t;i,j,n)$(其中 $u_m^*(x,y,t;i,j,n)$、$f_m^*(x,y,t;i,j,n)$ 和 $g_m^*(x,y,t;i,j,n)$ 分别由式(5.6.23)、式(5.6.24)和式(5.6.25)决定)代入式(5.6.17)可得

$$(u_{mt})_{i,j}^n = -(f_{mx})_{i,j}^n - (g_{my})_{i,j}^n \qquad (5.6.28)$$

由此不难看出，在二维情形下每个网格点上最终要求解的独立变量只有 u_m、u_{mx} 和 u_{my}。

将式(5.6.23)～式(5.6.26)代入式(5.6.27)，经整理后得

$$(u_m)_{i,j}^n = \left[Q_m^{(1)}\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)\right]_{i-1/2,j}^{n-1/2} + \left[Q_m^{(1)}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\right]_{i+1/2,j}^{n-1/2} +$$

$$\left[Q_m^{(2)}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)\right]_{i,j+1/2}^{n-1/2} + \left[Q_m^{(2)}\left(-\frac{\Delta y}{2}\right)\right]_{i,j-1/2}^{n-1/2} \tag{5.6.29}$$

式中

$$Q_m^{(1)}(\Delta x) = \frac{1}{8}\left\{(2u_m - \Delta x \cdot u_{mx}) - \Delta t\left[\frac{1}{2}g_{my} + \frac{1}{\Delta x}(4f_m - \Delta x f_{mx} + \Delta t f_{mt})\right]\right\} \tag{5.6.30}$$

$$Q_m^{(2)}(\Delta y) = \frac{1}{8}\left\{(2u_m - \Delta y \cdot u_{my}) - \Delta t\left[\frac{1}{2}f_{mx} + \frac{1}{\Delta y}(4g_m - \Delta y g_{my} + \Delta t g_{mt})\right]\right\} \tag{5.6.31}$$

为了得到另外两个补充计算关系式，要求 u_m^{s} 在两个相邻的不同时间半层解元的交接点 E，F，G 和 H 处连续(见图 5-3(b))，可得

$$(u_{mx})_{i,j}^{n} = \frac{1}{2}\left[(u_{mx}^{+})_{i,j}^{n} + (u_{mx}^{-})_{i,j}^{n}\right];$$

$$(u_{my})_{i,j}^{n} = \frac{1}{2}\left[(u_{my}^{+})_{i,j}^{n} + (u_{my}^{-})_{i,j}^{n}\right] \tag{5.6.32a}$$

或

$$(u_{mx})_{i,j}^{n} = W((u_{mx}^{+})_{i,j}^{n}, (u_{mx}^{-})_{i,j}^{n}, \alpha);$$

$$(u_{my})_{i,j}^{n} = W((u_{my}^{-})_{i,j}^{n}, (u_{my}^{+})_{i,j}^{n}, \alpha) \tag{5.6.32b}$$

式中

$$(u_{mx}^{\pm})_{i,j}^{n} \equiv \pm\frac{2}{\Delta x}\left[(u_m')_{i\pm1/2,j}^{n} - (u_m)_{i,j}^{n}\right],$$

$$(u_m')_{i\pm1/2,j}^{n} \equiv \left[u_m + \frac{\Delta t}{2}u_{mt}\right]_{i\pm1/2,j}^{n-1/2} \tag{5.6.33}$$

$$(u_{my}^{\pm})_{i,j}^{n} \equiv \pm\frac{2}{\Delta y}\left[(u_m')_{i,j\pm1/2}^{n} - (u_m)_{i,j}^{n}\right],$$

$$(u_m')_{i,j\pm1/2}^{n} \equiv \left[u_m + \frac{\Delta t}{2}u_{mt}\right]_{i,j\pm1/2}^{n-1/2} \tag{5.6.34}$$

离散方程式(5.6.29)和式(5.6.32)就是在上述守恒元和解元划分下得到的二维 Euler 方程的时—空守恒格式。这是一个显格式,它既具有原 CE/SE 格式的优点,如它可严格保证局部及全局范围的时—空统一的物理守恒律得到满足,格式所需网格单元少,便于边界处理等,同时格式构造又比原方法简单,便于应用。

上面给出的是一种比较简单又实用的守恒元和解元的划分方法,实际上在二维情形下,守恒元和解元的划分方法可以有多种,每种划分下得出的格式也不完全相同。文献[33]中除上面的划分方法外还给出另外一种有效的守恒元和解元的划分方法。从两种划分方法的比较来看,它们各有优点;从多个算例的计算结果来看,结果相差很小。

这里推导的是在笛卡儿坐标系中正规网格划分下的时—空守恒格式。采用类似的方法还可得到具有广泛适应性的一般形式的二维时—空守恒格式和一般曲线坐标系下的二维时—空守恒格式,以及带有源项或刚性源项方程的相应格式。关于这方面的详细情况可参见文献[34,35]。

5.6.3 三维 Euler 方程的时—空守恒格式

三维非定常 Euler 方程组可写成如下形式

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + \frac{\partial f_m}{\partial x} + \frac{\partial g_m}{\partial y} + \frac{\partial h_m}{\partial z} = 0, m = 1,2,3,4,5 \tag{5.6.35}$$

式中

$$u_1 \equiv \rho, u_2 \equiv \rho u, u_3 \equiv \rho v, u_4 \equiv \rho w,$$

$$u_5 \equiv E_t = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2 + w^2) \tag{5.6.36}$$

$$f_1 \equiv \rho u = u_2,$$

$$f_2 \equiv \rho u^2 + p = (\gamma - 1)u_5 + \left(\frac{3 - \gamma}{2}\right)\frac{u_2^2}{u_1} -$$

$$\left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)\frac{(u_3^2 + u_4^2)}{u_1}$$

$$f_3 \equiv \rho u v = \frac{u_2 u_3}{u_1},$$

$$f_4 \equiv \rho u w = \frac{u_2 u_4}{u_1}$$

$$f_5 \equiv (E_t + p) u = \frac{\gamma u_5 u_2}{u_1} - \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)\frac{(u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) u_2}{u_1^2} \tag{5.6.37}$$

$$g_1 \equiv \rho v = u_3,$$

$$g_2 \equiv \rho u v = \frac{u_2 u_3}{u_1}$$

$$g_3 \equiv \rho v^2 + p = (\gamma - 1) u_5 + \left(\frac{3 - \gamma}{2}\right)\frac{u_{23}}{u_1} -$$

$$\left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)\frac{(u_2^2 + u_4^2)}{u_1}$$

$$g_4 \equiv \rho v w = \frac{u_3 u_4}{u_1},$$

$$g_5 \equiv (E_t + p) v = \frac{\gamma u_5 u_3}{u_1} - \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)\frac{(u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) u_3}{u_1^2} \tag{5.6.38}$$

$$h_1 \equiv \rho w = u_4, h_2 \equiv \rho u w = \frac{u_2 u_4}{u_1},$$

$$h_3 \equiv \rho v w = \frac{u_3 u_4}{u_1}$$

$$h_4 \equiv \rho w^2 + p = (\gamma - 1) u_5 + \left(\frac{3 - \gamma}{2}\right)\frac{u_4^2}{u_1} -$$

$$\left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)\frac{(u_2^2 + u_3^2)}{u_1}$$

$$h_5 \equiv (E_t + p)w = \frac{\gamma u_5 u_4}{u_1} - \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)\frac{(u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)u_4}{u_1^2} \Bigg|$$
(5.6.39)

令 $x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z, x_4 \equiv t$ 代表 Euclidean 空间 E_4 中的四个坐标。利用 Gauss 散度定理，由式(5.6.35)可得如下积分型守恒律方程式

$$\oint_{S(V)} H_m \cdot \mathrm{d}S = 0, m = 1,2,3,4,5 \qquad (5.6.40)$$

式中 $S(V)$是 E_4 中任一区域 V 的封闭界面，而

$$H_m \equiv (f_m, g_m, h_m, u_m), m = 1,2,3,4,5 \quad (5.6.41)$$

分别是时—空中的质量、x、y 和 z 方向动量及能量的流密度向量；$\mathrm{d}S \equiv \mathrm{d}\sigma \boldsymbol{n}$，这里 $\mathrm{d}\sigma$ 和 $\boldsymbol{n}$ 分别是 $S(V)$上一个“面元素”的“面积”和单位外法线向量。

现在来讨论守恒元与解元的划分方法。在三维情形，如果每一网格点上有四个独立的待求变量 $u_m, u_{mx}, u_{my}, u_{mz}$，那么在原始的 CE/SE 方法中每一网格点需要设置四个守恒元，以便利用由此得到的四个离散方程联立求解这四个独立变量。这样将使得守恒元的设置极其复杂，并且格式推导也极为麻烦，因此至今还未见国外有关三维 CE/SE 格式的结果正式发表。而若应用上述新的格式构造方法，在每一个网格点只需设置一个守恒元，使得守恒元的设置很简单。与二维情形一样，在三维情形下，守恒元和解元的划分方法也有很多种，而且每种划分下得出的格式也不完全相同。下面给出一种比较简单实用的守恒元和解元的划分方法，它是一维及二维情形的一种自然推广。

设在 $x—y—z$“平面”上的网格点布局如图 5-4(a)所示，其中空心圆点和叉点分别表示两个不同时间半层上的计算网格点，它们是相互交错的。用 Ω 代表 E_4 中的计算网格点(i,j,k,n)集合，其中 $n = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{2}, \cdots$，对每个 n，$i,j,k = n \pm \frac{1}{2}, n \pm \frac{2}{2}, \cdots$。这里，$i,j,k$ 和 n 分别为三个空间方向和一个时间方向的

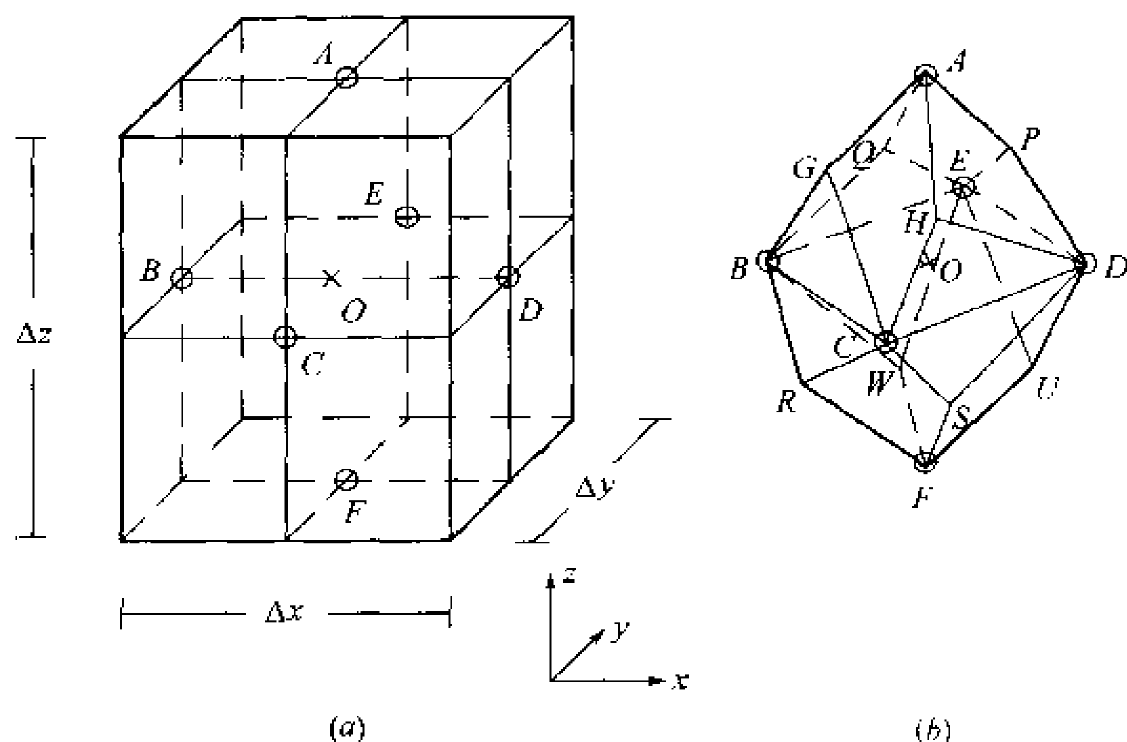


图 5-4　网格点布局及守恒元、解元的构成

(a) x-y-z 平面上的网格点布局；

(b) 守恒元 CE(i,j,k,n)和解元 SE(i,j,k,n)。

标号。$\forall(i,j,k,n)\in\Omega$，设有一个解元 SE($i,j,k,n$)和一个守恒元 CE($i,j,k,n$)与之对应。设 $A',G',H',P',Q',B',C',D',E',R',S',U',W',F'$ 和 $A'',G'',H'',P'',Q'',B'',C'',D'',E'',R'',S'',U'',W'',F''$ 分别为 $(n-1/2)$ 和 $(n+1/2)$ 时间半层上与 n 时间层上 $A,G,H,P,Q,B,C,D,E,R,S,U,W,F$ 相对应的点(见图 5-4(b))。将守恒元 CE(i,j,k,n)取为多面体 $AGHPQBCDERSUWFA'G'H'P'Q'B'C'D'E'R'S'U'W'F'$，而解元 SE($i,j,k,n$)则取作多面体 $G''H''P''Q''R''S''U''W''G'H'P'Q'R'S'U'W'$ 再加上多面体 $AGHPQBCDERSUWF$。

$\forall(x,y,z,t)\in$ SE(i,j,k,n)，用下面的一阶 Taylor 展开式来逼近式(5.6.35)中的 $u_m(x,y,z,t)$，$f_m(x,y,z,t)$，$g_m(x,y,z,t)$，$h_m(x,y,z,t)$

$$u_m^*(x,y,z,t;i,j,k,n)=(u_m)_{i,j,k}^n+$$

$$(u_{mx})^n_{i,j,k}(x - x_i) + (u_{my})^n_{i,j,k}(y - y_j) +$$
$$(u_{mz})^n_{i,j,k}(z - z_k) + (u_{mt})^n_{i,j,k}(t - t^n) \quad (5.6.42)$$

$$f^*_m(x,y,z,t;i,j,k,n) = (f_m)^n_{i,j,k} +$$
$$(f_{mx})^n_{i,j,k}(x - x_i) + (f_{my})^n_{i,j,k}(y - y_j) +$$
$$(f_{mz})^n_{i,j,k}(z - z_k) + (f_{mt})^n_{i,j,k}(t - t^n) \quad (5.6.43)$$

$$g^*_m(x,y,z,t;i,j,k,n) = (g_m)^n_{i,j,k} +$$
$$(g_{mx})^n_{i,j,k}(x - x_i) + (g_{my})^n_{i,j,k}(y - y_j) +$$
$$(g_{mz})^n_{i,j,k}(z - z_k) + (g_{mt})^n_{i,j,k}(t - t^n) \quad (5.6.44)$$

$$h^*_m(x,y,z,t;i,j,k,n) = (h_m)^n_{i,j,k} +$$
$$(h_{mx})^n_{i,j,k}(x - x_i) + (h_{my})^n_{i,j,k}(y - y_j) +$$
$$(h_{mz})^n_{i,j,k}(z - z_k) + (h_{mt})^n_{i,j,k}(t - t^n) \quad (5.6.45)$$

相应地有

$$H^*_m(x,y,z,t;i,j,k,n) = (f^*_m(x,y,z,t;i,j,k,n), g^*_m(x,y,z,t;i,j,k,n), h^*_m(x,y,z,t;i,j,k,n), u^*_m(x,y,z,t;i,j,k,n)) \quad (5.6.46)$$

于是方程式(5.6.40)便可用下式来逼近

$$\oint_{S(CE(i,j,k,n))} H^*_m \cdot \mathrm{dS} = 0, \forall (i,j,k,n) \in \Omega \quad (5.6.47)$$

将 $u_m = u^*_m(x,y,z,t;i,j,k,n)$、$f_m = f^*_m(x,y,z,t;i,j,k,n)$、$g_m = g^*_m(x,y,z,t;i,j,k,n)$和 $h_m = h^*_m(x,y,z,t;i,j,k,n)$(其中 $u^*_m(x,y,z,t;i,j,k,n)$、$f^*_m(x,y,z,t;i,j,k,n)$、$g^*_m(x,y,z,t;i,j,k,n)$和 $h^*_m(x,y,z,t;i,j,k,n)$分别由式(5.6.42),式(5.6.43),式(5.6.44)和式(5.6.45)决定)代入式(5.6.35)可得

$$(u_{mt})_{i,j,k}^{n} = -(f_{mx})_{i,j,k}^{n} - (g_{my})_{i,j,k}^{n} - (h_{mz})_{i,j,k}^{n} \tag{5.6.48}$$

经简单分析后不难看出，在三维情形下每个网格点上最终要求解的独立变量只有 u_m，u_{mx}，u_{my}和 u_{mz}。

将式(5.6.42)～式(5.6.46)代入式(5.6.47)，经整理后得

$$\begin{aligned}(u_m)_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{6}\Bigg\{&\left[Q_m^{(1)}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\right]_{i+1/2,j,k}^{n-1/2} + \left[Q_m^{(1)}\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)\right]_{i-1/2,j,k}^{n-1/2} + \\ &\left[Q_m^{(2)}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)\right]_{i,j+1/2,k}^{n-1/2} + \left[Q_m^{(2)}\left(-\frac{\Delta y}{2}\right)\right]_{i,j-1/2,k}^{n-1/2} + \\ &\left[Q_m^{(3)}\left(\frac{\Delta z}{2}\right)\right]_{i,j,k+1/2}^{n-1/2} + \left[Q_m^{(3)}\left(-\frac{\Delta z}{2}\right)\right]_{i,j,k-1/2}^{n-1/2}\Bigg\}\end{aligned} \tag{5.6.49}$$

式中

$$\begin{aligned}Q_m^{(1)}(\Delta x) = &\left(u_m - \frac{\Delta x}{2}u_{mx}\right) - \frac{\Delta t}{4}(g_{my} + h_{mz}) - \\ &\frac{3\Delta t}{2\Delta x}\left(f_m - \frac{\Delta x}{3}f_{mx} + \frac{\Delta t}{4}f_{mt}\right)\end{aligned} \tag{5.6.50}$$

$$\begin{aligned}Q_m^{(2)}(\Delta y) = &\left(u_m - \frac{\Delta y}{2}u_{my}\right) - \frac{\Delta t}{4}(h_{mz} + f_{mx}) - \\ &\frac{3\Delta t}{2\Delta y}\left(g_m - \frac{\Delta y}{3}g_{my} + \frac{\Delta t}{4}g_{mt}\right)\end{aligned} \tag{5.6.51}$$

$$\begin{aligned}Q_m^{(3)}(\Delta z) = &\left(u_m - \frac{\Delta z}{2}u_{mz}\right) - \frac{\Delta t}{4}(f_{mx} + g_{my}) - \\ &\frac{3\Delta t}{2\Delta z}\left(h_m - \frac{\Delta z}{3}h_{mz} + \frac{\Delta t}{4}h_{mt}\right)\end{aligned} \tag{5.6.52}$$

为了得到另外三个补充关系式，要求 u_m^* 在两个相邻的不同时间半层解元的交接点 A、B、C、D、E 和 F 处连续(见图 5-4(b))，可得

$$(u_{ml})_{i,j,k}^{n} = \frac{1}{2}\left[(u_{ml}^{+})_{i,j,k}^{n} + (u_{ml}^{-})_{i,j,k}^{n}\right], l = x,y,z \tag{5.6.53}$$

或

$$(u_{ml})^{n}_{i,j,k} = W((u^{-}_{ml})^{n}_{i,j,k}, (u^{+}_{ml})^{n}_{i,j,k}, \alpha), l = x, y, z \tag{5.6.53$'$}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} (u^{\pm}_{mx})^{n}_{i,j,k} &= \pm \frac{2}{\Delta x}[(u'_{m})^{n}_{i\pm1/2,j,k} - (u_{m})^{n}_{i,j,k}] \\ (u'_{m})^{n}_{i\pm1/2,j,k} &= \left| u_{m} + \frac{\Delta t}{2} u_{mt} \right|^{n-1/2}_{i\pm1/2,j,k} \end{aligned}\right\} \tag{5.6.54}$$

$$\left.\begin{aligned} (u^{\pm}_{my})^{n}_{i,j,k} &= \pm \frac{2}{\Delta y}[(u'_{m})^{n}_{i,j\pm1/2,k} - (u_{m})^{n}_{i,j,k}] \\ (u'_{m})^{n}_{i,j\pm1/2,k} &= \left| u_{m} + \frac{\Delta t}{2} u_{mt} \right|^{n-1/2}_{i,j\pm1/2,k} \end{aligned}\right\} \tag{5.6.55}$$

$$\left.\begin{aligned} (u^{\pm}_{mz})^{n}_{i,j,k} &= \pm \frac{2}{\Delta z}[(u'_{m})^{n}_{i,j,k\pm1/2} - (u_{m})^{n}_{i,j,k}] \\ (u'_{m})^{n}_{i,j,k\pm1/2} &= \left| u_{m} + \frac{\Delta t}{2} u_{mt} \right|^{n-1/2}_{i,j,k\pm1/2} \end{aligned}\right\} \tag{5.6.56}$$

离散方程式(5.6.49)和式(5.6.53)就是在上述守恒元和解元划分下得到的三维 Euler 方程的时—空守恒格式[36]。这是一个显格式,它既具有原 CE/SE 格式的优点,如它可严格保证局部及全局范围的时—空统一的物理守恒律得到满足,而且非常简单和便于使用。

采用与上面类似的方法也可以得到一般形式的三维时—空守恒格式,和一般曲线坐标系下的三维时—空守恒格式。此处不再一一列出。

第 6 章　多维问题的差分格式

6.1　半离散化的多维差分格式

对于一些近代的捕捉间断的差分格式，例如 TVD 格式、ENO 格式等而言，它们都是从模型方程（一般是一维标量方程）出发构造出来的。对 TVD 格式，到目前为止，数学上还仅仅对一维标量函数给出总变差的定义，对多维标量函数尚无总变差的定义，故目前也不可能有严格的多维 TVD 格式。另一方面，虽然对一维方程组中的每一个变量函数定义它的总变差，但因方程组是非线性的，无法构造一个格式使得方程组中所有变量函数的总变差同时都不增。所以这里所谓的半离散化的多维 TVD 格式实际上只是将一维标量方程的 TVD 格式在形式上推广到一维方程组和多维空间方程组的情况而已。

为简单和确定起见，以二维 Euler 方程的三阶 ENN 格式为例来说明半离散化的多维差分格式。

6.1.1　任意曲线坐标系(ξ,η)中二维无量纲守恒型的 Euler 方程

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi}+\frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta}=0 \tag{6.1.1}$$

式中

$$\hat{Q}=J^{-1}(\rho,\rho u,\rho v,E_t)^{\mathrm{T}} \tag{6.1.2}$$

$$\hat{E}=J^{-1}(\rho U,\rho uU+\xi_x p,\rho vU+\xi_y p,(E_t+p)U)^{\mathrm{T}} \tag{6.1.3}$$

$$\hat{F}=J^{-1}(\rho V,\rho uV+\eta_x p,\rho vV+\eta_y p,(E_t+p)V)^{\mathrm{T}} \tag{6.1.4}$$

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \tag{6.1.5}$$

$$\left.\begin{aligned} U &= \xi_x u + \xi_y v \\ V &= \eta_x u + \eta_y v \end{aligned}\right\} \tag{6.1.6}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_x &= J y_\eta \\ \xi_y &= -J x_\eta \\ \eta_x &= -J y_\xi \\ \eta_y &= J x_\xi \end{aligned}\right\} \tag{6.1.7}$$

6.1.2 矢通量分裂技术

Jacobian 矩阵 $\hat{\boldsymbol{A}} = \partial \hat{\boldsymbol{E}} / \partial \hat{\boldsymbol{Q}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{B}} = \partial \hat{\boldsymbol{F}} / \partial \hat{\boldsymbol{Q}}$ 的表达式是[1]

$\hat{\boldsymbol{A}}$ 或 $\hat{\boldsymbol{B}}$ =

$$\begin{bmatrix} 0 & K_x & K_y & 0 \\ -u\theta_K + K_x\phi^2 & \theta_K - (\gamma-2)K_x u & K_y u - (\gamma-1)K_x v & (\gamma-1)K_x \\ -v\theta_K + K_y\phi^2 & K_x v - (\gamma-1)K_y u & \theta_K - (\gamma-2)K_y v & (\gamma-1)K_y \\ \theta_K\left[2\phi^2 - \gamma\dfrac{E_t}{\rho}\right] & K_x\dfrac{c^2+\phi^2}{\gamma-1} - (\gamma-1)u\,\theta_K & K_y\dfrac{c^2+\phi^2}{\gamma-1} - (\gamma-1)v\,\theta_K & \gamma\theta_K \end{bmatrix} \tag{6.1.8}$$

式中，$\theta_K \equiv K_x u + K_y v$；$\phi^2 \equiv \dfrac{\gamma-1}{2}(u^2+v^2)$；$K=\xi$ 和 $K=\eta$ 分别对应于矩阵 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{B}}$。

下面分别对矩阵 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{B}}$ 进行相似变换，即

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{R}_\xi \boldsymbol{\Lambda}_\xi \boldsymbol{R}_\xi^{-1} \tag{6.1.9}$$

$$\hat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{R}_\eta \boldsymbol{\Lambda}_\eta \boldsymbol{R}_\eta^{-1} \tag{6.1.10}$$

式中，特征值矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_\xi$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}_\eta$ 的表达式为

$$\boldsymbol{\Lambda}_\xi = \mathrm{diag}[U, U, U + c(\xi_x^2 + \xi_y^2)^{1/2}, U - c(\xi_x^2 + \xi_y^2)^{1/2}] \tag{6.1.11}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_\eta = \mathrm{diag}[V, V, V + c(\eta_x^2 + \eta_y^2)^{1/2}, V - c(\eta_x^2 + \eta_y^2)^{1/2}] \tag{6.1.12}$$

这里

$$\lambda_{\xi}^{(1)} = \lambda_{\xi}^{(2)} = U, \lambda_{\xi}^{(3)} = U + c(\xi_x^2 + \xi_y^2)^{1/2},$$
$$\lambda_{\xi}^{(4)} = U - c(\xi_x^2 + \xi_y^2)^{1/2}$$
$$\lambda_{\eta}^{(1)} = \lambda_{\eta}^{(2)} = V, \lambda_{\eta}^{(3)} = V + c(\eta_x^2 + \eta_y^2)^{1/2},$$
$$\lambda_{\eta}^{(4)} = V - c(\eta_x^2 + \eta_y^2)^{1/2}$$

而左、右特征向量矩阵 $\boldsymbol{R}_K^{-1}$ 和 $\boldsymbol{R}_K$ 分别为

$$\boldsymbol{R}_K^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \phi^2/c^2 & (\gamma-1)u/c^2 & (\gamma-1)v/c^2 & -(\gamma-1)/c^2 \\ -(\widetilde{K}_y u - \widetilde{K}_x v)/\rho & \widetilde{K}_y/\rho & -\widetilde{K}_x/\rho & 0 \\ \beta(\phi^2 - c\tilde{\theta}_K) & \beta[\widetilde{K}_x c - (\gamma-1)u] & \beta[\widetilde{K}_y c - (\gamma-1)v] & \beta(\gamma-1) \\ \beta(\phi^2 + c\tilde{\theta}_K) & -\beta[\widetilde{K}_x c + (\gamma-1)u] & -\beta[\widetilde{K}_y c + (\gamma-1)v] & \beta(\gamma-1) \end{bmatrix} \tag{6.1.13}$$

$$\boldsymbol{R}_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha & \alpha \\ u & \widetilde{K}_y\rho & \alpha(u + \widetilde{K}_x c) & \alpha(u - \widetilde{K}_x c) \\ v & \widetilde{K}_x\rho & \alpha(v + \widetilde{K}_y c) & \alpha(v - \widetilde{K}_y c) \\ \phi^2/(\gamma-1) & \rho(\widetilde{K}_y u - \widetilde{K}_x v) & \alpha\left[\dfrac{\phi^2 + c^2}{(\gamma-1)} + c\tilde{\theta}_K\right] & \alpha\left[\dfrac{\phi^2 + c^2}{(\gamma-1)} - c\tilde{\theta}_K\right] \end{bmatrix} \tag{6.1.14}$$

式中，$\alpha \equiv \rho/(\sqrt{2}c)$，$\beta \equiv 1/(\sqrt{2}\rho c)$，$\tilde{\theta}_K \equiv \widetilde{K}_x u + \widetilde{K}_y v$，$\widetilde{K}_x \equiv K_x/(K_x^2 + K_y^2)^{1/2}$，$\widetilde{K}_y \equiv K_y/(K_x^2 + K_y^2)^{1/2}$

R_ξ 和 R_η 之间存在如下关系

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{R}_\xi^{-1} \cdot \boldsymbol{R}_\eta; \quad \boldsymbol{N}^{-1} = \boldsymbol{R}_\eta^{-1} \cdot \boldsymbol{R}_\xi \tag{6.1.15}$$

式中

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & -m_2/\sqrt{2} & m_2/\sqrt{2} \\ 0 & m_2/\sqrt{2} & (1 + m_1)/2 & (1 - m_1)/2 \\ 0 & -m_2/\sqrt{2} & (1 - m_1)/2 & (1 + m_1)/2 \end{bmatrix} \tag{6.1.16}$$

$$
\boldsymbol{N}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & m_1 & m_2/\sqrt{2} & -m_2/\sqrt{2}\\ 0 & -m_2/\sqrt{2} & (1+m_1)/2 & (1-m_1)/2\\ 0 & m_2/\sqrt{2} & (1-m_1)/2 & (1+m_1)/2\end{bmatrix} \tag{6.1.17}
$$

这里，$m_1\equiv(\tilde{\xi}_x\tilde{\eta}_x+\tilde{\xi}_y\tilde{\eta}_y)$，$m_2\equiv(\tilde{\xi}_x\tilde{\eta}_y-\tilde{\xi}_y\tilde{\eta}_x)$。可见，矩阵 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{N}^{-1}$与流动变量无关。

现在来进行矢通量分裂。

通常首先将 Jacobian 矩阵的特征值 $\lambda_K^{(l)}$ 分裂成两项和的形式

$$
\lambda_K^{(l)}=\lambda_K^{(l)+}+\lambda_K^{(l)-};\quad \lambda_K^{(l)+}\geqslant 0,\quad \lambda_K^{(l)-}\leqslant 0,(l=1,2,3,4) \tag{6.1.18}
$$

这种分裂方法的基本出发点是按物理上信息传播的方向进行分裂，以便构造出与信息传播方向相协调的差分格式。

显然，满足式(6.1.18)的分裂方法有无限多种，这里仅介绍 Steger-Warming 的矢通量分裂法[2]

$$
\lambda_K^{(l)\pm}=(\lambda_K^{(l)}\pm|\lambda_K^{(l)}|)/2 \tag{6.1.19}
$$

这种分裂方法的缺点是在特征值为零处通量分裂不连续可微，它能导致数值解在声速附近有小振荡。为此 Steger 等人进一步将式式(6.1.19)改为

$$
\lambda_K^{(l)\pm}=\frac{\lambda_K^{(l)}\pm(\lambda_K^{(l)^2}+\varepsilon^2)^{1/2}}{2} \tag{6.1.20}
$$

$$
(l=1,2,3,4)
$$

式中 ε 是一个很小的数。于是，分裂后的特征值矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_\xi^\pm$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}_\eta^\pm$ 分别为

$$
\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\Lambda}_\xi^\pm&=\mathrm{diag}(\lambda_\xi^{(1)\pm},\lambda_\xi^{(2)\pm},\lambda_\xi^{(3)\pm},\lambda_\xi^{(4)\pm})\\ \boldsymbol{\Lambda}_\eta^\pm&=\mathrm{diag}(\lambda_\eta^{(1)\pm},\lambda_\eta^{(2)\pm},\lambda_\eta^{(3)\pm},\lambda_\eta^{(4)\pm})\end{aligned}\right\} \tag{6.1.21}
$$

而相应的分裂后的 Jacobian 矩阵 $\hat{\boldsymbol{A}}^\pm$ 和 $\hat{\boldsymbol{B}}^\pm$ 分别为

$$
\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{A}}^\pm&=\boldsymbol{R}_\xi\boldsymbol{\Lambda}_\xi^\pm\boldsymbol{R}_\xi^{-1}\\ \hat{\boldsymbol{B}}^\pm&=\boldsymbol{R}_\eta\boldsymbol{\Lambda}_\eta^\pm\boldsymbol{R}_\eta^{-1}\end{aligned}\right\} \tag{6.1.22}
$$

最终可得相应的分裂后的矢通量 $\hat{E}^{\pm}$ 和 $\hat{F}^{\pm}$ 分别为

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{E}}^{\pm} &= \hat{\boldsymbol{A}}^{\pm}\hat{\boldsymbol{Q}}\\ \hat{\boldsymbol{F}}^{\pm} &= \hat{\boldsymbol{B}}^{\pm}\hat{\boldsymbol{Q}}\end{aligned}\right\} \tag{6.1.23}$$

6.1.3 半离散化的三阶 ENN 格式

将针对一维标量方程构造的三阶 ENN 格式{式(5.3.7),式(5.3.8),式(5.3.23),式(5.3.24)}在形式上推广到二维 Euler 方程的情况,可得如下半离散化的三阶 ENN 格式

$$\left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{Q}}}{\partial t}\right)_{ij} = -\frac{1}{\Delta\xi}\left(\boldsymbol{H}_{i+\frac{1}{2},j} - \boldsymbol{H}_{i-\frac{1}{2},j}\right) - \frac{1}{\Delta\eta}\left(\boldsymbol{K}_{i,j+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{K}_{i,j-\frac{1}{2}}\right) \tag{6.1.24}$$

式中

$$\boldsymbol{H}_{i+\frac{1}{2},j} = \boldsymbol{H}^{+}_{i+\frac{1}{2},j} + \boldsymbol{H}^{-}_{i+\frac{1}{2},j};\quad \boldsymbol{K}_{i,j+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{K}^{+}_{i,j+\frac{1}{2}} + \boldsymbol{K}^{-}_{i,j+\frac{1}{2}} \tag{6.1.25}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}^{+}_{i+\frac{1}{2},j} &= \begin{cases}
\boldsymbol{E}^{+}_{i,j} + \dfrac{1}{2}\Delta\boldsymbol{E}^{+}_{i-\frac{1}{2},j} + \dfrac{1}{3}\mathrm{ms}\Big[\left(\Delta\boldsymbol{E}^{+}_{i+\frac{1}{2},j} - \Delta\boldsymbol{E}^{+}_{i-\frac{1}{2},j}\right), \\
\left(\Delta\boldsymbol{E}^{+}_{i-\frac{1}{2},j} - \Delta\boldsymbol{E}^{+}_{i-\frac{3}{2},j}\right)\Big] \quad \text{当}\left|\Delta\boldsymbol{E}^{+}_{i-\frac{1}{2},j}\right| \leqslant \left|\Delta\boldsymbol{E}^{+}_{i+\frac{1}{2},j}\right| \text{时} \\
\boldsymbol{E}^{+}_{i,j} + \dfrac{1}{2}\Delta\boldsymbol{E}^{+}_{i+\frac{1}{2},j} - \dfrac{1}{6}\mathrm{ms}\Big[\left(\Delta\boldsymbol{E}^{+}_{i+\frac{3}{2},j} - \Delta\boldsymbol{E}^{+}_{i+\frac{1}{2},j}\right), \\
\left(\Delta\boldsymbol{E}^{+}_{i+\frac{1}{2},j} - \Delta\boldsymbol{E}^{+}_{i-\frac{1}{2},j}\right)\Big] \quad \text{当}\left|\Delta\boldsymbol{E}^{+}_{i-\frac{1}{2},j}\right| > \left|\Delta\boldsymbol{E}^{+}_{i+\frac{1}{2},j}\right| \text{时}
\end{cases} \\
\boldsymbol{H}^{-}_{i+\frac{1}{2},j} &= \begin{cases}
\boldsymbol{E}^{-}_{i+1,j} - \dfrac{1}{2}\Delta\boldsymbol{E}_{i+\frac{1}{2},j} - \dfrac{1}{6}\mathrm{ms}\Big[\left(\Delta\boldsymbol{E}^{-}_{i+\frac{3}{2},j} - \Delta\boldsymbol{E}^{-}_{i+\frac{1}{2},j}\right), \\
\left(\Delta\boldsymbol{E}^{-}_{i+\frac{1}{2},j} - \Delta\boldsymbol{E}^{-}_{i-\frac{1}{2},j}\right)\Big] \quad \text{当}\left|\Delta\boldsymbol{E}_{i+\frac{1}{2},j}\right| \leqslant \left|\Delta\boldsymbol{E}^{-}_{i+\frac{3}{2},j}\right| \text{时} \\
\boldsymbol{E}^{-}_{i+1,j} - \dfrac{1}{2}\Delta\boldsymbol{E}^{-}_{i+\frac{3}{2},j} + \dfrac{1}{3}\mathrm{ms}\Big[\left(\Delta\boldsymbol{E}^{-}_{i+\frac{5}{2},j} - \Delta\boldsymbol{E}_{i+\frac{3}{2},j}\right), \\
\left(\Delta\boldsymbol{E}_{i+\frac{3}{2},j} - \Delta\boldsymbol{E}_{i+\frac{1}{2},j}\right)\Big] \quad \text{当}\left|\Delta\boldsymbol{E}^{-}_{i+\frac{1}{2},j}\right| > \left|\Delta\boldsymbol{E}^{-}_{i+\frac{3}{2},j}\right| \text{时}
\end{cases}
\end{aligned} \tag{6.1.26}$$

$$
\boldsymbol{K}^{+}_{i,j+\frac{1}{2}}=\begin{cases}\boldsymbol{F}^{+}_{i,j}+\dfrac{1}{2}\Delta\boldsymbol{F}^{+}_{i,j-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{3}\mathrm{ms}\Big[\left(\Delta\boldsymbol{F}^{+}_{i,j+\frac{1}{2}}-\Delta\boldsymbol{F}^{+}_{i,j-\frac{1}{2}}\right),\\ \left(\Delta\boldsymbol{F}^{+}_{i,j-\frac{1}{2}}-\Delta\boldsymbol{F}^{+}_{i,j-\frac{3}{2}}\right)\Big] \quad 当\left|\Delta\boldsymbol{F}^{+}_{i,j-\frac{1}{2}}\right|\leqslant\left|\Delta\boldsymbol{F}^{+}_{i,j+\frac{1}{2}}\right|时\\ \boldsymbol{F}^{+}_{i,j}+\dfrac{1}{2}\Delta\boldsymbol{F}^{+}_{i,j+\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{6}\mathrm{ms}\Big[\left(\Delta\boldsymbol{F}^{+}_{i,j+\frac{3}{2}}-\Delta\boldsymbol{F}^{+}_{i,j+\frac{1}{2}}\right),\\ \left(\Delta\boldsymbol{F}^{+}_{i,j+\frac{1}{2}}-\Delta\boldsymbol{F}^{+}_{i,j-\frac{1}{2}}\right)\Big] \quad 当\left|\Delta\boldsymbol{F}^{+}_{i,j-\frac{1}{2}}\right|>\left|\Delta\boldsymbol{F}^{+}_{i,j+\frac{1}{2}}\right|时\end{cases}
$$

$$
\boldsymbol{K}^{-}_{i,j+\frac{1}{2}}=\begin{cases}\boldsymbol{F}^{-}_{i,j+1}-\dfrac{1}{2}\Delta\boldsymbol{F}^{-}_{i,j+\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{6}\mathrm{ms}\Big[\left(\Delta\boldsymbol{F}^{-}_{i,j+\frac{3}{2}}-\Delta\boldsymbol{F}^{-}_{i,j+\frac{1}{2}}\right),\\ \left(\Delta\boldsymbol{F}^{-}_{i,j+\frac{1}{2}}-\Delta\boldsymbol{F}^{-}_{i,j-\frac{1}{2}}\right)\Big] \quad 当\left|\Delta\boldsymbol{F}^{-}_{i,j+\frac{1}{2}}\right|\leqslant\left|\Delta\boldsymbol{F}^{-}_{i,j+\frac{3}{2}}\right|时\\ \boldsymbol{F}^{-}_{i,j+1}-\dfrac{1}{2}\Delta\boldsymbol{F}^{-}_{i,j+\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{3}\mathrm{ms}\Big[\left(\Delta\boldsymbol{F}^{-}_{i,j+\frac{5}{2}}-\Delta\boldsymbol{F}^{-}_{i,j+\frac{3}{2}}\right),\\ \left(\Delta\boldsymbol{F}^{-}_{i,j+\frac{3}{2}}-\Delta\boldsymbol{F}^{-}_{i,j+\frac{1}{2}}\right)\Big] \quad 当\left|\Delta\boldsymbol{F}^{-}_{i,j+\frac{1}{2}}\right|>\left|\Delta\boldsymbol{F}^{-}_{i,j+\frac{3}{2}}\right|时\end{cases}
$$

(6.1.27)

式(6.1.24)～式(6.1.27)构成了关于二维 Euler 方程的半离散化的三阶 ENN 格式。

上述半离散格式可改写成

$$
\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{Q}}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{R}(\hat{\boldsymbol{Q}}) \tag{6.1.28}
$$

式中

$$
\hat{\boldsymbol{Q}}=\{\hat{\boldsymbol{Q}}_{ij}\} \tag{6.1.29}
$$

$$
\boldsymbol{R}(\hat{\boldsymbol{Q}})=-\frac{1}{\Delta\xi}\left(\boldsymbol{H}_{i+\frac{1}{2},j}-\boldsymbol{H}_{i-\frac{1}{2},j}\right)-\frac{1}{\Delta\eta}\left(\boldsymbol{K}_{i,j+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{K}_{i,j-\frac{1}{2}}\right) \tag{6.1.30}
$$

式(6.1.28)是关于 $\hat{\boldsymbol{Q}}=\{\hat{\boldsymbol{Q}}_{ij}\}$ 的常微分方程组。

求解常微分方程组的方法可分成显式和隐式两类。显式方法的优点是每一时间步的计算工作量和存储量均较小，且程序编制简单；缺点是其时间步长受到稳定性条件的限制，当局部空间网格间距很小时，时间步长必须非常小致使整个计算的时间步数很多。隐式方法的优点是稳定性条件较松（在线性分析中往往是无条件

稳定的，在实际计算中时间步长亦可取得较大)，从而使整个计算的时间步数较少；缺点则是在每一时间步都要求解线性代数方程组，致使内存占用量及每一时间步的计算工作量都较大。目前使用较多的显式方法是多步 Runge-Kutta 方法；而比较有效的隐式方法有：交替方向隐式法、时间分裂法、隐式近似因式分解方法及 LU 分解方法。

6.2 Runge-Kutta 方法

已经发展了许多数值方法可用以求解常微分方程组的初值问题[3]，例如 Euler 折线法、Adams 外插法、Adams 内插法、Milne 方法、Hamming 算法、Adams 三步四阶预估-校正算法、Runge-Kutta 方法等。其中用得最多的是 Runge-Kutta 方法。

6.2.1 三阶 Runge-Kutta 方法[3]

采用如下步骤将常微分方程组(6.1.28)从时间层(n)数值积分至时间层($n+1$)

$$\left.\begin{aligned}
\hat{Q}^{(0)} &= \hat{Q}^{n} \\
\hat{Q}^{(1)} &= \hat{Q}^{(0)} + \frac{1}{2}\Delta t\boldsymbol{R}^{(0)} \\
\hat{Q}^{(2)} &= \hat{Q}^{(0)} - \Delta t\boldsymbol{R}^{(0)} + 2\Delta t\boldsymbol{R}^{(1)} \\
\hat{Q}^{(3)} &= \hat{Q}^{(0)} + \frac{1}{6}\Delta t\boldsymbol{R}^{(0)} + \frac{2}{3}\Delta t\boldsymbol{R}^{(1)} + \frac{1}{6}\Delta t\boldsymbol{R}^{(2)} \\
\hat{Q}^{n+1} &= \hat{Q}^{(3)}
\end{aligned}\right\} \tag{6.2.1}$$

6.2.2 四阶 Runge-Kutta 方法[3]

采用如下步骤将常微分方程组(6.1.28)从第 n 时间层数值积分到第($n+1$)时间层

$$
\left.\begin{aligned}
\hat{Q}^{(0)} &= \hat{Q}^{n} \\
\hat{Q}^{(1)} &= \hat{Q}^{(0)} + \frac{1}{2}\Delta t \boldsymbol{R}^{(0)} \\
\hat{Q}^{(2)} &= \hat{Q}^{(0)} + \frac{1}{2}\Delta t \boldsymbol{R}^{(1)} \\
\hat{Q}^{(3)} &= \hat{Q}^{(0)} + \Delta t \boldsymbol{R}^{(2)} \\
\hat{Q}^{(4)} &= \hat{Q}^{(0)} + \frac{1}{6}\Delta t \boldsymbol{R}^{(0)} + \frac{1}{3}\Delta t \boldsymbol{R}^{(1)} + \frac{1}{3}\Delta t \boldsymbol{R}^{(2)} + \frac{1}{6}\Delta t \boldsymbol{R}^{(3)} \\
\hat{Q}^{n+1} &= \hat{Q}^{(4)}
\end{aligned}\right\} \tag{6.2.2}
$$

6.2.3 具有 TVD 保持性质的 Runge-Kutta 方法

第 5 章介绍了具有 TVD 性质的半离散的 NND 格式,基本上是 TVD 的半离散 ENO 格式和满足抑制波动原则的半离散的紧致格式。另外,在文献中还可看到一些半离散的 TVD 格式,如 Yee-Roe-Davis 的半离散 TVD 格式等。这些半离散格式都可以看成是常微分方程组,对它进行数值计算还需要对时间 t 作进一步离散。这样得到的全离散格式,有的能够保持差分解的 TVD 性质,有的却不一定能够保持这种性质。前面介绍的三阶和四阶 Runge-Kutta 方法就属于后者。为了使全离散格式具有 TVD 性质,Chi-Wang Shu 和 S. Osher[4,5] 提出了具有 TVD 保持性质的 Runge-Kutta 型的时间离散格式。

今讨论半离散格式

$$
\frac{\mathrm{d}\hat{Q}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{R}(\hat{Q}) \tag{6.2.3}
$$

式中算子 R 是相应于微分方程 $\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} = \mathscr{R}(\hat{Q})$ 中的空间微分算子 $\mathscr{R}$ 的 r 阶离散算子

$$
\boldsymbol{R}(\hat{Q}) = \mathscr{R}(\hat{Q}) + O(\Delta x^{r})
$$

这样,半离散格式(6.2.3)可视为 $\hat{Q} = \{\hat{Q}_j\}$ 的常微分方程组。

今考虑方程式(6.2.3)的一阶 Euler 方法得到的一阶时间离散格式

$$\hat{Q}^{n+1} = \hat{Q}^{n} + \Delta t \boldsymbol{R}(\hat{Q}^{n})$$

其算子形式为

$$\hat{Q}^{n+1} = \boldsymbol{T}(\hat{Q}^{n}) \equiv (\boldsymbol{I} + \Delta t \boldsymbol{R})\hat{Q}^{n} \tag{6.2.4}$$

这里 $\boldsymbol{I}$ 为单位算子。

假定格式(6.2.4)具有 TVD 的性质,即 $\hat{Q}^{n+1}$的总变差不超过 $\hat{Q}^{n}$ 的总变差,$\mathrm{TV}(\hat{Q}^{n+1}) \leqslant \mathrm{TV}(\hat{Q}^{n})$,或者写成

$$\mathrm{TV}(\boldsymbol{T}(\hat{Q})) \leqslant \mathrm{TV}(\hat{Q}),\text{当 } \lambda \leqslant \lambda_0 \text{ 时} \tag{6.2.5}$$

这里 $\lambda = \Delta t / \Delta x$。

现在要求在这基础上构造半离散格式(6.2.3)的 r 阶时间离散格式

$$\hat{Q}^{n+1} = \boldsymbol{S}(\hat{Q}^{n})$$

使得它也具有 TVD 性质

$$\mathrm{TV}(\boldsymbol{S}(\hat{Q})) \leqslant \mathrm{TV}(\hat{Q})$$

Chi-Wang Shu 和 S. Osher 根据上述要求将标准的 Runge-Kutta 型时间离散格式改造成具有 TVD 保持性质的 Runge-Kutta 型时间离散格式,结果如下。

(1) 具有 TVD 保持性质的二阶显式 Runge-Kutta 型时间离散格式为

$$\left.\begin{aligned}
\hat{Q}^{(0)} &= \hat{Q}^{n} \\
\hat{Q}^{(1)} &= \hat{Q}^{(0)} + \Delta t \boldsymbol{R}^{(0)} \\
\hat{Q}^{(2)} &= \hat{Q}^{(0)} + \frac{1}{2}\Delta t \boldsymbol{R}^{(0)} + \frac{1}{2}\Delta t \boldsymbol{R}^{(1)} \\
\hat{Q}^{n+1} &= \hat{Q}^{(2)}
\end{aligned}\right\} \tag{6.2.6}$$

这是一种修正的 Euler 方法。当 $\lambda \leqslant \lambda_0$ 时格式(6.2.6)具有 TVD 保持性质。

(2) 具有 TVD 保持性质的三阶显式 Runge-Kutta 型时间离散格式为

$$
\left.\begin{aligned}
&\hat{Q}^{(0)} = \hat{Q}^{n} \\
&\hat{Q}^{(1)} = \hat{Q}^{(0)} + \Delta t \boldsymbol{R}^{(0)} \\
&\hat{Q}^{(2)} = \hat{Q}^{(0)} + \frac{1}{4}\Delta t \boldsymbol{R}^{(0)} + \frac{1}{4}\Delta t \boldsymbol{R}^{(1)} \\
&\hat{Q}^{(3)} = \hat{Q}^{(0)} + \frac{1}{6}\Delta t \boldsymbol{R}^{(0)} + \frac{1}{6}\Delta t \boldsymbol{R}^{(1)} + \frac{1}{6}\Delta t \boldsymbol{R}^{(2)} \\
&\hat{Q}^{n+1} = \hat{Q}^{(3)}
\end{aligned}\right\} \tag{6.2.7}
$$

6.3 交替方向隐式(ADI)方法

以二维热传导方程为例来讨论多维问题的差分格式

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = b\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{6.3.1}
$$

考虑如下显隐组合格式

$$
u_{ij}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + [r_x\delta_x^2 + r_y\delta_y^2][\theta u_{i,j}^{n+1} + (1-\theta)u_{ij}^{n}] \tag{6.3.2}
$$

$$
0 \leqslant \theta \leqslant 1
$$

式中 $r_x \equiv \dfrac{b\Delta t}{\Delta x^2}, r_y \equiv \dfrac{b\Delta t}{\Delta y^2}$

$$
\delta_x^2 u_{ij} \equiv u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}
$$

$$
\delta_y^2 u_{ij} \equiv u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}
$$

当 $\theta = 0$ 时为显式 FTCS 格式，当 $\theta = \dfrac{1}{2}$ 时为 Crank-Nicolson 格式，当 $\theta = 1$ 时为完全隐式 BTCS 格式。

现应用 Von Neumann 分析方法来讨论格式(6.3.2)的稳定性。令谐波解形式为

$$
u_{ij}^{n} = G^{n} e^{i(K_1 x_i + K_2 y_j)} \tag{6.3.3}
$$

将它代入差分方程式(6.3.2)，经整理后可得差分格式的放大因子为

$$
G = [1 - 4(1-\theta)r]/(1 + 4\theta r) \tag{6.3.4}
$$

式中

$$r = r_x\sin^2\left(\frac{K_1\Delta x}{2}\right) + r_y\sin^2\left(\frac{K_2\Delta y}{2}\right) \qquad (6.3.5)$$

由此可得到稳定性条件如下

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant 1 \text{ 时，无条件稳定}\\&0 \leqslant \theta < \frac{1}{2} \text{ 时，} r_x + r_y \leqslant \frac{1}{2(1-2\theta)}\end{aligned}\right\} \qquad (6.3.6)$$

由此可见，它与第 2 章中关于一维热传导方程的显隐组合格式的稳定性条件很类似。但对于 $\theta = 0$ 时的显式格式而言，若 $\Delta x = \Delta y$，则二维问题中稳定性对时间步长 Δt 的限制比一维问题强一倍。可以证明，对于 n 维扩散方程，若 $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n = h$，则显式 FTCS 格式的稳定性条件是：$\frac{b\Delta t}{h^2} \leqslant \frac{1}{2n}$。它表明问题的维数愈多，则允许的时间步长愈小，从而计算工作量愈大，因此更应该采用隐式格式。

对于 $\theta \geqslant 1/2$ 的隐式格式情况，此时差分格式是无条件稳定的，故可取较大的时间步长。但是对于多维情况，隐格式的求解却困难得多。此时，在每一个时间层上不仅需要求解庞大的代数方程组，而且该方程组已经不再是三对角形的，甚至也不是五对角形的。追赶法已经不再适用，而需采用迭代方法，致使求解代数方程组的运算量将有很大增长。

为此需要构造新的差分格式，希望它满足如下要求：① 无条件稳定；② 有合理的精度；③ 所产生的代数方程组易于求解。

正是在这样的要求下，发展了交替方向隐式方法、时间分裂法、近似因式分解方法和 LU 分解方法。

D. W. Peaceman、H. H. Rachford[6] 和 J. Douglas、H. H. Rachford[7] 提出了交替方向隐式方法。这是一种两步方法。每一步都只对方程的一个空间方向作隐式差分处理。以方程式(6.3.1)为例，交替方向隐式方法被给出如下

$$\bar{u}_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + \frac{1}{2}\left[r_x \delta_x^2 \bar{u}_{i,j}^{n+1} + r_y \delta_y^2 u_{i,j}^{n}\right] \qquad (6.3.7a)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = \bar{u}_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{2}\left[r_x \delta_x^2 \bar{u}_{i,j}^{n+1} + r_y \delta_y^2 u_{i,j}^{n+1}\right] \qquad (6.3.7b)$$

或者写成

$$\left(1 - \frac{1}{2} r_x \delta_x^2\right)\bar{u}_{i,j}^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2} r_y \delta_y^2\right)u_{i,j}^{n} \qquad (6.3.8a)$$

$$\left(1 - \frac{1}{2} r_y \delta_y^2\right)u_{i,j}^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2} r_x \delta_x^2\right)\bar{u}_{i,j}^{n+1} \qquad (6.3.8b)$$

即

$$-\frac{1}{2} r_x \bar{u}_{i-1,j}^{n+1} + (1 + r_x)\bar{u}_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{2} r_x \bar{u}_{i+1,j}^{n+1} =$$

$$\frac{1}{2} r_y u_{i,j+1}^{n} + (1 - r_y) u_{i,j}^{n} + \frac{1}{2} r_y u_{i,j-1}^{n}$$

$$(j = 1,2,\cdots,J-1;\ i = 1,2,\cdots,I-1) \qquad (6.3.9a)$$

$$-\frac{1}{2} r_y u_{i,j-1}^{n+1} + (1 + r_y) u_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{2} r_y u_{i,j+1}^{n+1} =$$

$$\frac{1}{2} r_x \bar{u}_{i-1,j}^{n+1} + (1 - r_x)\bar{u}_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{2} r_x \bar{u}_{i+1,j}^{n+1}$$

$$(i = 1,2,\cdots,I-1;\ j = 1,2,\cdots,J-1) \qquad (6.3.9b)$$

由此可知，ADI 方法分两步来计算。第一步是求解方程组(6.3.9a)，可由 t^n 时间层上各格点处的值 $u_{i,j}^{n}$ 计算出过渡层上各格点处的值 $\bar{u}_{i,j}^{n+1}$；第二步是求解方程组(6.3.9b)，可由 $\bar{u}_{i,j}^{n+1}$ 计算出 t^{n+1} 时间层上各格点处的值 $u_{i,j}^{n+1}$。而且在每一步中，只有一个方向是隐式，因而都只需求解一个三对角形的线性代数方程组。

此格式是无条件稳定的。

应当指出，对于三维问题，交替方向隐式方法并不能由二维问题中那种形式直接推广过来。为了保持交替方向隐式方法的空间二阶精度及无条件稳定的特点，在三维问题中，ADI 格式可表述如下

$$\bar{u}_{i,j,k}^{n+1} = u_{i,j,k}^{n} + \frac{1}{2}\Big\{ r_x \delta_x^2 (\bar{u}_{i,j,k}^{n+1} + u_{i,j,k}^{n}) +$$

$$2r_y\delta_y^2 u_{i,j,k}^n + 2r_z\delta_z^2 u_{i,j,k}^n\Big\} \qquad (6.3.10a)$$

$$\bar{\bar{u}}_{i,j,k}^{n+1} = u_{i,j,k}^n + \frac{1}{2}\Big\{r_x\delta_x^2(\bar{u}_{i,j,k}^{n+1} + u_{i,j,k}^n) +$$

$$r_y\delta_y^2(\bar{\bar{u}}_{i,j,k}^{n+1} + u_{i,j,k}^n) + 2r_z\delta_z^2 u_{i,j,k}^n\Big\} \qquad (6.3.10b)$$

$$u_{i,j,k}^{n+1} = u_{i,j,k}^n + \frac{1}{2}\Big\{r_x\delta_x^2(\bar{u}_{i,j,k}^{n+1} + u_{i,j,k}^n) +$$

$$r_y\delta_y^2(\bar{\bar{u}}_{i,j,k}^{n+1} + u_{i,j,k}^n) + r_2\delta_2^2(u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i,j,k}^n)\Big\} \qquad (6.3.10c)$$

6.4 时间分裂格式(又称分数步格式)

这是 N. N. Yanenko[8]等人提出和发展起来的一种求解多维问题的有效差分格式,称为分数步法,也称算子分裂法或时间分裂格式。其基本思想是将一个差分算法分裂成一系列一维算子。仍以二维热传导方程(6.3.1)为例说明之。

首先将方程(6.3.1)分裂成

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = b\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (6.3.11a) \\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = b\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & (6.3.11b) \end{cases}$$

然后分别构作它们的隐格式,例如分别采用 Crank-Nicolson 格式,并把它们衔接起来成为两步求解过程

$$\frac{1}{2}\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^n}{\frac{1}{2}\Delta t} = b\left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)\delta_x^2\left[\frac{1}{2}\left(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i,j}^n\right)\right]$$

$$(6.3.12a)$$

$$\frac{1}{2}\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\Delta t} = b\left(\frac{1}{\Delta y^2}\right)\delta_y^2\left[\frac{1}{2}\left(u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$(6.3.12b)$$

或改写成

$$\left(I - \frac{1}{2} r_x \delta_x^2\right) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \left(I + \frac{1}{2} r_x \delta_x^2\right) u_{i,j}^{n} \quad (6.3.13a)$$

$$\left(I - \frac{1}{2} r_y \delta_y^2\right) u_{i,j}^{n+1} = \left(I + \frac{1}{2} r_y \delta_y^2\right) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (6.3.13b)$$

它们的离散代数方程组形式是

$$-\frac{1}{2} r_x u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + r_x) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} r_x u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1}{2} r_x u_{i-1,j}^{n} + (1 - r_x) u_{i,j}^{n} + \frac{1}{2} r_x u_{i+1,j}^{n}$$

$$(j = 1,2,\cdots,J-1; i = 1,2,\cdots,I-1) \quad (6.3.13a)$$

$$-\frac{1}{2} r_y u_{i,j-1}^{n+1} + (1 + r_y) u_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{2} r_y u_{i,j+1}^{n+1} =$$

$$\frac{1}{2} r_y u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - r_y) u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} r_y u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}}$$

$$(i = 1,2,\cdots,I-1; j = 1,2,\cdots,J-1) \quad (6.3.13b)$$

与交替方向隐式方法式(6.3.9)相比较，可见在二维情况中，时间分裂格式与 ADI 格式具有相同的矩阵形式和计算量，不同的仅仅是右端已知量采用了不同空间方向的差分离散。

但是在三维情况中，分数步格式要比 ADI 格式简单得多。

易于证明，上述分裂格式是无条件稳定的，并且在空间和时间方向都是二阶精度的。

6.5 隐式近似因式分解方法

在这一节中，将把 Beam-Warming 格式应用于二维 Navier-Stokes 方程，以此来介绍隐式近似因式分解方法。

6.5.1 二维 Navier-Stokes 方程

在 Cartesian 坐标系中，二维可压缩 Navier-Stokes 方程的守恒形式为

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y} = 0 \tag{6.5.1}$$

式中

$$\boldsymbol{Q} = (\rho, \rho u, \rho v, E_t)^{\mathrm{T}} \equiv (q_1, q_2, q_3, q_4)^{\mathrm{T}} \tag{6.5.2}$$

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \frac{2}{3}\mu(2u_x - v_y) \\ \rho uv - \mu(u_y + v_x) \\ (E_t + p)u - \mu v(u_y + v_x) - \frac{2}{3}\mu u(2u_x - v_y) - KT_x \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \tag{6.5.3}$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \mu(u_y + v_x) \\ \rho v^2 + p - \frac{2}{3}\mu(2v_y - u_x) \\ (E_t + p)v - \mu u(u_y + v_x) - \frac{2}{3}\mu v(2v_y - u_x) - KT_y \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \tag{6.5.4}$$

$$p = (\gamma - 1)\left[E_t - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2)\right] \tag{6.5.5}$$

$$T = \frac{\gamma - 1}{R}\left[\frac{E_t}{\rho} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2)\right] \tag{6.5.6}$$

由此可见，$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}_x, \boldsymbol{Q}_y)$，$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}_x, \boldsymbol{Q}_y)$。其中，$\boldsymbol{Q}_x \equiv (q_{1x}, q_{2x}, q_{3x}, q_{4x})^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{Q}_y \equiv (q_{1y}, q_{2y}, q_{3y}, q_{4y})^{\mathrm{T}}$。

6.5.2 二阶格式的建立

我们希望构造时间和空间均为二阶精度的格式。

首先由 Taylor 级数展开易得如下时间方向二阶精度的格式

$$\boldsymbol{Q}^{n+1} = \boldsymbol{Q}^n + \frac{1}{2}\Delta t\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}\right)^n + \left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}\right)^{n+1}\right] + O(\Delta t^3) =$$

$$\boldsymbol{Q}^n - \frac{1}{2}\Delta t\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}\right)^n + \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}\right)^{n+1}\right] -$$

$$\frac{1}{2}\Delta t\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}\right)^{n}+\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}\right)^{n+1}\right]+\mathrm{O}(\Delta t^{3})$$

令

$$\Delta \boldsymbol{E}^{n} \equiv \boldsymbol{E}^{n+1}-\boldsymbol{E}^{n};\quad \Delta \boldsymbol{F}^{n} \equiv \boldsymbol{F}^{n+1}-\boldsymbol{F}^{n} \tag{6.5.7}$$

将式(6.5.7)代入上式可得

$$\boldsymbol{Q}^{n+1}=\boldsymbol{Q}^{n}-\Delta t\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}\right)^{n}-\frac{1}{2}\Delta t\left[\frac{\partial(\Delta \boldsymbol{E})^{n}}{\partial x}+\frac{\partial(\Delta \boldsymbol{F})^{n}}{\partial y}\right]+\mathrm{O}(\Delta t^{3}) \tag{6.5.8}$$

依据复合函数求导公式可得

$$\Delta \boldsymbol{E}^{n}=\boldsymbol{E}^{n+1}-\boldsymbol{E}^{n}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{Q}}\right)^{n}(\boldsymbol{Q}^{n+1}-\boldsymbol{Q}^{n})+\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{Q}_{x}}\right)(\boldsymbol{Q}_{x}^{n+1}-\boldsymbol{Q}_{x}^{n})+\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{Q}_{y}}\right)^{n}(\boldsymbol{Q}_{y}^{n+1}-\boldsymbol{Q}_{y}^{n})+\mathrm{O}(\Delta t^{2})=\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{n}\Delta \boldsymbol{Q}^{n}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^{n}\Delta \boldsymbol{Q}_{x}^{n}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{III}}^{n}\Delta \boldsymbol{Q}_{y}^{n}+\mathrm{O}(\Delta t^{2}) \tag{6.5.9}$$

式中

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{Q}}=\begin{bmatrix} \partial e_1/\partial q_1 & \partial e_1/\partial q_2 & \partial e_1/\partial q_3 & \partial e_1/\partial q_4 \\ \partial e_2/\partial q_1 & \partial e_2/\partial q_2 & \partial e_2/\partial q_3 & \partial e_2/\partial q_4 \\ \partial e_3/\partial q_1 & \partial e_3/\partial q_2 & \partial e_3/\partial q_3 & \partial e_3/\partial q_4 \\ \partial e_4/\partial q_1 & \partial e_4/\partial q_2 & \partial e_4/\partial q_3 & \partial e_4/\partial q_4 \end{bmatrix} \tag{6.5.10}$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{Q}_x}=\begin{bmatrix} \partial e_1/\partial q_{1x} & \partial e_1/\partial q_{2x} & \partial e_1/\partial q_{3x} & \partial e_1/\partial q_{4x} \\ \partial e_2/\partial q_{1x} & \partial e_2/\partial q_{2x} & \partial e_2/\partial q_{3x} & \partial e_2/\partial q_{4x} \\ \partial e_3/\partial q_{1x} & \partial e_3/\partial q_{2x} & \partial e_3/\partial q_{3x} & \partial e_3/\partial q_{4x} \\ \partial e_4/\partial q_{1x} & \partial e_4/\partial q_{2x} & \partial e_4/\partial q_{3x} & \partial e_4/\partial q_{4x} \end{bmatrix} \tag{6.5.11}$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{III}} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{Q}_y}=\begin{bmatrix} \partial e_1/\partial q_{1y} & \partial e_1/\partial q_{2y} & \partial e_1/\partial q_{3y} & \partial e_1/\partial q_{4y} \\ \partial e_2/\partial q_{1y} & \partial e_2/\partial q_{2y} & \partial e_2/\partial q_{3y} & \partial e_2/\partial q_{4y} \\ \partial e_3/\partial q_{1y} & \partial e_3/\partial q_{2y} & \partial e_3/\partial q_{3y} & \partial e_3/\partial q_{4y} \\ \partial e_4/\partial q_{1y} & \partial e_4/\partial q_{2y} & \partial e_4/\partial q_{3y} & \partial e_4/\partial q_{4y} \end{bmatrix} \tag{6.5.12}$$

$$\Delta Q^n \equiv Q^{n+1} - Q^n, \quad \Delta Q_x^n \equiv Q_x^{n+1} - Q_x^n, \quad \Delta Q_y^n \equiv Q_y^{n+1} - Q_y^n \tag{6.5.13}$$

同理可得

$$\Delta F^n = F^{n+1} - F^n = B_{\mathrm{I}}^n \Delta Q^n + B_{\mathrm{II}}^n \Delta Q_x^n + B_{\mathrm{III}}^n \Delta Q_y^n + \mathrm{O}(\Delta t^2) \tag{6.5.14}$$

式中

$$B_{\mathrm{I}} \equiv \frac{\partial F}{\partial Q} = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial q_1 & \partial f_1/\partial q_2 & \partial f_1/\partial q_3 & \partial f_1/\partial q_4 \\ \partial f_2/\partial q_1 & \partial f_2/\partial q_2 & \partial f_2/\partial q_3 & \partial f_2/\partial q_4 \\ \partial f_3/\partial q_1 & \partial f_3/\partial q_2 & \partial f_3/\partial q_3 & \partial f_3/\partial q_4 \\ \partial f_4/\partial q_1 & \partial f_4/\partial q_2 & \partial f_4/\partial q_3 & \partial f_4/\partial q_4 \end{bmatrix} \tag{6.5.15}$$

$$B_{\mathrm{II}} \equiv \frac{\partial F}{\partial Q_x} = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial q_{1x} & \partial f_1/\partial q_{2x} & \partial f_1/\partial q_{3x} & \partial f_1/\partial q_{4x} \\ \partial f_2/\partial q_{1x} & \partial f_2/\partial q_{2x} & \partial f_2/\partial q_{3x} & \partial f_2/\partial q_{4x} \\ \partial f_3/\partial q_{1x} & \partial f_3/\partial q_{2x} & \partial f_3/\partial q_{3x} & \partial f_3/\partial q_{4x} \\ \partial f_4/\partial q_{1x} & \partial f_4/\partial q_{2x} & \partial f_4/\partial q_{3x} & \partial f_4/\partial q_{4x} \end{bmatrix} \tag{6.5.16}$$

$$B_{\mathrm{III}} \equiv \frac{\partial F}{\partial Q_y} = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial q_{1y} & \partial f_1/\partial q_{2y} & \partial f_1/\partial q_{3y} & \partial f_1/\partial q_{4y} \\ \partial f_2/\partial q_{1y} & \partial f_2/\partial q_{2y} & \partial f_2/\partial q_{3y} & \partial f_2/\partial q_{4y} \\ \partial f_3/\partial q_{1y} & \partial f_3/\partial q_{2y} & \partial f_3/\partial q_{3y} & \partial f_3/\partial q_{4y} \\ \partial f_4/\partial q_{1y} & \partial f_4/\partial q_{2y} & \partial f_4/\partial q_{3y} & \partial f_4/\partial q_{4y} \end{bmatrix} \tag{6.5.17}$$

关于矩阵 $A_{\mathrm{I}}, A_{\mathrm{II}}, A_{\mathrm{III}}, B_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{III}}$ 的具体表达式将在本节末尾给出。

由式(6.5.9)和式(6.5.14)分别可得

$$\Delta E^n = \left(A_{\mathrm{I}}^n + A_{\mathrm{II}}^n \frac{\partial}{\partial x} + A_{\mathrm{III}}^n \frac{\partial}{\partial y} \right) \Delta Q^n \tag{6.5.18}$$

$$\Delta \boldsymbol{F}^n = \left(\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^n + \boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^n \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{III}}^n \frac{\partial}{\partial y}\right)\Delta \boldsymbol{Q}^n \qquad (6.5.19)$$

由此可得

$$\frac{\partial(\Delta \boldsymbol{E}^n)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^n + \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^n \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{III}}^n \frac{\partial}{\partial y}\right)\Delta \boldsymbol{Q}^n \qquad (6.5.20)$$

$$\frac{\partial(\Delta \boldsymbol{F}^n)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^n + \boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^n \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{III}}^n \frac{\partial}{\partial y}\right)\Delta \boldsymbol{Q}^n \qquad (6.5.21)$$

将式(6.5.20)和式(6.5.21)代入式(6.5.8)得

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{Q}^n = & -\Delta t\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}\right)^n + \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}\right)^n\right] - \\ & \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial}{\partial x}\left[\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^n + \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^n \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{III}}^n \frac{\partial}{\partial y}\right]\Delta \boldsymbol{Q}^n - \\ & \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial}{\partial y}\left[\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^n + \boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^n \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{III}}^n \frac{\partial}{\partial y}\right]\Delta \boldsymbol{Q}^n\end{aligned} \qquad (6.5.22)$$

即

$$\begin{aligned}&\left[\boldsymbol{I} + \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial}{\partial x}\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^n + \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^n \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{III}}^n \frac{\partial}{\partial y}\right) + \right. \\ &\left. \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial}{\partial y}\left(\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^n + \boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^n \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{III}}^n \frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\Delta \boldsymbol{Q}^n = \\ &\qquad -\Delta t\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}\right)^n + \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}\right)^n\right]\end{aligned} \qquad (6.5.23)$$

若将上式中的空间导数$\frac{\partial}{\partial x}$和$\frac{\partial}{\partial y}$分别用相应的二阶精度的差商近似替代，就得到一个时空均为二阶精度的差分格式。

6.5.3 Beam-Warming 格式

为了使求解简化，希望对式(6.5.23)中的交叉导数项采用显式，而不用隐式，但精度仍保持为二阶。

现将式(6.5.23)中的二项交叉导数项归并在一起，得

$$\frac{1}{2}\Delta t\left[\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}_{\mathrm{III}}^n \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^n \frac{\partial}{\partial x}\right]\Delta \boldsymbol{Q}^n$$

因为

$$\Delta Q^n = \Delta Q^{n-1} + \left(\frac{\partial \Delta Q}{\partial t}\right)^{n-1}\Delta t = \Delta Q^{n-1} + O(\Delta t^2)$$

故精确到二阶精度有

$$\frac{1}{2}\Delta t\left[\frac{\partial}{\partial x}A^n_{\mathrm{III}}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}B^n_{\mathrm{II}}\frac{\partial}{\partial x}\right]\Delta Q^n =$$

$$\frac{1}{2}\Delta t\left[\frac{\partial}{\partial x}A^n_{\mathrm{III}}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}B^n_{\mathrm{II}}\frac{\partial}{\partial x}\right]\Delta Q^{n-1} \qquad (6.5.24)$$

将式(6.5.24)代入式(6.5.23)可得

$$\left[I + \frac{1}{2}\Delta t\left(\frac{\partial}{\partial x}A^n_{\mathrm{I}} + \frac{\partial}{\partial x}A^n_{\mathrm{II}}\frac{\partial}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\Delta t\left(\frac{\partial}{\partial y}B^n_{\mathrm{I}} + \frac{\partial}{\partial y}B^n_{\mathrm{III}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\Delta Q^n =$$

$$-\Delta t\left[\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)^n + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^n\right] -$$

$$\frac{1}{2}\Delta t\left[\frac{\partial}{\partial x}A^n_{\mathrm{III}}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}B^n_{\mathrm{II}}\frac{\partial}{\partial x}\right]\Delta Q^{n-1} \equiv \mathrm{RHS} \qquad (6.5.25)$$

应用近似因式分解方法，在保持二阶精度的前提下，上式可改写为

$$\left[I + \frac{1}{2}\Delta t\left(\frac{\partial}{\partial x}A^n_{\mathrm{I}} + \frac{\partial}{\partial x}A^n_{\mathrm{II}}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\cdot$$

$$\left[I + \frac{1}{2}\Delta t\left(\frac{\partial}{\partial y}B^n_{\mathrm{I}} + \frac{\partial}{\partial y}B^n_{\mathrm{III}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\Delta Q^n = \mathrm{RHS}$$

上式的求解可按如下两步进行

$$\left[I + \frac{1}{2}\Delta t\left(\frac{\partial}{\partial x}A^n_{\mathrm{I}} + \frac{\partial}{\partial x}A^n_{\mathrm{II}}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\Delta Q^* = \mathrm{RHS} \qquad (6.5.26a)$$

$$\left[I + \frac{1}{2}\Delta t\left(\frac{\partial}{\partial y}B^n_{\mathrm{I}} + \frac{\partial}{\partial y}B^n_{\mathrm{III}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\Delta Q^n = \Delta Q^* \qquad (6.5.26b)$$

若上式中的空间导数用相应的二阶精度的空间差商近似替代，就得到了时一空均为二阶精度的 Beam-Warming 两步格式[9]。

6.5.4 矩阵 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}},\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}},\boldsymbol{A}_{\mathrm{III}},\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}},\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}$和 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{III}}$的表达式

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix}(a_{\mathrm{I}})_{11} & (a_{\mathrm{I}})_{12} & (a_{\mathrm{I}})_{13} & (a_{\mathrm{I}})_{14}\\(a_{\mathrm{I}})_{21} & (a_{\mathrm{I}})_{22} & (a_{\mathrm{I}})_{23} & (a_{\mathrm{I}})_{24}\\(a_{\mathrm{I}})_{31} & (a_{\mathrm{I}})_{32} & (a_{\mathrm{I}})_{33} & (a_{\mathrm{I}})_{34}\\(a_{\mathrm{I}})_{41} & (a_{\mathrm{I}})_{42} & (a_{\mathrm{I}})_{43} & (a_{\mathrm{I}})_{44}\end{bmatrix}\tag{6.5.27}$$

其中

$$(a_{\mathrm{I}})_{11}=0,(a_{\mathrm{I}})_{12}=1,(a_{\mathrm{I}})_{13}=0,(a_{\mathrm{I}})_{14}=0$$

$$(a_{\mathrm{I}})_{21}=\frac{\gamma-3}{2}u^2+\frac{\gamma-1}{2}v^2+\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{2}{3}\mu(2u_x-v_y)+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{2}{3}\mu v\rho_y-\frac{4}{3}\mu u\rho_x\right)$$

$$(a_{\mathrm{I}})_{22}=(3-\gamma)u+\frac{4}{3}\mu\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\rho_x$$

$$(a_{\mathrm{I}})_{23}=-(\gamma-1)v-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\rho_y$$

$$(a_{\mathrm{I}})_{24}=\gamma-1$$

$$(a_{\mathrm{I}})_{31}=-uv+\left(\frac{1}{\rho}\right)\mu(u_y+v_x)-\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\mu(u\rho_y+v\rho_x)$$

$$(a_{\mathrm{I}})_{32}=v+\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\mu\rho_y$$

$$(a_{\mathrm{I}})_{33}=u+\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\mu\rho_x$$

$$(a_{\mathrm{I}})_{34}=0$$

$$(a_{\mathrm{I}})_{41}=(\gamma-1)u(u^2+v^2)+\frac{1}{\rho}\left[2\mu v(u_y+v_x)+\frac{4}{3}\mu u(2u_x-v_y)-\gamma E_t u-\frac{2K(\gamma-1)}{R}(uu_x+vv_x)\right]+\frac{1}{\rho^2}\left\{-\frac{1}{3}\mu uv\rho_y-\mu v^2\rho_x-\frac{4}{3}\mu u^2\rho_x+\frac{K(\gamma-1)}{R}\left[(u^2+v^2)\rho_x+(E_t)_x\right]\right\}-$$

$$\frac{1}{\rho^3}\left[\frac{2K(\gamma-1)}{R}E_t\rho_x\right]$$

$$(a_{\mathrm{I}})_{42} = -\frac{\gamma-1}{2}(3u^2+v^2)+\frac{1}{\rho}\left[\gamma E_t+\frac{2}{3}\mu(v_y-2u_x)+\frac{K(\gamma-1)}{R}u_x\right]+\frac{1}{\rho^2}\left[\mu v\rho_y+\frac{4}{3}\mu u\rho_x-\frac{K(\gamma-1)}{R}u\rho_x\right]$$

$$(a_{\mathrm{I}})_{43} = -(\gamma-1)uv+\frac{1}{\rho}\left[\frac{K(\gamma-1)}{R}v_x-\mu(u_y+v_x)\right]+\frac{1}{\rho^2}\left[-\frac{2}{3}\mu u\rho_y+\mu v\rho_x-\frac{K(\gamma-1)}{R}v\rho_x\right]$$

$$(a_{\mathrm{I}})_{44} = \gamma u+\frac{K(\gamma-1)}{R}\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\rho_x$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} (a_{\mathrm{II}})_{11} & (a_{\mathrm{II}})_{12} & (a_{\mathrm{II}})_{13} & (a_{\mathrm{II}})_{14} \\ (a_{\mathrm{II}})_{21} & (a_{\mathrm{II}})_{22} & (a_{\mathrm{II}})_{23} & (a_{\mathrm{II}})_{24} \\ (a_{\mathrm{II}})_{31} & (a_{\mathrm{II}})_{32} & (a_{\mathrm{II}})_{33} & (a_{\mathrm{II}})_{34} \\ (a_{\mathrm{II}})_{41} & (a_{\mathrm{II}})_{42} & (a_{\mathrm{II}})_{43} & (a_{\mathrm{II}})_{44} \end{bmatrix} \tag{7.5.28}$$

式中

$$(a_{\mathrm{II}})_{11}=0,(a_{\mathrm{II}})_{12}=0,(a_{\mathrm{II}})_{13}=0,(a_{\mathrm{II}})_{14}=0$$

$$(a_{\mathrm{II}})_{21}=\frac{4}{3}\mu\left(\frac{u}{\rho}\right),(a_{\mathrm{II}})_{22}=-\frac{4}{3}\mu\left(\frac{1}{\rho}\right),(a_{\mathrm{II}})_{23}=0,(a_{\mathrm{II}})_{24}=0$$

$$(a_{\mathrm{II}})_{31}=\mu\left(\frac{v}{\rho}\right),(a_{\mathrm{II}})_{32}=0,(a_{\mathrm{II}})_{33}=-\mu\left(\frac{1}{\rho}\right),(a_{\mathrm{II}})_{34}=0$$

$$(a_{\mathrm{II}})_{41}=\frac{1}{\rho}\left[\mu\left(v^2+\frac{4}{3}u^2\right)-\frac{K(\gamma-1)}{R}(u^2+v^2)\right]+\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\frac{K(\gamma-1)}{R}E_t$$

$$(a_{\mathrm{II}})_{42}=\frac{u}{\rho}\left[\frac{K(\gamma-1)}{R}-\frac{4}{3}\mu\right],$$

$$(a_{\mathrm{II}})_{43}=\frac{v}{\rho}\left[\frac{K(\gamma-1)}{R}-\mu\right],\quad (a_{\mathrm{II}})_{44}=-\frac{K(\gamma-1)}{R}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$A_{\text{III}} = \begin{bmatrix} (a_{\text{III}})_{11} & (a_{\text{III}})_{12} & (a_{\text{III}})_{13} & (a_{\text{III}})_{14} \\ (a_{\text{III}})_{21} & (a_{\text{III}})_{22} & (a_{\text{III}})_{23} & (a_{\text{III}})_{24} \\ (a_{\text{III}})_{31} & (a_{\text{III}})_{32} & (a_{\text{III}})_{33} & (a_{\text{III}})_{34} \\ (a_{\text{III}})_{41} & (a_{\text{III}})_{42} & (a_{\text{III}})_{43} & (a_{\text{III}})_{44} \end{bmatrix} \tag{6.5.29}$$

式中

$(a_{\text{III}})_{11}=0,(a_{\text{III}})_{12}=0,(a_{\text{III}})_{13}=0,(a_{\text{III}})_{14}=0$

$(a_{\text{III}})_{21}=-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{v}{\rho}\right),(a_{\text{III}})_{22}=0,(a_{\text{III}})_{23}=\frac{2}{3}\mu\left(\frac{1}{\rho}\right),(a_{\text{III}})_{2,4}=0$

$(a_{\text{III}})_{31}=\mu\left(\frac{u}{\rho}\right),(a_{\text{III}})_{32}=-\frac{\mu}{\rho},(a_{\text{III}})_{33}=0,(a_{\text{III}})_{34}=0$

$(a_{\text{III}})_{41}=\frac{1}{3}\mu\left(\frac{1}{\rho}\right)uv,\qquad (a_{\text{III}})_{42}=-\mu\left(\frac{v}{\rho}\right)$

$(a_{\text{III}})_{43}=\frac{2}{3}\mu\left(\frac{u}{\rho}\right),(a_{\text{III}})_{44}=0$

$$B_{\text{I}} = \begin{bmatrix} (b_{\text{I}})_{11} & (b_{\text{I}})_{12} & (b_{\text{I}})_{13} & (b_{\text{I}})_{14} \\ (b_{\text{I}})_{21} & (b_{\text{I}})_{22} & (b_{\text{I}})_{23} & (b_{\text{I}})_{24} \\ (b_{\text{I}})_{31} & (b_{\text{I}})_{32} & (b_{\text{I}})_{33} & (b_{\text{I}})_{34} \\ (b_{\text{I}})_{41} & (b_{\text{I}})_{42} & (b_{\text{I}})_{43} & (b_{\text{I}})_{44} \end{bmatrix} \tag{7.5.30}$$

式中

$(b_{\text{I}})_{11}=0,(b_{\text{I}})_{12}=0,(b_{\text{I}})_{13}=1,(b_{\text{I}})_{14}=0$

$(b_{\text{I}})_{21}=-uv+\left(\frac{1}{\rho}\right)\mu(u_y+v_x)-\left(\frac{\mu}{\rho^2}\right)(u\rho_y+v\rho_x)$

$(b_{\text{I}})_{22}=v+\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\mu\rho_y$

$(b_{\text{I}})_{23}=u+\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\mu\rho_x$

$(b_{\text{I}})_{24}=0$

$(b_{\text{I}})_{31}=\frac{\gamma-3}{2}v^2+\frac{\gamma-1}{2}u^2+\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{2}{3}\mu(2v_y-u_x)+$

$\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{2}{3}\mu u\rho_x-\frac{4}{3}\mu v\rho_y\right)$

$$(b_{\mathrm{I}})_{32} = -(\gamma-1)u - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\rho_x$$

$$(b_{\mathrm{I}})_{33} = (3-\gamma)v + \frac{4}{3}\mu\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\rho_y$$

$$(b_{\mathrm{I}})_{34} = \gamma - 1$$

$$\begin{aligned}(b_{\mathrm{I}})_{41} = {} & (\gamma-1)v(u^2+v^2) + \frac{1}{\rho}\Big[2\mu u(v_x+u_y) + \\ & \frac{4}{3}\mu v(2v_y-u_x) - \gamma E_t v - \frac{2K(\gamma-1)}{R}(uu_y+vv_y)\Big] + \\ & \frac{1}{\rho^2}\Big\{-\frac{1}{3}\mu uv\rho_x - \mu u^2\rho_y - \frac{4}{3}\mu v^2\rho_y + \\ & \frac{K(\gamma-1)}{R}[(u^2+v^2)\rho_y + (E_t)_y]\Big\} - \\ & \frac{1}{\rho^3}\Big[\frac{2K(\gamma-1)}{R}E_t\rho_y\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b_{\mathrm{I}})_{42} = {} & -(\gamma-1)uv + \frac{1}{\rho}\Big[\frac{K(\gamma-1)}{R}u_y - \mu(u_y+v_x)\Big] + \\ & \frac{1}{\rho^2}\Big[-\frac{2}{3}\mu v\rho_x + \mu u\rho_y - \frac{K(\gamma-1)}{R}u\rho_y\Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b_{\mathrm{I}})_{43} = {} & -\frac{\gamma-1}{2}(u^2+3v^2) + \frac{1}{\rho}\Big[\gamma E_t + \frac{2}{3}\mu(u_x-2v_y) + \\ & \frac{K(\gamma-1)}{R}v_y\Big] + \frac{1}{\rho^2}\Big[\mu u\rho_x + \frac{4}{3}\mu v\rho_y - \frac{K(\gamma-1)}{R}v\rho_y\Big]\end{aligned}$$

$$(b_{\mathrm{I}})_{44} = \gamma v + \frac{K(\gamma-1)}{R}\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\rho_y$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix}(b_{\mathrm{II}})_{11} & (b_{\mathrm{II}})_{12} & (b_{\mathrm{II}})_{13} & (b_{\mathrm{II}})_{14} \\ (b_{\mathrm{II}})_{21} & (b_{\mathrm{II}})_{22} & (b_{\mathrm{II}})_{23} & (b_{\mathrm{II}})_{24} \\ (b_{\mathrm{II}})_{31} & (b_{\mathrm{II}})_{32} & (b_{\mathrm{II}})_{33} & (b_{\mathrm{II}})_{34} \\ (b_{\mathrm{II}})_{41} & (b_{\mathrm{II}})_{42} & (b_{\mathrm{II}})_{43} & (b_{\mathrm{II}})_{44}\end{bmatrix} \tag{6.5.31}$$

式中

$(b_{\mathrm{II}})_{11}=0, (b_{\mathrm{II}})_{12}=0, (b_{\mathrm{II}})_{13}=0, (b_{\mathrm{II}})_{14}=0$

$(b_{\mathrm{II}})_{21}=\mu\left(\dfrac{v}{\rho}\right),(b_{\mathrm{II}})_{22}=0,(b_{\mathrm{II}})_{23}=-\mu\left(\dfrac{1}{\rho}\right),(b_{\mathrm{II}})_{24}=0$

$(b_{\mathrm{II}})_{31}=-\dfrac{2}{3}\mu\left(\dfrac{u}{\rho}\right),(b_{\mathrm{II}})_{32}=\dfrac{2}{3}\mu\left(\dfrac{1}{\rho}\right),$

$(b_{\mathrm{II}})_{33}=0,(b_{\mathrm{II}})_{34}=0$

$(b_{\mathrm{II}})_{41}=\dfrac{1}{3}\mu\left(\dfrac{1}{\rho}\right)uv,\qquad (b_{\mathrm{II}})_{42}=\dfrac{2}{3}\mu\left(\dfrac{v}{\rho}\right)$

$(b_{\mathrm{II}})_{43}=-\mu\left(\dfrac{u}{\rho}\right),\qquad (b_{\mathrm{II}})_{44}=0$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{III}}=\begin{bmatrix}(b_{\mathrm{III}})_{11} & (b_{\mathrm{III}})_{12} & (b_{\mathrm{III}})_{13} & (b_{\mathrm{III}})_{14}\\(b_{\mathrm{III}})_{21} & (b_{\mathrm{III}})_{22} & (b_{\mathrm{III}})_{23} & (b_{\mathrm{III}})_{24}\\(b_{\mathrm{III}})_{31} & (b_{\mathrm{III}})_{32} & (b_{\mathrm{III}})_{33} & (b_{\mathrm{III}})_{34}\\(b_{\mathrm{III}})_{41} & (b_{\mathrm{III}})_{42} & (b_{\mathrm{III}})_{43} & (b_{\mathrm{III}})_{44}\end{bmatrix} \tag{6.5.32}$$

式中

$(b_{\mathrm{III}})_{11}=0,(b_{\mathrm{III}})_{12}=0,(b_{\mathrm{III}})_{13}=0,(b_{\mathrm{III}})_{14}=0$

$(b_{\mathrm{III}})_{21}=\mu\left(\dfrac{u}{\rho}\right),(b_{\mathrm{III}})_{22}=-\mu\left(\dfrac{1}{\rho}\right),(b_{\mathrm{III}})_{23}=0,(b_{\mathrm{III}})_{24}=0$

$(b_{\mathrm{III}})_{31}=\dfrac{4}{3}\mu\left(\dfrac{v}{\rho}\right),(b_{\mathrm{III}})_{32}=0,(b_{\mathrm{III}})_{33}=-\dfrac{4}{3}\mu\left(\dfrac{1}{\rho}\right),(b_{\mathrm{III}})_{34}=0$

$$(b_{\mathrm{III}})_{41}=\frac{1}{\rho}\left[\mu\left(u^2+\frac{4}{3}v^2\right)-\frac{K(\gamma-1)}{R}(u^2+v^2)\right]+\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\frac{K(\gamma-1)}{R}E_t$$

$(b_{\mathrm{III}})_{42}=\dfrac{u}{\rho}\left[\dfrac{K(\gamma-1)}{R}-\mu\right],(b_{\mathrm{III}})_{43}=\dfrac{v}{\rho}\left[\dfrac{K(\gamma-1)}{R}-\dfrac{4}{3}\mu\right]$

$(b_{\mathrm{III}})_{44}=-\dfrac{K(\gamma-1)}{R}\left(\dfrac{1}{\rho}\right)$

6.6 近似LU分解方法

对于求解Euler方程或Navier-Stokes方程而言，前面讲过的交替方向隐式方法、分数步方法、隐式近似因式分解方法都需要沿

每一个空间坐标方向求解一个块三(多)对角方程组，特别是对于三维问题要三次扫过求解域，包含了数目非常多的块矩阵(对于二维问题是 4×4 矩阵，而对于三维问题是 5×5 矩阵)的求逆运算，要花费相当大的计算工作量。另一方面，线性稳定性分析表明，交替方向隐式方法和隐式近似因式分解方法在二维问题中是无条件稳定的，但在三维问题中则是无条件不稳定的。

另一种隐式解法是 LU 分解方法，它对任何维数空间问题都是稳定的。此种隐式解法已经被证明对于跨声速流动和直至 $Ma=20$ 的高速流动的求解是有效的。

下面，以二维可压缩 Navier-Stokes 方程的一种有限差分格式为例来介绍近似 LU 分解方法。

在 Cartesion 坐标系中，二维可压缩 Navier -Stokes 方程可表示为

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}=\frac{\partial \boldsymbol{E}_v}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}_v}{\partial y} \tag{6.6.1}$$

式中

$$\boldsymbol{Q}=(\rho, \rho u, \rho v, E_t)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{E}=[\rho u, \rho u^2+p, \rho v u, u(E_t+p)]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{F}=[\rho v, \rho u v, \rho v^2+\rho, v(E_t+p)]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{E}_v=\left(0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, u\tau_{xx}+v\tau_{xy}+K\frac{\partial T}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{F}_v=\left(0, \tau_{xy}, \tau_{yy}, u\tau_{xy}+v\tau_{yy}+K\frac{\partial T}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\tau_{xx}=2\mu u_x-\frac{2}{3}\mu(u_x+v_y)$$

$$\tau_{xy}=\mu(u_y+v_x)$$

$$\tau_{yy}=2\mu v_y-\frac{2}{3}\mu(u_x+v_y)$$

关于方程(6.6.1)的一个典型的显、隐组合格式是

$$\boldsymbol{Q}_{i,j}^{n+1}=\boldsymbol{Q}_{i,j}^{n}-\theta\Delta t[\boldsymbol{D}_x\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Q}_{i,j}^{n+1})+\boldsymbol{D}_y\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q}_{i,j}^{n+1})]-$$

$$(1-\theta)\Delta t[\boldsymbol{D}_x\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Q}_{i,j}^n)+\boldsymbol{D}_y\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q}_{i,j}^n)]+$$
$$\Delta t[\boldsymbol{D}_x\boldsymbol{E}_v(\boldsymbol{Q}_{i,j}^n)+\boldsymbol{D}_y\boldsymbol{E}_v(\boldsymbol{Q}_{i,j}^n)] \tag{6.6.2}$$

这里，$\boldsymbol{D}_x$ 和 $\boldsymbol{D}_y$ 分别是逼近 $\partial/\partial x$ 和 $\partial/\partial y$ 的中心差分算子。该格式的基本思想是对无黏项采用显、隐组合格式，而对黏性项则采用显式格式。

式(6.6.2)是一个高度非线性的代数方程组，求解十分困难、费时。为此，将无黏通量 E 和 F 作线化处理。为简洁起见，以下暂将下标 i,j 省略。

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}^{n+1}&=\boldsymbol{E}^n+\boldsymbol{A}^n\Delta\boldsymbol{Q}^n+\mathrm{O}(\|\Delta\boldsymbol{Q}\|^2)\\ \boldsymbol{F}^{n+1}&=\boldsymbol{F}^n+\boldsymbol{B}^n\Delta\boldsymbol{Q}^n+\mathrm{O}(\|\Delta\boldsymbol{Q}\|^2)\end{aligned}\right\} \tag{6.6.3}$$

式中
$$\boldsymbol{A}\equiv\partial\boldsymbol{E}/\partial\boldsymbol{Q},\boldsymbol{B}\equiv\partial\boldsymbol{F}/\partial\boldsymbol{Q} \tag{6.6.4}$$

将式(6.6.3)、式(6.6.4)代入式(6.6.2)，并忽略二阶和高阶小量可得

$$[\boldsymbol{I}+\theta\Delta t(\boldsymbol{D}_x\boldsymbol{A}^n+\boldsymbol{D}_y\boldsymbol{B}^n)]\Delta\boldsymbol{Q}^n+\Delta t\boldsymbol{R}=0 \tag{6.6.5}$$

式中

$$\boldsymbol{R}\equiv\boldsymbol{D}_x\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Q}^n)+\boldsymbol{D}_y\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q}^n)-$$
$$\boldsymbol{D}_x\boldsymbol{E}_v(\boldsymbol{Q}^n)-\boldsymbol{D}_y\boldsymbol{F}_v(\boldsymbol{Q}^n) \tag{6.6.6}$$

式中 $\boldsymbol{R}$ 称为余量，它由第 n 时间层的解 $\boldsymbol{Q}^n$ 决定，故是已知的。

式(6.6.5)是一个线性代数方程组。当 $\theta=1/2$ 时，该格式在时间方向为二阶精度，否则在时间方向是一阶精度的。

对于差分方程式(6.6.5)作如下两点说明。

(1) 该方程组中的未知量是 $\Delta\boldsymbol{Q}_{i,j}^n$，因此称为增量形式的差分方程。对于定常状态问题而言，若采用此种增量形式的差分方程，则其隐式部分的离散只影响收敛的过程，而对于收敛了的定常解的性状(精度、分辨率等)是没有影响的。影响定常解性状的是其显式部分($\Delta t\boldsymbol{R}$)的离散方法。根据上述分析，人们往往对显式部分采用高精度、高分辨率差分格式(如 NND 格式、TVD 格式、ENN 格式、ENO 格式等)；而对隐式部分的离散，着重考虑的是如何加速收敛过程和节省求解代数方程组的时间耗费，而不是精度。

(2) 式(6.6.5)虽然是一个线性代数方程组，但是它导致一个非常宽的带状块矩阵，其求逆需要花费大量的运算时间并且要求很大的存储量。

下面着重介绍一种求解代数方程组(6.6.5)的方法——下/上对称逐次超松弛(LU-SSOR)格式[10]，它既能节省求解代数方程组(6.6.5)的时间耗费和需要的存储量，又能达到加速收敛过程的目的。

若 $\theta=1$，在 $\Delta t\to\infty$ 的极限情况中，格式(6.6.5)退化为 Newton 迭代

$$(\boldsymbol{D}_x\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}_y\boldsymbol{B})\Delta\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R}=0 \tag{6.6.7}$$

今将方程式(6.6.7)中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 按其正、负特征值进行分裂，并采用迎风格式，可得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{D}_x^-\boldsymbol{A}^+ + \boldsymbol{D}_x^+\boldsymbol{A}^- + \boldsymbol{D}_y^-\boldsymbol{B}^+ +\\ \boldsymbol{D}_y^+\boldsymbol{B}^-)\Delta\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R}=0\end{aligned} \tag{6.6.8}$$

这里，D_x^- 和 D_y^- 是后向差分算子，D_x^+ 和 D_y^+ 是前向差分算子。对于定常流计算，采用两点算子。这样做的好处是加强了此代数方程组的系数矩阵的对角占优。其中

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A}^\pm &= \boldsymbol{R}_A\boldsymbol{\Lambda}_A^\pm\boldsymbol{L}_A\\ \boldsymbol{B}^\pm &= \boldsymbol{R}_B\boldsymbol{\Lambda}_B^\pm\boldsymbol{L}_B\end{aligned}\right\} \tag{6.6.9}$$

这里，$\boldsymbol{L}_A$ 和 $\boldsymbol{L}_B$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的左特征向量矩阵，而 $\boldsymbol{R}_A$ 和 $\boldsymbol{R}_B$ 则分别是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的右特征向量矩阵。$\boldsymbol{\Lambda}_A^+$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}_B^+$ 是元素为非负值的对角矩阵，而 $\boldsymbol{\Lambda}_A^-$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}_B^-$ 则是元素为非正值的对角矩阵，并且

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\Lambda}_A &= \boldsymbol{\Lambda}_A^+ + \boldsymbol{\Lambda}_A^-\\ \boldsymbol{\Lambda}_B &= \boldsymbol{\Lambda}_B^+ + \boldsymbol{\Lambda}_B^-\end{aligned}\right\} \tag{6.6.10}$$

显然，满足上述要求的矩阵分裂方法并不是惟一的，而可以有很多不同的分裂方法。今采用如下分裂方法，可使代数方程组的求解得到很大简化

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A}_A^{\pm} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}_A \pm r_A \boldsymbol{I}) \\ \boldsymbol{A}_B^{\pm} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}_B \pm r_B \boldsymbol{I}) \end{aligned}\right\} \tag{6.6.11}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} r_A &= K_A \max(|\lambda_{A1}|, |\lambda_{A2}|, |\lambda_{A3}|, |\lambda_{A4}|) \\ r_B &= K_B \max(|\lambda_{B1}|, |\lambda_{B2}|, |\lambda_{B3}|, |\lambda_{B4}|) \end{aligned}\right\} \tag{6.6.12}$$

这里，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，K_A 和 K_B 均为大于 1 的常数。

在任一网格点(i,j)处，差分方程式(6.6.8)可表示为

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}_{i,j}^{+}\Delta\boldsymbol{Q}_{i,j} - \boldsymbol{A}_{i-1,j}^{-}\Delta\boldsymbol{Q}_{i-1,j} + \boldsymbol{A}_{i+1,j}\Delta\boldsymbol{Q}_{i+1,j} - \\ &\boldsymbol{A}_{i,j}\Delta\boldsymbol{Q}_{i,j} + \boldsymbol{B}_{i,j}^{-}\Delta\boldsymbol{Q}_{i,j} - \boldsymbol{B}_{i,j-1}^{+}\Delta\boldsymbol{Q}_{i,j-1} + \\ &\boldsymbol{B}_{i,j+1}^{-}\Delta\boldsymbol{Q}_{i,j+1} - \boldsymbol{B}_{i,j}\Delta\boldsymbol{Q}_{i,j} + \boldsymbol{R}_{i,j} = 0 \end{aligned} \tag{6.6.13}$$

现在设计如下一种两步方法来求解代数方程组(6.6.13)。第一步求解如下代数方程组

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{A}_{i,j}^{+} - \boldsymbol{A}_{i,j}^{-})\Delta\boldsymbol{Q}_{i,j}^{*} - \boldsymbol{A}_{i-1,j}^{+}\Delta\boldsymbol{Q}_{i-1,j}^{*} + \\ &(\boldsymbol{B}_{i,j}^{+} - \boldsymbol{B}_{i,j}^{-})\Delta\boldsymbol{Q}_{i,j}^{*} - \boldsymbol{B}_{i,j-1}^{+}\Delta\boldsymbol{Q}_{i,j-1}^{*} + \boldsymbol{R}_{ij} = 0 \end{aligned} \tag{6.6.14}$$

其求解过程是一个向前扫过求解域的过程。所求出的是中间值$\Delta Q_{i,j}^{*}$。

第二步求解如下代数方程组

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{A}_{i,j}^{+} - \boldsymbol{A}_{i,j}^{-})\Delta\boldsymbol{Q}_{i,j} + \boldsymbol{A}_{i+1,j}^{-}\Delta\boldsymbol{Q}_{i+1,j} - \\ &\boldsymbol{A}_{i-1,j}^{+}\Delta\boldsymbol{Q}_{i-1,j}^{*} + (\boldsymbol{B}_{i,j}^{+} - \boldsymbol{B}_{i,j}^{-})\Delta\boldsymbol{Q}_{i,j} + \\ &\boldsymbol{B}_{i,j+1}^{-}\Delta\boldsymbol{Q}_{i,j+1} - \boldsymbol{B}_{i,j-1}^{+}\Delta\boldsymbol{Q}_{i,j-1}^{*} + \boldsymbol{R}_{ij} = 0 \end{aligned} \tag{6.6.15}$$

其求解过程是一个向后扫过求解域的过程。所求出的是真正需要的值 $\Delta\boldsymbol{Q}_{i,j}$。

从式(6.6.15)中减去式(6.6.14)可得

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{A}_{i,j}^{+} - \boldsymbol{A}_{i,j}^{-})\Delta\boldsymbol{Q}_{i,j} + \boldsymbol{A}_{i+1,j}^{-}\Delta\boldsymbol{Q}_{i+1,j} + \\ &(\boldsymbol{B}_{i,j}^{+} - \boldsymbol{B}_{i,j}^{-})\Delta\boldsymbol{Q}_{i,j} + \boldsymbol{B}_{i,j+1}^{-}\Delta\boldsymbol{Q}_{i,j+1} = \end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{A}^{+}_{i,j} - \boldsymbol{A}_{i,j})\Delta \boldsymbol{Q}^{*}_{i,j} + (\boldsymbol{B}^{-}_{i,j} - \boldsymbol{B}_{i,j})\Delta \boldsymbol{Q}^{*}_{i,j} \quad (6.6.16)$$

它可被写成(略去下标 i,j)

$$(\boldsymbol{D}_x^{+}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{D}_y^{-}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}^{+} + \boldsymbol{B}^{+})\Delta \boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{A}^{-} + \boldsymbol{B}^{+} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^{-})\Delta \boldsymbol{Q}^{*} \quad (6.6.17)$$

又由式(6.6.14)知

$$(\boldsymbol{D}_x^{-}\boldsymbol{A}^{+} + \boldsymbol{D}_y\boldsymbol{B}^{+} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})\Delta \boldsymbol{Q}^{*} = -\boldsymbol{R} \quad (6.6.18)$$

由此可得

$$\Delta \boldsymbol{Q}^{*} = (\boldsymbol{D}_x^{-}\boldsymbol{A}^{+} + \boldsymbol{D}_y\boldsymbol{B}^{+} - \boldsymbol{A}^{-} - \boldsymbol{B}^{-})^{-1}(-\boldsymbol{R}) \quad (6.6.19)$$

将式(6.6.19)代入式(6.6.17),并考虑到式(6.6.9)和式(6.6.11)及式(6.6.6)可得

$$(\boldsymbol{D}_x^{-}\boldsymbol{A}^{+} + \boldsymbol{D}_y\boldsymbol{B}^{+} - \boldsymbol{A}^{-} - \boldsymbol{B})(\boldsymbol{D}_x^{+}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{D}_y^{-}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}^{+} + \boldsymbol{B}^{+})\Delta \boldsymbol{Q}_{i,j} = -(r_A + r_B)(\boldsymbol{D}_x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{D}_y\boldsymbol{F} - \boldsymbol{D}_x\boldsymbol{E}_v - \boldsymbol{D}_y\boldsymbol{F}_v) \quad (6.6.20)$$

这就是关于近似 Newton 迭代的 LU-SSOR 格式。它的求解过程可归结为如下两步。

第一步求解

$$(\boldsymbol{D}_x\boldsymbol{A}^{+} + \boldsymbol{D}_y\boldsymbol{B}^{+} - \boldsymbol{A}^{-} - \boldsymbol{B}^{-})\Delta \boldsymbol{Q}^{*}_{i,j} = -(r_A + r_B)(\boldsymbol{D}_x\boldsymbol{E} + \boldsymbol{D}_y\boldsymbol{F} - \boldsymbol{D}_x\boldsymbol{E}_v - \boldsymbol{D}_y\boldsymbol{F}_v) \quad (6.6.21)$$

即

$$(r_A + r_B)\Delta \boldsymbol{Q}^{*}_{i,j} = \boldsymbol{A}^{-}_{i-1,j}\Delta \boldsymbol{Q}^{*}_{i-1,j} + \boldsymbol{B}^{+}_{i,j-1}\Delta \boldsymbol{Q}^{*}_{i,j-1} - (r_A + r_B)\boldsymbol{R}_{i,j}$$

显然,其求解是一个向前扫描过程,且不需进行矩阵求逆运算。

第二步求解

$$(\boldsymbol{D}_x^{-}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{D}_y^{+}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}^{+} + \boldsymbol{B}^{-})\Delta \boldsymbol{Q}_{i,j} = \Delta \boldsymbol{Q}^{*}_{i,j} \quad (6.6.22)$$

即

$$(r_A + r_B)\Delta \boldsymbol{Q}_{i,j} = \Delta \boldsymbol{Q}^{*}_{i,j} - \boldsymbol{A}_{i-1,j}\Delta \boldsymbol{Q}_{i-1,j} - \boldsymbol{B}_{i,j-1}\Delta \boldsymbol{Q}_{i,j+1}$$

显然,其求解是一个向后扫描的过程,而且也不需进行矩阵求逆运算。

应该说明的是，使用上述 LU-SSOR 格式来求解带激波的二维可压缩黏性流动时，为了抑制光滑区数值解的奇偶失联振荡和激波附近的非物理振荡，必须在式(6.6.6)定义的余量 R 中附加适当的人工黏性项，例如令

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{D}_x(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_v) + \boldsymbol{D}_y(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}_v) - \epsilon_x^{(2)}\boldsymbol{D}_x^2\boldsymbol{Q} + \epsilon_x^{(4)}\boldsymbol{D}_x^4\boldsymbol{Q} - \epsilon_y^{(2)}\boldsymbol{D}_y^2\boldsymbol{Q} + \epsilon_y^{(4)}\boldsymbol{D}_y^4\boldsymbol{Q}$$

其中 D^2 和 D^4 分别表示二阶和四阶差分算子。关于人工黏性系数 $\epsilon_x^{(2)}$，$\epsilon_x^{(4)}$，$\epsilon_y^{(2)}$，$\epsilon_y^{(4)}$ 的选取可参见第 3 章中关于 Jameson 隐式耗散格式中的系数部分。由于在式(6.6.21)和式(6.6.22)的左端隐式部分中都采用的是单侧差分，因而自然是耗散的，故在隐式部分无需附加人工黏性项。

第 7 章　边界条件的数学处理

Navier-Stokes 方程是所有牛顿流体的流动都必须遵循的支配方程，然而这些流动所呈现的具体状况却可以千差万别。这是由于定解条件和流体物性的不同而引起的。因此，边界条件的提法及其数学处理在计算流体力学中是一个不可忽视的十分重要的问题。它对于工程应用和理论研究都有重要的意义。首先，适当的边界条件提法及其数学处理是计算过程稳定的必要条件；其次，边界处理的具体方法可能影响诸如摩阻、热流等物理量的计算精度；再则，在对一些流动问题的细致模拟中，边界处理将可能对流场内部结构产生影响。总之，对于多尺度物理现象的直接数值模拟而言，不仅需要采用高精度、高分辨率的差分格式，而且要求精确控制边界的行为。这就促进了对于边界条件提法及其数学处理的研究。然而这方面的研究在计算流体力学中仍然是一个薄弱环节，它远远落后于实际计算。

简要地说，边界处理包括边界条件的提法和边界条件的履行方法。而边界条件的提法又可细分为：①各类边界上所需规定的边界条件的数目；②各类边界上具体的边界条件的提法。它们是不能随意规定的，一方面要求由这些边界条件和初始条件及支配方程所构成的偏微分方程组的初边值问题在数学上是适定的；另一方面还要求它们具有明显的物理意义。

对于流体力学的支配方程，诸如 Euler 方程和 Navier-Stokes 方程而言，它们的初边值问题的比较完整的分析是很不容易的。事实上，直到 Kreiss 的文章[1,2]发表以后才找到了作此种比较完整的分析的合适工具。经过近三十年的努力，虽然对 Euler 方程

已能推导出保证初边值问题适定性的精确的边界条件[1,3]，但是对于 Navier-Stokes 方程而言，这个问题复杂得多。只有在某些简单的情况中才能确定应用于 Navier-Stokes 方程的一组给定的边界条件是否将导致一个适定的问题[4,5]。

在叙述边界条件和它的数学处理之前，先介绍几个术语。

在流体力学问题的数值计算中，可能遇到如下两类不同的边界。

(1) 实际边界。它们是由物理问题的性质决定的，从而是确定的。例如外流问题中的固体壁面，内流问题中的进、出口边界及固体壁面都是实际边界。

(2) 人工边界(或称开边界)。它们是针对无限或半无限区域，或人们感兴趣的范围远小于实际区域时人为引入的。例如，在外流问题的计算中，尽管实际区域延伸至无限远，但实际计算时只能把外边界选在距固体边界有限远的地方。因此，人工边界的选取带有任意性和经验性。该处的边界条件应使得“好比没有边界”，意即无人为的边界层及无人为的边界反射。

其次，必须区分如下两类不同的边界条件。

(1) 物理边界条件。保证支配方程(例如，Euler 方程、Navier-Stokes 方程等)的初边值问题适定所需要规定的边界条件称为物理边界条件。对于三维流动，适定性所要求的物理边界条件的数目被总结在表 7-1 中[6]。

表 7-1　适定性所要求的物理边界条件的数目

边界类型	Euler 方程	Navier-Stokes 方程
超声速入流	5	5
亚声速入流	4	5
超声速出流	0	4
亚声速出流	1	4

(2) 数值边界条件。当物理边界条件的数目少于支配方程中独立变量的数目时，在数值计算过程中如何求出在边界处没有被

规定的变量的值？这就需要附加“数值边界条件”。如何选定合适的数值边界条件？是长期困扰计算流体力学工作者的一个问题。

应该指出的是，一个流体力学问题的计算结果不仅取决于所采用的支配方程和物理边界条件，也取决于所采用的数值格式和数值边界条件。

对于实际边界而言，其上的物理边界条件含义明确直观。但对于各种不同的问题选择好的物理边界条件以及将此条件与内点处使用的数值格式结合起来的方法仍然是一个重要的研究课题。

更困难的是人工边界上边界条件的确定。无限远边界的处理大致有如下四类不同的方法[7]。

(1) 区域变换法。通过坐标变换，将无限区域变换成有限区域。这种方法的缺点是坐标变换会产生奇点或引起解的振荡。所以在实际计算中很少使用。

(2) 有限截断法。将外边界选在足够远的地方直接用无限远处的边界条件。例如，对于外流问题，对于流体以亚声速流入的入流边界可规定 $u-2c/(\gamma-1)$，v，w 和 s；而在流体以亚声速流出的出流边界可规定 p。这种方法在实际计算中经常被使用。它的不足之处是在出口边界处有人为的反射以及计算区域很大。

(3) 渐近解方法。将外边界放在某个地方，使得人工边界以外的区域可用小扰动法求出近似解，并用它作为边界条件。

(4) 特征分析方法。基本思想是采用特征分析方法将支配方程中沿边界法线方向通量的 Jacobian 矩阵对角化，从而将支配方程改写成包含与沿边界法线方向传播的诸特征波波幅的时间变化率成正比的 $\mathscr{L}_i(i=1,2,3,4,5)$ 的形式。然后用这些量来规定边界条件[6,8]（详细阐明见后）。

限于篇幅，只介绍特征分析方法。

7.1 Euler 方程和 Navier-Stokes 方程的边界条件

今以图 7-1 中的机翼绕流问题为例来介绍 Euler 方程和

Navier-Stokes 方程在各类边界上边界条件的提法(仅限于物理边界条件)。

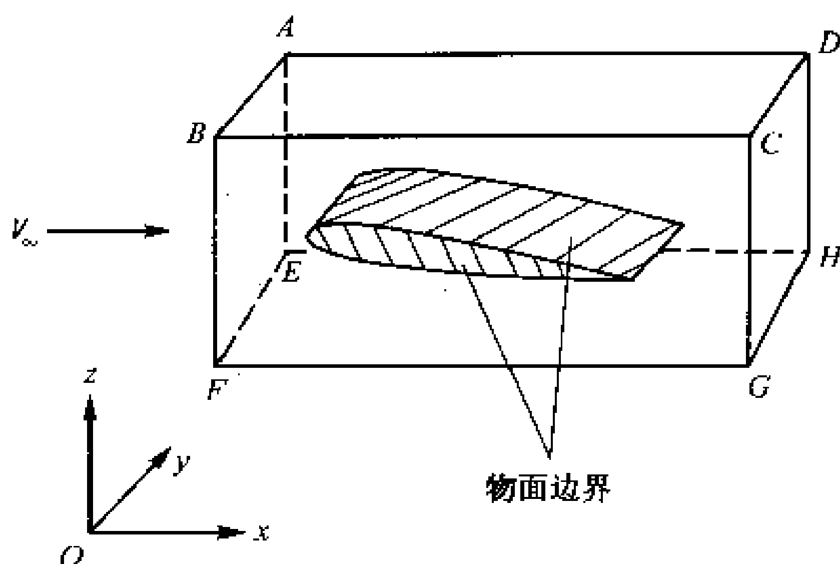


图 7-1 机翼绕流的计算域及各类边界示意图

7.1.1 Euler 方程的边界条件

(1) 入流边界($ABFE$)条件

(i) 超声速入流边界条件

此时应规定 5 个物理边界条件,例如规定 p、ρ、u、v 和 w。

(ii) 亚声速入流边界条件

此时应规定 4 个物理边界条件,例如规定$[u-2c/(\gamma-1)]$、v、w 和 s;或者规定 ρ、u、v 和 w。

(2) 出流边界($DCGH$)条件

(i) 超声速出流边界条件

此时不需规定任何物理边界条件。

(ii) 亚声速出流边界条件

此时应规定 1 个物理边界条件,例如规定 p。

(3) 物面边界条件

此时应规定 1 个物理边界条件,即法向速度为零。

(4) 远场边界($ABCD$,$EFGH$,$AEHD$,$BFGC$)条件

此时应规定的物理边界条件的数目由该处局部特征值的正和负的个数自动地决定。总之,对应于每1个进入特征波都应规定1个物理边界条件——无反射边界条件。即每1个进入特征波的波幅的时间变化率都为零

$$\mathscr{L}_i = 0$$

这里,$\mathscr{L}_i$ 表示进入特征波波幅的时间变化率(关于 $\mathscr{L}_i$ 的确定,后面将详细阐明)。

7.1.2 Navier-Stokes 方程的边界条件

首先应当说明,这是一个尚未完全解决而需要作进一步研究的问题。在有关黏流数值计算的许多文章中,对 Navier-Stokes 方程规定的边界条件是不同的。在大多数黏流计算的文章中,除了对物面边界将滑移边界条件改成无滑移边界条件并加上或者绝热边界条件或者等温边界条件之外,在其余各类边界上采用了与 Euler 方程完全相同的边界条件。其理由是认为在这些边界附近,黏性影响很小,可略去不计。

这里,将介绍 T.J. Poinsot 和 S.K. Lele[6]用于湍流直接数值模拟的与近代高精度无耗散算法相匹配的边界条件。其基本思想在于:①对于 Navier-Stokes 方程规定的边界条件的数目是从适定性的理论分析[9,10]得到的数目;②Navier-Stokes 方程的边界条件是用如下方法得到的:Euler 方程的无黏边界条件,并补充相应数目的附加的黏性边界条件。

(1) 入流边界($ABFE$)条件

(i) 超声速入流边界条件

此时应规定 5 个物理边界条件,例如规定 p、ρ、u、v 和 w。没有附加的黏性边界条件。

(ii) 亚声速入流边界条件

此时应规定 5 个物理边界条件。其中 4 个是 Euler 方程的亚声速入流边界条件,例如规定$[u-2c/(\gamma-1)]$、v、w 和 s;或者规定 ρ、u、v 和 w。再补充 1 个附加的黏性边界条件,例如$\partial\tau_{xx}/\partial x=0$。

(2) 出流边界($DCGH$)条件

(i) 超声速出流边界条件

此时应规定 4 个物理边界条件。因为 Euler 方程的超声速出流无需边界条件,故应补充 4 个附加的黏性边界条件。例如:$\partial \tau_{xx}/\partial x = 0$,$\partial \tau_{xy}/\partial x = 0$,$\partial \tau_{xz}/\partial x = 0$,$\partial q_x/\partial x = 0$。其中 q_x 是 x 方向的热通量。

(ii) 亚声速出流边界条件

此时应规定 4 个物理边界条件。其中 1 个是 Euler 方程的亚声速出流边界条件,例如规定 p。还应补充 3 个附加的黏性边界条件,例如:$\partial \tau_{xy}/\partial x = 0$,$\partial \tau_{xz}/\partial x = 0$,$\partial q_x/\partial x = 0$。

(3) 物面边界条件

(i) 等温无滑移物面条件

此时应规定 4 个物理边界条件。它们是 $u = 0$,$v = 0$,$w = 0$,$T = T_s$。没有附加的黏性边界条件。

(ii) 绝热无滑移物面条件

此时应规定 4 个物理边界条件。它们是 $u = 0$,$v = 0$,$w = 0$,再补充 1 个附加的黏性边界条件:$q_n = 0$。

(4) 远场边界($ABCD$,$EFGH$,$AEHD$,$BFGC$)条件

此时应规定边界条件的数目和边界条件的具体提法都与 Euler 方程相同。

7.2 Euler 方程边界条件的数学处理

7.2.1 Euler 方程

任意曲线坐标系(ξ,η,ζ)中三维无量纲守恒型的 Euler 方程可表示为

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{Q}}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{E}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{F}}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{G}}}{\partial \zeta} = 0 \qquad (7.2.1)$$

式中

$$\hat{Q} = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \end{bmatrix}, \quad \hat{E} = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ \rho w U + \xi_z p \\ (E_t + p) U \end{bmatrix}, \quad \hat{F} = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ \rho w V + \eta_z p \\ (E_t + p) V \end{bmatrix}$$

$$\hat{G} = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} \rho W \\ \rho u W + \zeta_x p \\ \rho v W + \zeta_y p \\ \rho w W + \zeta_z p \\ (E_t + p) W \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \xi &= \xi(x, y, z) \\ \eta &= \eta(x, y, z) \\ \zeta &= \zeta(x, y, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w, \\ V &= \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w, \\ W &= \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w。 \end{aligned} \quad J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{vmatrix}$$

7.2.2 特征分析

按照 K. W. Thompson[8] 的特征分析方法，来改写方程组(7.2.1)中 ξ 方向的双曲型项。

首先引入如下原始变量列向量

$$\tilde{Q} \equiv \frac{1}{J}(\rho, u, v, w, p)^{\mathrm{T}} \tag{7.2.2}$$

$$Q \equiv J\tilde{Q} = (\rho, u, v, w, p)^{\mathrm{T}} \tag{7.2.3}$$

则有

$$\hat{P}^{-1} \equiv \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \hat{Q}} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ -v/\rho & 0 & 1/\rho & 0 & 0 \\ -w/\rho & 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ \frac{(\gamma-1)}{2}(u^2+v^2+w^2) & -(\gamma-1)u & -(\gamma-1)v & -(\gamma-1)w & (\gamma-1) \end{bmatrix} \tag{7.2.4}$$

以$(J\hat{P}^{-1})$左乘式(7.2.1)可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}+J\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{E}}}{\partial \xi}+\frac{\partial \hat{\boldsymbol{F}}}{\partial \eta}+\frac{\partial \hat{\boldsymbol{G}}}{\partial \zeta}\right)=0 \tag{7.2.5}$$

此即在任意曲线坐标系(ξ,η,ζ)中的原始变量形式的 Euler 方程。它可被改写成如下非守恒的形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}+\boldsymbol{A}^{\xi}\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \xi}+\boldsymbol{C}^{\xi}=0 \tag{7.2.6}$$

式中

$$\boldsymbol{A}^{\xi}\equiv\begin{bmatrix} U & \rho\xi_x & \rho\xi_y & \rho\xi_z & 0 \\ 0 & U & 0 & 0 & \xi_x/\rho \\ 0 & 0 & U & 0 & \xi_y/\rho \\ 0 & 0 & 0 & U & \xi_z/\rho \\ 0 & \gamma p\xi_x & \gamma p\xi_y & \gamma p\xi_z & U \end{bmatrix} \tag{7.2.7}$$

$$\boldsymbol{C}^{\xi}\equiv\begin{bmatrix} V\dfrac{\partial \rho}{\partial \eta}+\rho\left(\eta_x\dfrac{\partial u}{\partial \eta}+\eta_y\dfrac{\partial v}{\partial \eta}+\eta_z\dfrac{\partial w}{\partial \eta}\right)+W\dfrac{\partial \rho}{\partial \zeta}+ \\ \rho\left(\zeta_x\dfrac{\partial u}{\partial \zeta}+\zeta_y\dfrac{\partial v}{\partial \zeta}+\zeta_z\dfrac{\partial w}{\partial \zeta}\right) \\ V\dfrac{\partial u}{\partial \eta}+\dfrac{1}{\rho}\eta_x\dfrac{\partial p}{\partial \eta}+W\dfrac{\partial u}{\partial \zeta}+\dfrac{1}{\rho}\zeta_x\dfrac{\partial p}{\partial \zeta} \\ V\dfrac{\partial v}{\partial \eta}+\dfrac{1}{\rho}\eta_y\dfrac{\partial p}{\partial \eta}+W\dfrac{\partial v}{\partial \zeta}+\dfrac{1}{\rho}\zeta_y\dfrac{\partial p}{\partial \zeta} \\ V\dfrac{\partial w}{\partial \eta}+\dfrac{1}{\rho}\eta_z\dfrac{\partial p}{\partial \eta}+W\dfrac{\partial w}{\partial \zeta}+\dfrac{1}{\rho}\zeta_z\dfrac{\partial p}{\partial \zeta} \\ V\dfrac{\partial p}{\partial \eta}+\gamma p\left(\eta_x\dfrac{\partial u}{\partial \eta}+\eta_y\dfrac{\partial v}{\partial \eta}+\eta_z\dfrac{\partial w}{\partial \eta}\right)+W\dfrac{\partial p}{\partial \zeta}+ \\ \gamma p\left(\zeta_x\dfrac{\partial u}{\partial \zeta}+\zeta_y\dfrac{\partial v}{\partial \zeta}+\zeta_z\dfrac{\partial w}{\partial \zeta}\right) \end{bmatrix} \tag{7.2.8}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}^{\xi}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A}^{\xi}-\lambda \boldsymbol{I}|=(U-\lambda)^3[(U-\lambda)+c(\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2)^{1/2}][(U-\lambda)-c(\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2)^{1/2}]=0 \tag{7.2.9}$$

故矩阵 $\boldsymbol{A}^{\xi}$ 的特征值从小到大依次为

$$\lambda_1^{\xi} = U - C_{\xi} \tag{7.2.10}$$

$$\lambda_2^{\xi} = \lambda_3^{\xi} = \lambda_4^{\xi} = U \tag{7.2.11}$$

$$\lambda_5^{\xi} = U + C_{\xi} \tag{7.2.12}$$

式中

$$C_{\xi} \equiv c\beta_{\xi} \equiv c(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2)^{1/2} \tag{7.2.13}$$

然后按如下定义求矩阵 $\boldsymbol{A}^{\xi}$ 的诸左特征向量

$$\boldsymbol{l}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\xi} = \lambda_i^{\xi}\boldsymbol{l}_i^{\mathrm{T}} \tag{7.2.14}$$

式中
$$\boldsymbol{l}_i^{\mathrm{T}} = (l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}, l_{i4}, l_{i5})$$

$$i = 1,2,3,4,5 \tag{7.2.15}$$

求出的诸左特征向量如下

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{l}_1^{\mathrm{T}} &= (0, \ -c\rho\tilde{\xi}_x, -c\rho\tilde{\xi}_y, -c\rho\tilde{\xi}_z, \ 1) \\
\boldsymbol{l}_2^{\mathrm{T}} &= (c^2, \ 0, \ 0, \ 0, -1) \\
\boldsymbol{l}_3^{\mathrm{T}} &= (0, \ -\xi_y, \ \xi_x, \ 0, \ 0) \\
\boldsymbol{l}_4^{\mathrm{T}} &= (0, \ -\xi_z, \ 0, \ \xi_x, \ 0) \\
\boldsymbol{l}_5^{\mathrm{T}} &= (0, \ c\rho\tilde{\xi}_x, \ c\rho\tilde{\xi}_y, \ c\rho\tilde{\xi}_z, \ 1)
\end{aligned}\right\} \tag{7.2.16}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\xi}_x &\equiv \xi_x/(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2)^{1/2} \\
\tilde{\xi}_y &\equiv \xi_y/(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2)^{1/2} \\
\tilde{\xi}_z &\equiv \xi_z/(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2)^{1/2}
\end{aligned}\right\} \tag{7.2.17}$$

于是知,矩阵 $\boldsymbol{A}^{\xi}$ 的左特征向量矩阵为

$$L_{\boldsymbol{A}^{\xi}} = \begin{bmatrix}
0 & -c\rho\tilde{\xi}_x & -c\rho\tilde{\xi}_y & -c\rho\tilde{\xi}_z & 1 \\
c^2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & -\xi_y & \xi_x & 0 & 0 \\
0 & -\xi_z & 0 & \xi_x & 0 \\
0 & c\rho\tilde{\xi}_x & c\rho\tilde{\xi}_y & c\rho\tilde{\xi}_z & 1
\end{bmatrix} \tag{7.2.18}$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}^{\xi}$ 的对角化相似性变换为

$$L_{A^{\xi}}A^{\xi}L_{A^{\xi}}^{-1} = \Lambda_{\xi} \tag{7.2.19}$$

由此可得

$$A^{\xi} = L_{A^{\xi}}^{-1}\Lambda_{\xi}L_{A^{\xi}} \tag{7.2.20}$$

式中，Λ_{ξ} 是特征值的对角矩阵：$\Lambda_{ij}=0$，当 $i \neq j$ 时；$\Lambda_{ij}=\lambda_i^{\xi}$，当 $i=j$ 时。

以矩阵 $L_{A^{\xi}}$ 左乘方程式(7.2.6)，得到

$$L_{A^{\xi}}\frac{\partial Q}{\partial t} + \Lambda_{\xi}L_{A^{\xi}}\frac{\partial Q}{\partial \xi} + L_{A^{\xi}}C^{\xi} = 0 \tag{7.2.21}$$

它的5个分量方程为

$$l_i^{\mathrm{T}}\frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda_i l_i^{\mathrm{T}}\frac{\partial Q}{\partial \xi} + l_i^{\mathrm{T}}C^{\xi} = 0 \quad (i = 1,2,3,4,5) \tag{7.2.22}$$

为了后面关于边界条件的分析更方便，定义如下列矢量 L^{ξ}，它的第 i 个分量 $\mathscr{L}_i^{\xi}$ 是

$$\mathscr{L}_i^{\xi} \equiv \lambda_i^{\xi}l_i^{\mathrm{T}}\frac{\partial Q}{\partial \xi} \quad (i = 1,2,3,4,5) \tag{7.2.23}$$

于是方程式(8.2.21)可以被写成

$$L_{A^{\xi}}\frac{\partial Q}{\partial t} + L^{\xi} + L_{A^{\xi}}C^{\xi} = 0 \tag{7.2.24}$$

它的分量形式为

$$l_i^{\mathrm{T}}\frac{\partial Q}{\partial t} + \mathscr{L}_i^{\xi} + l_i^{\mathrm{T}}C^{\xi} = 0 \quad (i = 1,2,3,4,5) \tag{7.2.25}$$

方程式(7.2.24)或式(7.2.25)是 Euler 方程边界条件数学处理的出发点。

由式(7.2.23)，式(7.2.16)，式(7.2.10)～式(7.2.13)和式(7.2.3)可得

$$
\left.\begin{aligned}
\mathscr{L}_1^\xi &= (U - C_\xi)\left[-\frac{\rho c}{\beta_\xi}\left(\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \xi_z \frac{\partial w}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial p}{\partial \xi}\right] \\
\mathscr{L}_2^\xi &= U\left(c^2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi}\right) \\
\mathscr{L}_3^\xi &= U\left(-\xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \xi_x \frac{\partial v}{\partial \xi}\right) \\
\mathscr{L}_4^\xi &= U\left(-\xi_z \frac{\partial u}{\partial \xi} + \xi_x \frac{\partial w}{\partial \xi}\right) \\
\mathscr{L}_5^\xi &= (U + C_\xi)\left[\frac{\rho c}{\beta_\xi}\left(\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \xi_z \frac{\partial w}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial p}{\partial \xi}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{7.2.26}
$$

Euler 方程的边界条件的履行被归结为确定上面引进的 $\mathscr{L}_i^\xi$ 的问题。至于确定 $\mathscr{L}_i^\xi$ 的技术将在后面介绍。一旦知道了 $\mathscr{L}_i^\xi$ 之后,即可求出与 ξ 轴垂直的边界处的$\partial \boldsymbol{Q}/\partial t$。

以 $\boldsymbol{L}_{A^\xi}^{-1}$左乘方程式(7.2.24),可得

$$
\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \boldsymbol{L}_{A^\xi}^{1}\boldsymbol{L}^\xi + \boldsymbol{C}^\xi = 0 \tag{7.2.27}
$$

今定义如下列向量

$$
\boldsymbol{d}^\xi \equiv \boldsymbol{L}_{A^\xi}^{-1}\boldsymbol{L}^\xi \tag{7.2.28}
$$

以 $\boldsymbol{L}_{A^\xi}$左乘上式,得

$$
\boldsymbol{L}_{A^\xi}\boldsymbol{d}^\xi = \boldsymbol{L}^\xi \tag{7.2.29}
$$

由此可解出

$$
\boldsymbol{d}^\xi = \begin{bmatrix} d_1^\xi \\ d_2^\xi \\ d_3^\xi \\ d_4^\xi \\ d_5^\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
\dfrac{1}{c^2}\left[\dfrac{1}{2}(\mathscr{L}_1^\xi + \mathscr{L}_5^\xi) + \mathscr{L}_2^\xi\right] \\
\dfrac{\xi_x}{2\beta_\xi \rho c}(\mathscr{L}_5^\xi - \mathscr{L}_1^\xi) - \dfrac{1}{\beta_\xi^2}(\xi_y \mathscr{L}_3^\xi + \xi_z \mathscr{L}_4^\xi) \\
\dfrac{\xi_y}{2\beta_\xi \rho c}(\mathscr{L}_5^\xi - \mathscr{L}_1^\xi) + \dfrac{1}{\beta_\xi^2 \xi_x}[(\xi_x^2 \xi_z^2)\mathscr{L}_3^\xi - \xi_z \xi_y \mathscr{L}_4^\xi] \\
\dfrac{\xi_z}{2\beta_\xi \rho c}(\mathscr{L}_5^\xi - \mathscr{L}_1^\xi) - \dfrac{1}{\beta_\xi^2 \xi_x}[\xi_y \xi_z \mathscr{L}_3^\xi - (\xi_x^2 + \xi_y^2)\mathscr{L}_4^\xi] \cdot \\
\dfrac{1}{2}(\mathscr{L}_1^\xi + \mathscr{L}_5^\xi)
\end{bmatrix} \tag{7.2.30}
$$

至此,方程式(7.2.6)已被改写成如下形式

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + d_1^{\xi} + V\frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \rho\left(\eta_x\frac{\partial u}{\partial \eta} + \eta_y\frac{\partial v}{\partial \eta} + \eta_z\frac{\partial w}{\partial \eta}\right) + \\
&\qquad W\frac{\partial \rho}{\partial \zeta} + \rho\left(\zeta_x\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \zeta_y\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \zeta_z\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) = 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial t} + d_2^{\xi} + V\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho}\eta_x\frac{\partial p}{\partial \eta} + W\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{1}{\rho}\zeta_x\frac{\partial p}{\partial \zeta} = 0 \\
&\frac{\partial v}{\partial t} + d_3^{\xi} + V\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho}\eta_y\frac{\partial p}{\partial \eta} + W\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{1}{\rho}\zeta_y\frac{\partial p}{\partial \zeta} = 0 \\
&\frac{\partial w}{\partial t} + d_4^{\xi} + V\frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho}\eta_z\frac{\partial p}{\partial \eta} + W\frac{\partial w}{\partial \zeta} + \frac{1}{\rho}\zeta_z\frac{\partial p}{\partial \zeta} = 0 \\
&\frac{\partial p}{\partial t} + d_5^{\xi} + V\frac{\partial p}{\partial \eta} + \gamma p\left(\eta_x\frac{\partial u}{\partial \eta} + \eta_y\frac{\partial v}{\partial \eta} + \eta_z\frac{\partial w}{\partial \eta}\right) + \\
&\qquad W\frac{\partial p}{\partial \zeta} + \gamma p\left(\zeta_x\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \zeta_y\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \zeta_z\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) = 0
\end{aligned}\right\}
\tag{7.2.31}
$$

这就是垂直于 ξ 轴的边界处的支配方程。称为 ξ 方向的修正的 Euler 方程。求解此方程即可确定该边界处的诸流动变量。

完全类似地可得到垂直于 η 轴的边界处的支配方程——η 方向修正的 Euler 方程如下

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + d_1^{\eta} + W\frac{\partial \rho}{\partial \zeta} + \rho\left(\zeta_x\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \zeta_y\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \zeta_z\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) + \\
&\qquad U\frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \rho\left(\xi_x\frac{\partial u}{\partial \xi} + \xi_y\frac{\partial v}{\partial \xi} + \xi_z\frac{\partial w}{\partial \xi}\right) = 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial t} + d_2^{\eta} + W\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{1}{\rho}\zeta_x\frac{\partial p}{\partial \zeta} + U\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho}\xi_x\frac{\partial p}{\partial \xi} = 0 \\
&\frac{\partial v}{\partial t} + d_3^{\eta} + W\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{1}{\rho}\zeta_y\frac{\partial p}{\partial \zeta} + U\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho}\xi_y\frac{\partial p}{\partial \xi} = 0 \\
&\frac{\partial w}{\partial t} + d_4^{\eta} + W\frac{\partial w}{\partial \zeta} + \frac{1}{\rho}\zeta_z\frac{\partial p}{\partial \zeta} + U\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho}\xi_z\frac{\partial p}{\partial \xi} = 0
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial t}+d_5^{\eta}+W\frac{\partial p}{\partial \zeta}+\gamma p\left(\zeta_x\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\zeta_y\frac{\partial v}{\partial \zeta}+\zeta_z\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)+\\
&U\frac{\partial p}{\partial \xi}+\gamma p\left(\xi_x\frac{\partial u}{\partial \xi}+\xi_y\frac{\partial v}{\partial \xi}+\xi_z\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)=0
\end{aligned}\right\}
\tag{7.2.32}
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
d_1^{\eta}&=\frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{2}(\mathscr{L}_5^{\eta}+\mathscr{L}_1^{\eta})+\mathscr{L}_2^{\eta}\right]\\
d_2^{\eta}&=\frac{\eta_x}{2\beta_\eta\rho c}(\mathscr{L}_5^{\eta}-\mathscr{L}_1^{\eta})+\frac{1}{\beta_\eta^2\eta_y}\left[(\eta_y^2+\eta_z^2)\mathscr{L}_3^{\eta}-\eta_x\eta_z\mathscr{L}_4^{\eta}\right]\\
d_3^{\eta}&=\frac{\eta_y}{2\beta_\eta\rho c}(\mathscr{L}_5^{\eta}-\mathscr{L}_1^{\eta})-\frac{1}{\beta_\eta^2}\left[\eta_x\mathscr{L}_3^{\eta}+\eta_z\mathscr{L}_4^{\eta}\right]\\
d_4^{\eta}&=\frac{\eta_z}{2\beta_\eta\rho c}(\mathscr{L}_5^{\eta}-\mathscr{L}_1^{\eta})-\frac{1}{\beta_\eta^2\eta_y}\left[\eta_x\eta_z\mathscr{L}_3^{\eta}-(\eta_x^2+\eta_y^2)\mathscr{L}_4^{\eta}\right]\\
d_5^{\eta}&=\frac{1}{2}(\mathscr{L}_5^{\eta}+\mathscr{L}_1^{\eta})
\end{aligned}\right\}
\tag{7.2.33}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\mathscr{L}_1^{\eta}&=(V-C_\eta)\left[-\frac{\rho c}{\beta_\eta}\left(\eta_x\frac{\partial u}{\partial \eta}+\eta_y\frac{\partial v}{\partial \eta}+\eta_z\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial p}{\partial \eta}\right]\\
\mathscr{L}_2^{\eta}&=V\left(c^2\frac{\partial \rho}{\partial \eta}-\frac{\partial p}{\partial \eta}\right)\\
\mathscr{L}_3^{\eta}&=V\left(-\eta_x\frac{\partial v}{\partial \eta}+\eta_y\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\\
\mathscr{L}_4^{\eta}&=V\left(-\eta_z\frac{\partial v}{\partial \eta}+\eta_y\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)\\
\mathscr{L}_5^{\eta}&=(V+C_\eta)\left[\frac{\rho c}{\beta_\eta}\left(\eta_x\frac{\partial u}{\partial \eta}+\eta_y\frac{\partial v}{\partial \eta}+\eta_z\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial p}{\partial \eta}\right]
\end{aligned}\right\}
\tag{7.2.34}
$$

这里

$$
C_\eta=c\beta_\eta \tag{7.2.35}
$$

$$
\beta_\eta=(\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2)^{1/2} \tag{7.2.36}
$$

垂直于 ζ 轴的边界处的支配方程——ζ 方向修正的 Euler 方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t}+d_1^{\zeta}+V\frac{\partial \rho}{\partial \eta}+\rho\left(\eta_x\frac{\partial u}{\partial \eta}+\eta_y\frac{\partial v}{\partial \eta}+\eta_z\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)+\\
&\qquad U\frac{\partial \rho}{\partial \xi}+\rho\left(\xi_x\frac{\partial u}{\partial \xi}+\xi_y\frac{\partial v}{\partial \xi}+\xi_z\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)=0\\
&\frac{\partial u}{\partial t}+d_2^{\zeta}+V\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{1}{\rho}\eta_x\frac{\partial p}{\partial \eta}+U\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{\rho}\xi_x\frac{\partial p}{\partial \xi}=0\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+d_3^{\zeta}+V\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{1}{\rho}\eta_y\frac{\partial p}{\partial \eta}+U\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{1}{\rho}\xi_y\frac{\partial p}{\partial \xi}=0\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+d_4^{\zeta}+V\frac{\partial w}{\partial \eta}+\frac{1}{\rho}\eta_z\frac{\partial p}{\partial \eta}+U\frac{\partial w}{\partial \xi}+\frac{1}{\rho}\xi_z\frac{\partial p}{\partial \xi}=0\\
&\frac{\partial p}{\partial t}+d_5^{\zeta}+V\frac{\partial p}{\partial \eta}+\gamma p\left(\eta_x\frac{\partial u}{\partial \eta}+\eta_y\frac{\partial v}{\partial \eta}+\eta_z\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)+\\
&\qquad U\frac{\partial p}{\partial \xi}+\gamma p\left(\xi_x\frac{\partial u}{\partial \xi}+\xi_y\frac{\partial v}{\partial \xi}+\xi_z\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)=0
\end{aligned}\right\}\tag{7.2.37}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
d_1^{\zeta}&=\frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{2}(\mathscr{L}_5^{\zeta}+\mathscr{L}_1^{\zeta})+\mathscr{L}_2^{\zeta}\right]\\
d_2^{\zeta}&=\frac{\zeta_x}{2\beta_\zeta\rho c}(\mathscr{L}_5^{\zeta}-\mathscr{L}_1^{\zeta})+\frac{1}{\beta_\zeta^2\zeta_z}[(\zeta_y^2+\zeta_z^2)\mathscr{L}_3^{\zeta}-\zeta_x\zeta_y\mathscr{L}_4^{\zeta}]\\
d_3^{\zeta}&=\frac{\zeta_y}{2\beta_\zeta\rho c}(\mathscr{L}_5^{\zeta}-\mathscr{L}_1^{\zeta})-\frac{1}{\beta_\zeta^2\zeta_z}[\zeta_x\zeta_y\mathscr{L}_3^{\zeta}-(\zeta_x^2+\zeta_z^2)\mathscr{L}_4^{\zeta}]\\
d_4^{\zeta}&=\frac{\zeta_z}{2\beta_\zeta\rho c}(\mathscr{L}_5^{\zeta}-\mathscr{L}_1^{\zeta})-\frac{1}{\beta_\zeta^2}[\zeta_x\mathscr{L}_3^{\zeta}+\zeta_y\mathscr{L}_4^{\zeta}]\\
d_5^{\zeta}&=\frac{1}{2}(\mathscr{L}_5^{\zeta}+\mathscr{L}_1^{\zeta})
\end{aligned}\right\}\tag{7.2.38}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathscr{L}_1^{\xi} &= (W - C_\zeta)\left[-\frac{\rho c}{\beta_\zeta}\left(\zeta_x\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \zeta_y\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \zeta_z\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) + \frac{\partial p}{\partial \zeta}\right] \\
\mathscr{L}_2^{\xi} &= W\left(c^2\frac{\partial \rho}{\partial \zeta} - \frac{\partial p}{\partial p}\right) \\
\mathscr{L}_3^{\xi} &= W\left(-\zeta_x\frac{\partial w}{\partial \zeta} + \zeta_z\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) \\
\mathscr{L}_4^{\xi} &= W\left(-\zeta_y\frac{\partial w}{\partial \zeta} + \zeta_z\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right) \\
\mathscr{L}_5^{\xi} &= (W + C_\zeta)\left[\frac{\rho c}{\beta_\zeta}\left(\zeta_x\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \zeta_y\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \zeta_z\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) + \frac{\partial p}{\partial \zeta}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{7.2.39}$$

这里

$$C_\zeta = c\beta_\zeta \tag{7.2.40}$$

$$\beta_\zeta = (\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2)^{1/2} \tag{7.2.41}$$

应当指出，在各边界处的支配方程式(7.2.31)，式(7.2.32)和式(7.2.37)中，所有沿边界的切向导数的差商近似与内点处完全相同。剩下的关键问题是如何确定 $\mathscr{L}_i$，$(i=1,2,3,4,5)$。

7.2.3 $\mathscr{L}_i$ 的确定与 LODI 关系式

以 ξ 方向边界(即垂直于 ξ 轴的边界)为例来阐明 $\mathscr{L}_i$ 的确定方法。η 方向和 ζ 方向边界的情况是完全类似的。

K. W. Thompson 对双曲型偏微分方程提出的“时间相关边界条件”的基本思想是：双曲型偏微分方程描述的是波的传播现象。在边界处有一些波是从边界外传向求解域内，而另一些波则是从求解域内传向边界。前者称进入波，由于它们的行为完全由边界外的状况所决定，因此就需要适当规定边界条件来确定它们的行为；而后者称跑出波，由于它们的行为完全由求解域内的解所决定的，因此对这些波不应提任何边界条件。

按照上述思想，与特征值 λ_i^{ξ} 对应的特征变量 $\mathscr{L}_i^{\xi}$ 可决定如下：当特征速度 λ_i^{ξ} 指向求解域外部时，用单侧导数逼近从定义式

(7.2.26)计算出相应的 $\mathscr{L}_i^\xi$;反之,当特征速度 λ_i^ξ 指向求解域内部时,则应由边界条件来确定相应的 $\mathscr{L}_i^\xi$。

如何确定与进入特征波相应的 $\mathscr{L}_i^\xi$? 在文献[8]和[6]中利用了局部一维无黏(LODI)关系式。

在边界上每一点处,考虑方程式(7.2.31)及式(7.2.30),并忽略切向导数项,就可得到这样的局部一维无黏方程组

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{2}(\mathscr{L}_1^\xi + \mathscr{L}_5^\xi) + \mathscr{L}_2^\xi\right] = 0 \tag{7.2.42}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\xi_x}{2\beta_\xi \rho c}(\mathscr{L}_5^\xi - \mathscr{L}_1^\xi) - \frac{1}{\beta_\xi^2}(\xi_y \mathscr{L}_3^\xi + \xi_z \mathscr{L}_4^\xi) = 0 \tag{7.2.43}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\xi_y}{2\beta_\xi \rho c}(\mathscr{L}_5^\xi - \mathscr{L}_1^\xi) + \frac{1}{\beta_\xi^2 \xi_x}[(\xi_x^2 + \xi_z^2)\mathscr{L}_3^\xi - \xi_z \xi_y \mathscr{L}_4^\xi] = 0 \tag{7.2.44}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\xi_z}{2\beta_\xi \rho c}(\mathscr{L}_5^\xi - \mathscr{L}_1^\xi) - \frac{1}{\beta_\xi^2 \xi_x}[\xi_y \xi_z \mathscr{L}_3^\xi - (\xi_x^2 + \xi_y^2)\mathscr{L}_4^\xi] = 0 \tag{7.2.45}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}(\mathscr{L}_1^\xi + \mathscr{L}_5^\xi) = 0 \tag{7.2.46}$$

上述诸方程可以被用来得到表示所有其余感兴趣的量的时间导数的局部一维无黏关系式。例如,由式(7.2.42),式(7.2.46)及无量纲状态方程 $T = \dfrac{\gamma Ma_\infty^2 p}{\rho}$ 可得

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T}{\rho c^2}\left[\mathscr{L}_2^\xi - \frac{1}{2}(\gamma - 1)(\mathscr{L}_1^\xi + \mathscr{L}_5^\xi)\right] \tag{7.2.47}$$

利用式(7.2.42)、式(7.2.46)及无量纲熵 S 的定义可得

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{(\gamma - 1)\rho T}\mathscr{L}_2^\xi \tag{7.2.48}$$

利用式(7.2.43)、式(7.2.47)及无量纲滞止焓 h_0 的定义可得

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} = \frac{1}{(\gamma-1)\rho}\left\{\mathscr{L}_2^\xi - \frac{\gamma-1}{2}\left[\left(1-\frac{\xi_x u}{\beta_\xi c}\right)\mathscr{L}_1^\xi + \left(1+\frac{\xi_x u}{\beta_\xi c}\right)\mathscr{L}_5^\xi\right]\right\} + \frac{u}{\beta_\xi^2}(\xi_y \mathscr{L}_3^\xi + \xi_z \mathscr{L}_4^\xi) \tag{7.2.49}$$

利用式(7.2.42)及式(7.2.43)可得

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = -\frac{1}{c}\left\{\frac{u}{c}\mathscr{L}_2^\xi + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{u}{c}-\frac{\xi_x}{\beta_\xi}\right)\mathscr{L}_1^\xi + \left(\frac{u}{c}+\frac{\xi_x}{\beta_\xi}\right)\mathscr{L}_5^\xi\right]\right\} + \frac{\rho}{\beta_\xi^2}(\xi_y \mathscr{L}_3^\xi + \xi_z \mathscr{L}_4^\xi) \tag{7.2.50}$$

因为有时是通过规定在边界处某种物理量的梯度来施加边界条件的，例如绝热条件$\frac{\partial T}{\partial \xi}=0$，因而如下形式的 LODI 关系式可能是有用的，它们是从式(7.2.26)求出来的

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathscr{L}_5^\xi}{U+C_\xi} + \frac{\mathscr{L}_1^\xi}{U-C_\xi}\right) \tag{7.2.51}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \xi} = \frac{1}{c^2}\left[\frac{\mathscr{L}_2^\xi}{U} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathscr{L}_5^\xi}{U+C_\xi} + \frac{\mathscr{L}_1^\xi}{U-C_\xi}\right)\right] \tag{7.2.52}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{T}{\rho c^2}\left[-\frac{\mathscr{L}_2^\xi}{U} + \frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{\mathscr{L}_5^\xi}{U+C_\xi} + \frac{\mathscr{L}_1^\xi}{U-C_\xi}\right)\right] \tag{7.2.53}$$

7.2.4 $\mathscr{L}_i$的物理含义

这里，以 ξ 方向边界上的特征变量 $\mathscr{L}_i^\xi$ 为例来说明 $\mathscr{L}_i$ 的物理含义。

为简单起见，在 Cartesian 坐标系(x,y,z)中来讨论这个问题。此时有

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = z \tag{7.2.54}$$

于是式(7.2.42)～式(7.2.46)和式(7.2.48)分别被简化成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{2}(\mathscr{L}_1^\xi + \mathscr{L}_5^\xi) + \mathscr{L}_2^\xi\right] = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2\rho c}(\mathscr{L}_5^\xi - \mathscr{L}_1^\xi) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathscr{L}_3^\xi = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathscr{L}_4^\xi = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}(\mathscr{L}_1^\xi + \mathscr{L}_5^\xi) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{1}{(\gamma - 1)\rho T}\mathscr{L}_2^\xi = 0$$

由此易于得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\rho c}\mathscr{L}_1^\xi \tag{7.2.55}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c}\mathscr{L}_5^\xi \tag{7.2.56}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\mathscr{L}_3^\xi \tag{7.2.57}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\mathscr{L}_4^\xi \tag{7.2.58}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\mathscr{L}_2^\xi \tag{7.2.59}$$

另一方面,此时式(7.2.26)被简化为

$$\mathscr{L}_1^\xi = (u - c)\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho c\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\mathscr{L}_2^\xi = u\left(c^2\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

$$\mathscr{L}_3^\xi = u\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\mathscr{L}_4^\xi = u\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\mathscr{L}_5^\xi = (u + c)\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho c\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

由此易于得到

$$\frac{1}{\rho c}\mathscr{L}_1^\xi = -(u-c)\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{7.2.60}$$

$$-\frac{1}{c^2}\mathscr{L}_2^\xi = -u\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{7.2.61}$$

$$-\mathscr{L}_3^\xi = -u\frac{\partial v}{\partial x} \tag{7.2.62}$$

$$-\mathscr{L}_4^\xi = -u\frac{\partial w}{\partial x} \tag{7.2.63}$$

$$-\frac{1}{\rho c}\mathscr{L}_5^\xi = -(u+c)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{7.2.64}$$

今定义

$$J_1 \equiv u - \int\frac{\mathrm{d}p}{\rho c} \tag{7.2.65}$$

$$J_2 \equiv \rho - \int\frac{\mathrm{d}p}{c^2} \tag{7.2.66}$$

$$J_3 \equiv v \tag{7.2.67}$$

$$J_4 \equiv w \tag{7.2.68}$$

$$J_5 \equiv u + \int\frac{\mathrm{d}p}{\rho c} \tag{7.2.69}$$

在均熵运动的情况中，密度 ρ 和声速 c 都是压力 p 的确定的函数，于是有

$$\frac{\partial J_1}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial t},\quad \frac{\partial J_1}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{7.2.70}$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t},\quad \frac{\partial J_2}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{7.2.71}$$

$$\frac{\partial J_5}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial t},\quad \frac{\partial J_5}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{7.2.72}$$

由式(7.2.55)～式(7.2.72)可得

$$\frac{\partial J_1}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial J_1}{\partial x} = \frac{\partial J_1}{\partial t} - \frac{1}{\rho c}\mathscr{L}_1^\xi = 0 \tag{7.2.73}$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial t} + \lambda_2\frac{\partial J_2}{\partial x} = \frac{\partial J_2}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\mathscr{L}_2^\xi = 0 \tag{7.2.74}$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial J_3}{\partial x} = \frac{\partial J_3}{\partial t} + \mathscr{L}_3^{\xi} = 0 \tag{7.2.75}$$

$$\frac{\partial J_4}{\partial t} + \lambda_4 \frac{\partial J_4}{\partial x} = \frac{\partial J_4}{\partial t} + \mathscr{L}_4^{\xi} = 0 \tag{7.2.76}$$

$$\frac{\partial J_5}{\partial t} + \lambda_5 \frac{\partial J_5}{\partial x} = \frac{\partial J_5}{\partial t} + \frac{1}{\rho c}\mathscr{L}_5^{\xi} = 0 \tag{7.2.77}$$

由此可见,$J_i(i=1,2,3,4,5)$分别沿着斜率为 $\lambda_i(i=1,2,3,4,5)$的特征线上保持常值;也即 J_i 为波速为 λ_i 的特征波的波幅;而 $\mathscr{L}_i^{\xi}$ 则分别与对应的特征波波幅的时间变化率成正比,这就是 $\mathscr{L}_i^{\xi}$ 的物理含义。

7.2.5 各类边界条件的数学处理

现仍以图 7-1 所示的计算域及各类边界为例说明之。

(1) 超声速入流边界

对于 $\xi=1$ 处的超声速入流而言,因为 5 个特征值 λ_i 均大于零,故 5 个特征波都是进入波,于是进口边界处的全部流动参数都是被给定的。

(2) 亚声速入流边界

对于 $\xi=1$ 处的亚声速入流而言,因为对应于 $\mathscr{L}_2^{\xi}$,$\mathscr{L}_3^{\xi}$,$\mathscr{L}_4^{\xi}$ 和 $\mathscr{L}_5^{\xi}$ 的 4个特征波是进入计算域的,而对应于 $\mathscr{L}_1^{\xi}$ 的 1 个特征波则是跑出计算域的。于是在该入流边界处,4 个量(如 u,v,w,T)应该被规定,而密度 ρ 由求解式(7.2.31)中的第 1 个方程得到。

$\mathscr{L}_1^{\xi}$ 是由式(7.2.26)中的第 1 式用单侧差分计算得到;而 $\mathscr{L}_2^{\xi}\sim\mathscr{L}_5^{\xi}$ 则是由 LODI 方程组及规定的边界条件而得到的。例如,对于在入流边界处规定 u,v,w 和 T 的情况,由式(7.2.43)及式(7.2.44)可得

$$\mathscr{L}_3^{\xi} = \xi_y \frac{\partial u}{\partial t} - \xi_x \frac{\partial v}{\partial t} \tag{7.2.78}$$

由式(7.2.43),式(7.2.45)可得

$$\mathscr{L}_4^\xi = \xi_x \frac{\partial u}{\partial t} - \xi_x \frac{\partial w}{\partial t} \qquad (7.2.79)$$

由式(7.2.43)可得

$$\mathscr{L}_5^\xi = \mathscr{L}_1^\xi + \frac{2\beta_\xi \rho c}{\xi_x}\left[\frac{1}{\beta_\xi^2}(\xi_y \mathscr{L}_3^\xi + \xi_z \mathscr{L}_4^\xi) - \frac{\partial u}{\partial t}\right] \qquad (7.2.80)$$

由式(7.2.47)可得

$$\mathscr{L}_2^\xi = \frac{\rho c^2}{T}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{2}(\gamma - 1)(\mathscr{L}_1^\xi + \mathscr{L}_5^\xi) \qquad (7.2.81)$$

(3) 超声速出流边界

对于 $\xi = N_\xi$ 处的超声速出流而言,因为 5 个特征值 λ_i^ξ 均大于零,故 5 个特征波均是跑出波。于是在出口边界处不需规定任何边界条件。此时,$\mathscr{L}_i^\xi(i=1,2,3,4,5)$可由式(7.2.26),用单侧差分计算出来。然后求解式(7.2.31)即可确定出流边界处的全部流动参数。

(4) 亚声速出流边界

对于 $\xi = N_\xi$ 处的亚声速出流而言,因为对应于 $\mathscr{L}_2^\xi$,$\mathscr{L}_3^\xi$,$\mathscr{L}_4^\xi$ 和 $\mathscr{L}_5^\xi$ 的 4 个特征波是跑出计算域的,而对应于 $\mathscr{L}_1^\xi$ 的 1 个特征波则是进入计算域的。于是在出口边界处应规定 1 个量,例如静压 p。

此时,$\mathscr{L}_2^\xi$,$\mathscr{L}_3^\xi$,$\mathscr{L}_4^\xi$ 和 $\mathscr{L}_5^\xi$ 可由式(7.2.26)中后 4 式用单侧差分计算出来,而 $\mathscr{L}_1^\xi$ 则是由式(7.2.46)及规定的边界条件所决定

$$\mathscr{L}_1^\xi = -\mathscr{L}_5^\xi - 2\frac{\partial p}{\partial t} \qquad (7.2.82)$$

如果在出口边界处规定的是不随时间变化的静压 p_k,则在时间相关边界条件中是这样处理的:首先,在初始时刻,在出口边界处规定静压为 p_k;然后要求在随后所有时刻均满足$\partial p/\partial t = 0$。此时,式(7.2.82)简化为

$$\mathscr{L}_1^\xi = -\mathscr{L}_5^\xi \qquad (7.2.83)$$

全部 $\mathscr{L}_i^\xi(i=1,2,3,4,5)$都确定以后,求解方程组(7.2.31)中的前 4 个方程,即可确定出流边界处的 ρ,u,v 和 w。

(5) 滑移壁面边界

对于 $\zeta=1$ 处的滑移壁面而言，$W=0$，只有对应于 $\mathscr{L}_1^{\zeta}$ 的 1 个特征波是跑出计算域的。此时 $\mathscr{L}_1^{\zeta}$ 由式(7.2.39)中第 1 式用单侧差分计算出来，而 $\mathscr{L}_2^{\zeta}$，$\mathscr{L}_3^{\zeta}$，$\mathscr{L}_4^{\zeta}$ 和 $\mathscr{L}_5^{\zeta}$ 应由相应的 LODI 关系式及规定的边界条件确定。

因为 $\lambda_2^{\zeta}=\lambda_3^{\zeta}=\lambda_4^{\zeta}=W=0$，所以 $\mathscr{L}_2^{\zeta}$，$\mathscr{L}_3^{\zeta}$ 和 $\mathscr{L}_4^{\zeta}$ 的确定是不明确的，但是从式(7.2.39)可见，令 $\mathscr{L}_2^{\zeta}=\mathscr{L}_3^{\zeta}=\mathscr{L}_4^{\zeta}=0$ 与它们的定义是自洽的。

下面来介绍 $\mathscr{L}_5^{\zeta}$ 的确定方法。原则上，它应由 ζ 方向边界的 LODI 关系式及滑移壁面边界条件来决定。

从式(7.2.37)中略去切向导数项，即可得到 ζ 方向边界处的 LODI 关系式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{2}(\mathscr{L}_5^{\zeta}+\mathscr{L}_1^{\zeta})+\mathscr{L}_2^{\zeta}\right]=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\zeta_x}{2\beta_{\zeta}\rho c}(\mathscr{L}_5^{\zeta}-\mathscr{L}_1^{\zeta})+\frac{1}{\beta_{\zeta}^2\zeta_z}[(\zeta_y^2+\zeta_z^2)\mathscr{L}_3^{\zeta}-\zeta_x\zeta_y\mathscr{L}_4^{\zeta}]=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\zeta_y}{2\beta_{\zeta}\rho c}(\mathscr{L}_5^{\zeta}-\mathscr{L}_1^{\zeta})-\frac{1}{\beta_{\zeta}^2\zeta_z}[\zeta_x\zeta_y\mathscr{L}_3^{\zeta}-(\zeta_x^2+\zeta_z^2)\mathscr{L}_4^{\zeta}]=0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\zeta_z}{2\beta_{\zeta}\rho c}(\mathscr{L}_5^{\zeta}-\mathscr{L}_1^{\zeta})-\frac{1}{\beta_{\zeta}^2}[\zeta_x\mathscr{L}_3^{\zeta}+\zeta_y\mathscr{L}_4^{\zeta}]=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{1}{2}(\mathscr{L}_5^{\zeta}+\mathscr{L}_1^{\zeta})=0$$

由其中的第 2、3、4 三个方程很容易得到

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-\frac{\beta_{\zeta}}{2\rho c}(\mathscr{L}_5^{\zeta}-\mathscr{L}_1^{\zeta}) \tag{7.2.83}$$

而此时规定的滑移壁面边界条件是 $W=0$。于是时间相关边界条件要求在初始时刻规定滑移壁面处 $W=0$，然后要求在随后所有时刻满足 $\frac{\partial W}{\partial t}=0$。于是由式(7.2.83)可得

$$\mathscr{L}_5^{\zeta}=\mathscr{L}_1^{\zeta} \tag{7.2.84}$$

全部 $\mathscr{L}_i^\xi(i=1,2,3,4,5)$都确定以后，求解方程组(7.2.37)，即可确定滑移壁面处的全部流动参数。

(6) 远场边界

对于 $\zeta=N_\zeta$ 的远场边界而言，特征波的传播方向是由局部特征值 λ_i^ξ 的符号自动地决定的。对于那些跑出波的与波幅的时间变化率成正比的 $\mathscr{L}_i^\xi$ 可用式(7.2.39)中相应的式子和单侧差分计算出来；而对于那些进入波的 $\mathscr{L}_i^\xi$ 则应由边界条件来决定。因为远场边界属于人工边界，因此该处的边界条件应好比没有边界，意即无人为的边界反射。于是采用无反射边界条件是适当的。无反射边界条件要求进入波的波幅不随时间而改变，它等于说没有进入波。从数学上说，就是规定进入波的 $\mathscr{L}_i^\xi=0$。

归结起来有

$$\mathscr{L}_i^\xi=\begin{cases}\mathscr{L}_i^\xi,\text{由式(7.2.39)中相应式子决定}, & \lambda_i>0\\ 0, & \lambda_i<0\end{cases} \tag{7.2.85}$$

全部 $\mathscr{L}_i^\xi(i=1,2,3,4,5)$都确定以后，求解方程组(7.2.37)，即可确定远场边界处的全部流动参数。

7.3 Navier-Stokes 方程边界条件的数学处理

在前一节中介绍了 K. W. Thompson[8]对 Euler 方程提出的“时间相关边界条件”。T. J. Poinsot 和 S. K. Lele[8]把它推广到 Navier-Stokes 方程的情况，并命名为 Navier-Stokes 方程的特征边界条件(NSCBC)。蒋莉等人[11]把上述工作从 Cartesian 坐标系推广到任意曲线坐标系的情况。

NSCBC 的基本思想可归结如下。

(1) 对于 Navier-Stokes 方程所规定的边界条件的数目等于 Navier-Stokes 方程初边值问题的适定性理论分析所得到的边界条件的数目。

(2) 对 Navier-Stokes 方程所提的具体的边界条件是按如下方法规定的:无黏(与黏性无关的)边界条件,再补充相应数目的与黏性有关的边界条件。

(3) Navier-Stokes 方程边界条件的数学处理方法是与 Euler 方程情形中相类似的。首先,将 Navier-Stokes 方程中的双曲型部分(即无黏部分)进行特征分析,分别得到与三个曲线坐标轴垂直的边界处的支配方程——三个坐标方向的修正的 Navier-Stokes 方程;其次是确定 $\mathscr{L}_i(i=1,2,3,4,5)$的值:对应于跑出波的 $\mathscr{L}_i$ 是由它的定义式并用单侧差分计算出来的,而对应于进入波的 $\mathscr{L}_i$ 则是由无黏边界条件及相应的 LODI 关系式来确定的;最后,求解边界处的支配方程以确定该边界处的流动参数。只是在最后这一步中才用到与黏性有关的边界条件。

7.3.1 Navier-Stokes 方程

任意曲线坐标系(ξ,η,ζ)中三维无量纲守恒型的 Navier-Stokes 方程可表示为

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{Q}}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{\boldsymbol{E}}-\hat{\boldsymbol{E}}_V)+\frac{\partial}{\partial \eta}(\hat{\boldsymbol{F}}-\hat{\boldsymbol{F}}_V)+\frac{\partial}{\partial \zeta}(\hat{\boldsymbol{G}}-\hat{\boldsymbol{G}}_V)=0 \tag{7.3.1}$$

式中,$\hat{\boldsymbol{Q}}$,$\hat{\boldsymbol{E}}$,$\hat{\boldsymbol{F}}$,$\hat{\boldsymbol{G}}$ 的表达式与 Euler 方程中相同。

$$\hat{\boldsymbol{E}}_V=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}0\\ \xi_x\tau_{xx}+\xi_y\tau_{yx}+\xi_z\tau_{zx}\\ \xi_x\tau_{xy}+\xi_y\tau_{yy}+\xi_z\tau_{zy}\\ \xi_x\tau_{xz}+\xi_y\tau_{yz}+\xi_z\tau_{zz}\\ \xi_x q_x+\xi_y q_y+\xi_z q_z\end{bmatrix},\quad \hat{\boldsymbol{F}}_V=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}0\\ \eta_x\tau_{xx}+\eta_y\tau_{yx}+\eta_z\tau_{zx}\\ \eta_x\tau_{xy}+\eta_y\tau_{yy}+\eta_z\tau_{zy}\\ \eta_x\tau_{xz}+\eta_y\tau_{yz}+\eta_z\tau_{zz}\\ \eta_x q_x+\eta_y q_y+\eta_z q_z\end{bmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{G}}_V=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}0\\ \zeta_x\tau_{xx}+\zeta_y\tau_{yx}+\zeta_z\tau_{zx}\\ \zeta_x\tau_{xy}+\zeta_y\tau_{yy}+\zeta_z\tau_{zy}\\ \zeta_x\tau_{xz}+\zeta_y\tau_{yz}+\zeta_z\tau_{zz}\\ \zeta_x q_x+\zeta_y q_y+\zeta_z q_z\end{bmatrix},$$

$$\tau_{xx} = \frac{2\mu}{3Re}\Big[2\left(\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) -$$

$$\left(\xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial v}{\partial \zeta}\right) - \left(\xi_z \frac{\partial w}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial w}{\partial \eta} + \zeta_z \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)\Big]$$

$$\tau_{yy} = \frac{2\mu}{3Re}\Big[2\left(\xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial v}{\partial \zeta}\right) -$$

$$\left(\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) - \left(\xi_z \frac{\partial w}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial w}{\partial \eta} + \zeta_z \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)\Big]$$

$$\tau_{zz} = \frac{2\mu}{3Re}\Big[2\left(\xi_z \frac{\partial w}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial w}{\partial \eta} + \zeta_z \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) -$$

$$\left(\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) - \left(\xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial v}{\partial \zeta}\right)\Big]$$

$$\tau_{xy} = \frac{\mu}{Re}\Big[\left(\xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) + \left(\xi_x \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial v}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial v}{\partial \zeta}\right)\Big]$$

$$\tau_{xz} = \frac{\mu}{Re}\Big[\left(\xi_z \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial u}{\partial \eta} + \zeta_z \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) + \left(\xi_x \frac{\partial w}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial w}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)\Big]$$

$$\tau_{yz} = \frac{\mu}{Re}\Big[\left(\xi_z \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial v}{\partial \eta} + \zeta_z \frac{\partial v}{\partial \zeta}\right) + \left(\xi_y \frac{\partial w}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial w}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)\Big]$$

$$q_x = u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + \frac{\mu}{(\gamma - 1)Ma_r^2 RePr} \times$$

$$\left(\xi_x \frac{\partial T}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial T}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial T}{\partial \zeta}\right)$$

$$q_y = u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + \frac{\mu}{(\gamma - 1)Ma_r^2 RePr} \times$$

$$\left(\xi_y \frac{\partial T}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial T}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial T}{\partial \zeta}\right)$$

$$q_z = u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} + \frac{\mu}{(\gamma - 1)Ma_r^2 RePr} \times$$

$$\left(\xi_z \frac{\partial T}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial T}{\partial \eta} + \zeta_z \frac{\partial T}{\partial \zeta}\right)$$

$$Ma_r = \frac{U_r^*}{\sqrt{\gamma R^* T_r^*}}, Re = \frac{\rho_r^* U_r^* L_r^*}{\mu_r^*}, Pr = \frac{C_p^* \mu_r^*}{K_r^*},$$

$$\gamma = \frac{C_p^*}{C_v^*}$$

黏性系数由如下无量纲形式的 Sutherland 公式决定

$$\mu = T^{\frac{3}{2}} \frac{1+S}{T+S}, \quad S = \frac{110.3}{T_r^*}$$

式中上标 * 表示有量纲量，而下标 r 表示参考值。

7.3.2 特征分析

众所周知，Navier-Stokes 方程并不是双曲型的，因此对 Navier-Stokes 方程作特征分析的数学上的合理性可能是有争议的。在这里假设，对于 Navier-Stokes 方程而言，其特征波仅与 Navier-Stokes 方程中的双曲型部分有关联。换句话说，将借助于与 Euler 方程同样的方法来识别波，并忽略与扩散过程有关的波。

采用与推导方程式(7.2.5)同样的方法可得到任意曲线坐标系(ξ,η,ζ)中的原始变量形式的 Navier-Stokes 方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + J\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{E}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{F}}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{G}}}{\partial \zeta}\right) -$$

$$J\hat{P}^{-1}\left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{E}}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{F}}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{G}}_v}{\partial \zeta}\right) = 0 \qquad (7.3.2)$$

它可被改写成如下非守恒的形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \boldsymbol{A}^{\xi}\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \xi} + \boldsymbol{C}^{\xi} = 0 \qquad (7.3.3)$$

式中矩阵 $\boldsymbol{A}^{\xi}$ 与式(7.2.7)中所表示的相同，而 $\boldsymbol{C}^{\xi}$ 的表示式为

$$
\boldsymbol{C}^{\xi} = \begin{bmatrix}
V\dfrac{\partial\rho}{\partial\eta} + \rho\left(\eta_x\dfrac{\partial u}{\partial\eta} + \eta_y\dfrac{\partial v}{\partial\eta} + \eta_z\dfrac{\partial w}{\partial\eta}\right) + W\dfrac{\partial\rho}{\partial\zeta} + \\
\rho\left(\zeta_x\dfrac{\partial u}{\partial\zeta} + \zeta_y\dfrac{\partial v}{\partial\zeta} + \zeta_z\dfrac{\partial w}{\partial\zeta}\right) + \mathrm{VIS1} \\
V\dfrac{\partial u}{\partial\eta} + \dfrac{1}{\rho}\eta_x\dfrac{\partial p}{\partial\eta} + W\dfrac{\partial u}{\partial\zeta} + \dfrac{1}{\rho}\zeta_x\dfrac{\partial p}{\partial\zeta} + \mathrm{VIS2} \\
V\dfrac{\partial v}{\partial\eta} + \dfrac{1}{\rho}\eta_y\dfrac{\partial p}{\partial\eta} + W\dfrac{\partial v}{\partial\zeta} + \dfrac{1}{\rho}\zeta_y\dfrac{\partial p}{\partial\zeta} + \mathrm{VIS3} \\
V\dfrac{\partial w}{\partial\eta} + \dfrac{1}{\rho}\eta_z\dfrac{\partial p}{\partial\eta} + W\dfrac{\partial w}{\partial\zeta} + \dfrac{1}{\rho}\zeta_z\dfrac{\partial p}{\partial\zeta} + \mathrm{VIS4} \\
V\dfrac{\partial p}{\partial\eta} + \gamma p\left(\eta_x\dfrac{\partial u}{\partial\eta} + \eta_y\dfrac{\partial v}{\partial\eta} + \eta_z\dfrac{\partial w}{\partial\eta}\right) + W\dfrac{\partial p}{\partial\zeta} + \\
\gamma p\left(\zeta_x\dfrac{\partial u}{\partial\zeta} + \zeta_y\dfrac{\partial v}{\partial\zeta} + \zeta_z\dfrac{\partial w}{\partial\zeta}\right) + \mathrm{VIS5}
\end{bmatrix}
\tag{7.3.4}
$$

因为，此时的矩阵 $\boldsymbol{A}_\xi$ 与 Euler 方程中的完全相同，因此 $\boldsymbol{A}_\xi$ 的特征值 λ_i^ξ、左特征向量 l_i^T、左特征向量矩阵 L_{A^ξ}、特征变量 $\mathscr{L}_i^\xi$、d_i^ξ 等都与 Euler 方程情形中的对应物完全相同。

垂直于 ξ 轴的边界处的支配方程——ξ 方向修正的 Navier-Stokes 方程为

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + d_1^\xi + V\frac{\partial\rho}{\partial\eta} + \rho\left(\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta} + \eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta} + \eta_z\frac{\partial w}{\partial\eta}\right) + W\frac{\partial\rho}{\partial\zeta} + \\
&\qquad \rho\left(\zeta_x\frac{\partial u}{\partial\zeta} + \zeta_y\frac{\partial v}{\partial\zeta} + \zeta_z\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right) + \mathrm{VIS1} = 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial t} + d_2^\xi + V\frac{\partial u}{\partial\eta} + \frac{1}{\rho}\eta_x\frac{\partial p}{\partial\eta} + W\frac{\partial u}{\partial\zeta} + \frac{1}{\rho}\zeta_x\frac{\partial p}{\partial\zeta} + \mathrm{VIS2} = 0 \\
&\frac{\partial v}{\partial t} + d_3^\xi + V\frac{\partial v}{\partial\eta} + \frac{1}{\rho}\eta_y\frac{\partial p}{\partial\eta} + W\frac{\partial v}{\partial\zeta} + \frac{1}{\rho}\zeta_y\frac{\partial p}{\partial\zeta} + \mathrm{VIS3} = 0 \\
&\frac{\partial w}{\partial t} + d_4^\xi + V\frac{\partial w}{\partial\eta} + \frac{1}{\rho}\eta_z\frac{\partial p}{\partial\eta} + W\frac{\partial w}{\partial\zeta} + \frac{1}{\rho}\zeta_z\frac{\partial p}{\partial\zeta} + \mathrm{VIS4} = 0
\end{aligned}\right\}
$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial p}{\partial t} + d_5^\xi + V\frac{\partial p}{\partial \eta} + \gamma p\left(\eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} + \eta_z \frac{\partial w}{\partial \eta}\right) + W\frac{\partial p}{\partial \zeta} + \\ &\quad \gamma p\left(\zeta_x \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \zeta_y \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \zeta_z \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) + \mathrm{VIS5} = 0\end{aligned}\right\} \tag{7.3.5}$$

式中，d_i^ξ（$i = 1,2,3,4,5$）由式（7.2.30）中相应式子决定，而 $\mathscr{L}_i^\xi$（$i=1,2,3,4,5$）由式(7.2.26)中相应式子决定

$$\begin{bmatrix}\mathrm{VIS1}\\ \mathrm{VIS2}\\ \mathrm{VIS3}\\ \mathrm{VIS4}\\ \mathrm{VIS5}\end{bmatrix} = J\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{E}}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{F}}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{G}}_v}{\partial \zeta}\right) \tag{7.3.6}$$

式中，矩阵 $\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}$的表达式见式(7.2.4)。

完全类似地可得到垂直于 η 轴边界处的支配方程——η 方向修正的 Navier-Stokes 方程如下

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \rho}{\partial t} + d_1^\eta + W\frac{\partial \rho}{\partial \zeta} + \rho\left(\zeta_x \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \zeta_y \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \zeta_z \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) + U\frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \\ &\quad \rho\left(\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \xi_z \frac{\partial w}{\partial \xi}\right) + \mathrm{VIS1} = 0\\ &\frac{\partial u}{\partial t} + d_2^\eta + W\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{1}{\rho}\zeta_x\frac{\partial p}{\partial \zeta} + U\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho}\xi_x\frac{\partial p}{\partial \xi} + \mathrm{VIS2} = 0\\ &\frac{\partial v}{\partial t} + d_3^\eta + W\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{1}{\rho}\zeta_y\frac{\partial p}{\partial \zeta} + U\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho}\xi_y\frac{\partial p}{\partial \xi} + \mathrm{VIS3} = 0\\ &\frac{\partial w}{\partial t} + d_4^\eta + W\frac{\partial w}{\partial \zeta} + \frac{1}{\rho}\zeta_z\frac{\partial p}{\partial \zeta} + U\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho}\xi_z\frac{\partial p}{\partial \xi} + \mathrm{VIS4} = 0\\ &\frac{\partial p}{\partial t} + d_5^\eta + W\frac{\partial p}{\partial \zeta} + \gamma p\left(\zeta_x \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \zeta_y \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \zeta_z \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) + U\frac{\partial p}{\partial \xi} + \\ &\quad \gamma p\left(\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \xi_z \frac{\partial w}{\partial \xi}\right) + \mathrm{VIS5} = 0\end{aligned}\right\} \tag{7.3.7}$$

式中，d_i^η（$i=1,2,3,4,5$）由式(7.2.33)中相应式子决定。而 $\mathscr{L}_i^\eta$

$(i=1,2,3,4,5)$由式(7.2.34)中相应式子决定。

垂直于 ζ 轴的边界处的支配方程——ζ 方向修正的 Navier-Stokes 方程为

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t}+d_1^\zeta+V\frac{\partial \rho}{\partial \eta}+\rho\left(\eta_x\frac{\partial u}{\partial \eta}+\eta_y\frac{\partial v}{\partial \eta}+\eta_z\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)+U\frac{\partial \rho}{\partial \xi}+\\
&\qquad\rho\left(\xi_x\frac{\partial u}{\partial \xi}+\xi_y\frac{\partial v}{\partial \xi}+\xi_z\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)+\mathrm{VIS1}=0\\
&\frac{\partial u}{\partial t}+d_2^\zeta+V\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{1}{\rho}\eta_x\frac{\partial p}{\partial \eta}+U\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{\rho}\xi_x\frac{\partial p}{\partial \xi}+\mathrm{VIS2}=0\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+d_3^\zeta+V\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{1}{\rho}\eta_y\frac{\partial p}{\partial \eta}+U\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{1}{\rho}\xi_y\frac{\partial p}{\partial \xi}+\mathrm{VIS3}=0\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+d_4^\zeta+V\frac{\partial w}{\partial \eta}+\frac{1}{\rho}\eta_z\frac{\partial p}{\partial \eta}+U\frac{\partial w}{\partial \xi}+\frac{1}{\rho}\xi_z\frac{\partial p}{\partial \xi}+\mathrm{VIS4}=0\\
&\frac{\partial p}{\partial t}+d_5^\zeta+V\frac{\partial p}{\partial \eta}+\gamma p\left(\eta_x\frac{\partial u}{\partial \eta}+\eta_y\frac{\partial v}{\partial \eta}+\eta_z\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)+U\frac{\partial p}{\partial \xi}+\\
&\qquad\gamma p\left(\xi_x\frac{\partial u}{\partial \xi}+\xi_y\frac{\partial v}{\partial \xi}+\xi_z\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)+\mathrm{VIS5}=0
\end{aligned}\right\}
\tag{7.3.8}
$$

式中,$d_i^\zeta(i=1,2,3,4,5)$由式(7.2.38)中相应式子决定,而 $\mathscr{L}_i^\zeta$ $(i=1,2,3,4,5)$由式(7.2.39)中相应式子决定。

7.3.3 $\mathscr{L}_i$ 的确定与 LODI 关系式

这方面的内容与 Euler 方程情形中完全相同,故式(7.2.42)~式(7.2.53)在 Navier-Stokes 方程情况中仍然成立。

7.3.4 各类边界条件的数学处理

仍以图 7-1 中所示的计算域及各类边界为例说明之。

(1) 超声速入流边界

对于 $\xi=1$ 处的超声速入流而言,因为 5 个特征值 $\lambda_i^\xi(i=1,2,3,4,5)$均大于零,故 5 个特征波都是进入波。于是在进口边界

处，全部流动参数都是被给定的。

(2) 亚声速入流边界

对于 $\xi=1$ 处的亚声速入流而言，因为对应于 $\mathscr{L}_2^\xi,\mathscr{L}_3^\xi,\mathscr{L}_4^\xi$ 和 $\mathscr{L}_5^\xi$ 的 4 个特征波是进入波，而对应于 $\mathscr{L}_1^\xi$ 的 1 个特征波是跑出波。于是在该入流边界处应规定 4 个无黏边界条件（例如，规定 u,v,w,T 4 个量），而根据 Navier-Stokes 方程初边值问题的适定性，该处要求规定 5 个边界条件，于是补充 1 个与黏性有关的条件 $\left(\text{例如}，\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi_x\tau_{xx}+\xi_y\tau_{yx}+\xi_z\tau_{zx})=0\right)$。

此时，$\mathscr{L}_1^\xi$ 由式(7.2.26)中的第 1 式用单侧差分计算得到；而 $\mathscr{L}_2^\xi,\mathscr{L}_3^\xi,\mathscr{L}_4^\xi$ 和 $\mathscr{L}_5^\xi$ 分别由式(7.2.81)，式(7.2.78)，式(7.2.79)和式(7.2.80)确定。

密度 ρ 由求解式(7.3.5)中的第 1 个方程得到。但此时应考虑到上述 1 个与黏性有关的边界条件，它可能使所求解的边界处的支配方程得到一定的简化。

(3) 超声速出流边界

对于 $\xi=N_\xi$ 处的超声速出流而言，因为 5 个特征值 $\lambda_i^\xi(i=1,2,3,4,5)$ 均大于零，故 5 个特征波均是跑出波。于是在出口边界处不需规定任何无黏边界条件，而根据 Navier-Stokes 方程初边值问题的适定性，该处要求规定 4 个边界条件，因此需要规定 4 个与黏性有关的边界条件[例如，$\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi_x\tau_{xx}+\xi_y\tau_{yx}+\xi_z\tau_{zx})=0$，$\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi_x\tau_{xy}+\xi_y\tau_{yy}+\xi_z\tau_{zy})=0$，$\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi_x\tau_{xz}+\xi_y\tau_{yz}+\xi_z\tau_{zz})=0$，以及 $\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi_xq_x+\xi_yq_y+\xi_zq_z)=0$]。

此时，$\mathscr{L}_i^\xi(i=1,2,3,4,5)$ 可由式(7.2.26)中相应式子用单侧差分计算出来。然后在考虑到上述 4 个与黏性有关的边界条件的前提下求解方程组(7.3.5)，即可确定该出口边界处的全部流动参数。

(4) 亚声速出流边界

对于 $\xi=N_\xi$ 处的亚声速出流而言，对应于 $\mathscr{L}_2^\xi,\mathscr{L}_3^\xi,\mathscr{L}_4^\xi$ 和 $\mathscr{L}_5^\xi$ 的 4 个特征波是跑出波，而对应于 $\mathscr{L}_1^\xi$ 的 1 个特征波是进入波。于是在出口边界处应规定 1 个无黏边界条件(例如，规定出口边界处的压力 p，或者规定无限远处的压力 p_∞)。而按照 Navier-Stokes 方程初边值问题的适定性要求规定 4 个边界条件，因此需要补充 3 个与黏性有关的边界条件[例如，$\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi_x\tau_{xy}+\xi_y\tau_{yy}+\xi_z\tau_{zy})=0$，$\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi_x\tau_{xz}+\xi_y\tau_{yz}+\xi_z\tau_{zz})=0$ 以及 $\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi_x q_x+\xi_y q_y+\xi_z q_z)=0$]。

此时，$\mathscr{L}_2^\xi,\mathscr{L}_3^\xi,\mathscr{L}_4^\xi$ 和 $\mathscr{L}_5^\xi$ 可分别由式(7.2.26)中的后 4 式计算出来；而 $\mathscr{L}_1^\xi$ 则是由无黏边界条件与相应的 LODI 关系式确定。

若无黏边界条件是规定出口边界处的压力 p(称为亚声速有反射出流边界条件)，则从式(7.2.46)可得

$$\mathscr{L}_1^\xi=-\mathscr{L}_5^\xi-2\frac{\partial p}{\partial t}\tag{7.3.9}$$

若无黏边界条件是规定无限远处的压力 p_∞(称为亚声速无反射出流边界条件)，则令[8]

$$\mathscr{L}_1^\xi=K(p-p_\infty)\tag{7.3.10}$$

式中，$K=\sigma(1-Ma_{\max}^2)c/L$，该处 $Ma_{\max}$ 是流动中的最大 Mach 数，L 是求解域的一个特征长度，σ 是一个常数。边界条件式(7.3.10)对于一维问题是精确的无反射的，但在多维问题情况中并不是精确的无反射的，实际上不是以正入射到达边界的波并不完全透过边界，而会导致微小程度的反射，但仍然能抑制数值振荡并保证适定性[8]。

全部 $\mathscr{L}_i^\xi(i=1,2,3,4,5)$ 确定后，对于在出口边界处规定压力 p 的情况，求解式(7.3.5)中前 4 个方程并考虑到上述 3 个与黏性有关的边界条件，就可确定该边界处的 ρ,u,v 和 w。而对于规定无限远处压力 p_∞ 的情况，则须求解式(7.3.5)中全部 5 个方程并考虑到上述 3 个与黏性有关的边界条件，就可确定该边界处的全部流动参数。

(5) 等温无滑移壁面

对于 $\zeta=1$ 处的等温无滑移壁面而言，$\lambda_1^{\zeta}<0$，$\lambda_2^{\zeta}=\lambda_3^{\zeta}=\lambda_4^{\zeta}=0$，$\lambda_5^{\zeta}>0$。此时规定 4 个与黏性无关的边界条件，即 $u=v=w=0$，$T_{\zeta=1}=T_w(\xi,\eta)$，正好与 Navier-Stokes 方程初边值问题适定性要求的边界条件数目一致。

对应于 $\mathscr{L}_1^{\zeta}$ 的特征波是跑出波，故 $\mathscr{L}_1^{\zeta}$ 由其定义式(7.2.39)中的第 1 式用单侧差分计算出来。而 $\mathscr{L}_2^{\zeta}$，$\mathscr{L}_3^{\zeta}$，$\mathscr{L}_4^{\zeta}$ 和 $\mathscr{L}_5^{\zeta}$ 则应由边界条件及相应的 LODI 关系式确定。

ζ 方向的 LODI 关系式可从式(7.3.8)中略去黏性项及切向导数项后得到

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{2}(\mathscr{L}_5^{\zeta}+\mathscr{L}_1^{\zeta})+\mathscr{L}_2^{\zeta}\right]=0 \tag{7.3.11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\zeta_x}{2\beta_\zeta\rho c}(\mathscr{L}_5^{\zeta}-\mathscr{L}_1^{\zeta})+\frac{1}{\beta_\zeta^2\zeta_z}[(\zeta_y^2+\zeta_z^2)\mathscr{L}_3^{\zeta}-\zeta_x\zeta_y\mathscr{L}_4^{\zeta}]=0 \tag{7.3.12}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\zeta_y}{2\beta_\zeta\rho c}(\mathscr{L}_5^{\zeta}-\mathscr{L}_1^{\zeta})-\frac{1}{\beta_\zeta^2\zeta_z}[\zeta_x\zeta_y\mathscr{L}_3^{\zeta}-(\zeta_x^2+\zeta_z^2)\mathscr{L}_4^{\zeta}]=0 \tag{7.3.13}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\zeta_z}{2\beta_\zeta\rho c}(\mathscr{L}_5^{\zeta}-\mathscr{L}_1^{\zeta})-\frac{1}{\beta_\zeta^2}[\zeta_x\mathscr{L}_3^{\zeta}+\zeta_y\mathscr{L}_4^{\zeta}]=0 \tag{7.3.14}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{1}{2}(\mathscr{L}_5^{\zeta}+\mathscr{L}_1^{\zeta})=0 \tag{7.3.15}$$

由式(7.3.11)和式(7.3.15)可得

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{T}{\rho c^2}\left[\mathscr{L}_2^{\zeta}-\frac{1}{2}(\gamma-1)(\mathscr{L}_1^{\zeta}+\mathscr{L}_5^{\zeta})\right] \tag{7.3.16}$$

在 NSCBC 中要求在初始时刻适当地在物面边界上规定：在 $\zeta=1$ 面上，$u=v=w=0$；以及 $T=T_w(\xi,\eta)$，然后要求在随后所有时刻都满足

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial T}{\partial t}=0$$

由式(7.3.12)和式(7.3.14)可得

$$\mathscr{L}_3^{\xi} = \zeta_x \frac{\partial w}{\partial t} - \zeta_z \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

由式(7.3.13)和式(7.3.14)可得

$$\mathscr{L}_4^{\xi} = \zeta_y \frac{\partial w}{\partial t} - \zeta_z \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

再由式(7.3.12)易得

$$\mathscr{L}_5^{\xi} = \mathscr{L}_1^{\xi}$$

由式(7.3.16)可得

$$\mathscr{L}_2^{\xi} = \frac{1}{2}(\gamma - 1)(\mathscr{L}_1^{\xi} + \mathscr{L}_5^{\xi})$$

全部 $\mathscr{L}_i^{\xi}(i=1,2,3,4,5)$确定后,求解式(7.3.8)中的第 1 个方程,即可确定该壁面边界处的密度 ρ,从而全部流动参数都可被求出。

(6) 无滑移绝热壁面

对于 $\zeta=1$ 处的无滑移绝热壁面而言,$\lambda_1^{\xi}<0,\lambda_2^{\xi}=\lambda_3^{\xi}=\lambda_4^{\xi}=0,\lambda_5^{\xi}>0$。此时规定 3 个与黏性无关的条件:$u=v=w=0$ 及 1 个与黏性有关的条件:$\frac{\partial T}{\partial \zeta}=0$。它正好与 Navier-Stokes 方程初边值问题的适定性所要求的边界条件的数日相符。

对应于 $\mathscr{L}_1^{\xi}$ 的特征波是跑出波,故 $\mathscr{L}_1^{\xi}$ 由其定义式(7.2.39)中的第 1 式用单侧差分计算出来。而 $\mathscr{L}_2^{\xi}$,$\mathscr{L}_3^{\xi}$,$\mathscr{L}_4^{\xi}$ 和 $\mathscr{L}_5^{\xi}$ 则应由边界条件及相应的 LODI 关系式确定。

与等温无滑移壁面情况相同,可得

$$\mathscr{L}_3^{\xi} = 0$$

$$\mathscr{L}_4^{\xi} = 0$$

$$\mathscr{L}_5^{\xi} = \mathscr{L}_1^{\xi}$$

剩下的问题是如何确定 $\mathscr{L}_2^{\xi}$? 由式(7.2.39)可解得

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathscr{L}_5^{\xi}}{W + C_{\zeta}} + \frac{\mathscr{L}_1^{\xi}}{W - C_{\zeta}}\right] \tag{7.3.17}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \zeta} = \frac{1}{c^2}\left[\frac{\mathscr{L}_2^\zeta}{W} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathscr{L}_5^\zeta}{W + C_\zeta} + \frac{\mathscr{L}_1^\zeta}{W - C_\zeta}\right)\right] \quad (7.3.18)$$

由此可得

$$\frac{\partial T}{\partial \zeta} = \frac{T}{\rho c^2}\left[-\frac{\mathscr{L}_2^\zeta}{W} + \frac{\gamma - 1}{2}\left(\frac{\mathscr{L}_5^\zeta}{W + C_\zeta} + \frac{\mathscr{L}_1^\zeta}{W - C_\zeta}\right)\right] \quad (7.3.19)$$

因为对于绝热无滑移壁面而言，$\partial T/\partial \zeta = 0$，$W = 0$，又由上面知 $\mathscr{L}_5^\zeta = \mathscr{L}_1^\zeta$，于是由式(7.3.19)可得

$$\mathscr{L}_2^\zeta = 0$$

全部 $\mathscr{L}_i^\zeta(i = 1,2,3,4,5)$都确定后，求解式(7.3.8)中的第1个和第5个方程即可求出该壁面边界处的 ρ 和 p。

(7) 远场边界

对于 $\zeta = N_\zeta$ 的远场边界而言，诸特征波的传播方向是由局部特征值 λ_i^ζ 是正还是负自动地决定的。对应于跑出波的 $\mathscr{L}_i^\zeta$ 可用式(7.2.39)中相应的式子和单侧差分计算出来；而对于那些进入波的 $\mathscr{L}_i^\zeta$，根据无反射边界条件应规定它们等于零，于是有

$$\mathscr{L}_i^\zeta = \begin{cases} \mathscr{L}_i^\zeta, \text{由式(7.2.39)中相应式子决定}, & \lambda_i > 0 \\ 0, & \lambda_i < 0 \end{cases}$$

全部 $\mathscr{L}_i^\zeta(i = 1,2,3,4,5)$都确定以后，求解方程组(7.3.8)，即可求出该远场边界处的全部流动参数。

第8章　网格生成技术

8.1　引　　言

我们知道,许许多多各式各样的流体力学问题可以归结为偏微分方程的定解问题。数值求解偏微分方程的定解问题首先要将求解域离散成点或微元体积(单元)的集合;然后在此集合内构造一个代数方程组以逼近欲求解的偏微分方程组及其定解条件;最后求解此代数方程组以获得一组离散值,它们逼近原偏微分方程组定解问题在整个求解域内的解。

如何将求解域离散成适当的点或微元体积的集合,这就是网格生成技术所需要研究的问题。

8.1.1　网格生成技术的发展历史

计算流体动力学(CFD)创建之初,由于当时计算机条件较现在要落后得多,一是计算速度慢,二是计算机内存小,三是计算机与用户的界面很差,因此只能求解一些极为简单的模型问题,对网格生成技术的要求不高,一般用简单的代数解析方法就可生成这些模型问题的网格。

随着计算机技术的迅猛发展,计算机的运算速度成几何级数增长,计算机的内存也极大地扩大,而且计算机的输入输出设备较之当初有了本质的发展,特别是近十年内又出现了大规模的并行计算机,这使得 CFD 工作者可以研究大型的三维复杂流动问题。复杂问题的含义之一是指流场边界的复杂性。这种复杂性迫使 CFD 工作者发展相应的网格生成技术。

生成一个计算域的网格有两层含义:其一是要在计算域内分布适当的点的集合;其二是要建立这些点之间的关联信息,这样才便于有效地进行信息的储存和取用。建立这种关联信息的最简单方法是采用所谓“结构网格”,例如规则的矩形网格,在每一个方向上定义一个“指标”(I,J,K)。通过指标的增减可以很快确立网格点间的邻近关系。的确,在 CFD 发展之初,人们采用的正是这种规则的矩形网格。

由于研究问题外形的复杂化,矩形网格已不能模拟曲面边界,为此,CFD 工作者发展了贴体的曲线坐标网格。通过曲线坐标系到直角坐标系的变换,将物理空间的曲线坐标网格变换为计算空间的矩形网格,得到一个规范化的计算域,从而在规范化的计算域中可以用一个统一的程序来求解,由此可以编制通用的计算软件。

对于多体或多部件的三维复杂组合体问题,统一的(或单块的)贴体网格已不能满足需求。为了克服上述困难,在 20 世纪 80 年代初期相继出现了多种分块网格技术[1],如:组合对接网格(composite grids,图 8-1(a))、搭接网格(patched grids,(图 8-1(b))和重叠网格(overlapping or chimera grids,(图 8-1(c))。

重叠网格始见于 20 世纪 80 年代初 J.L.Steger 等[2]的开创性

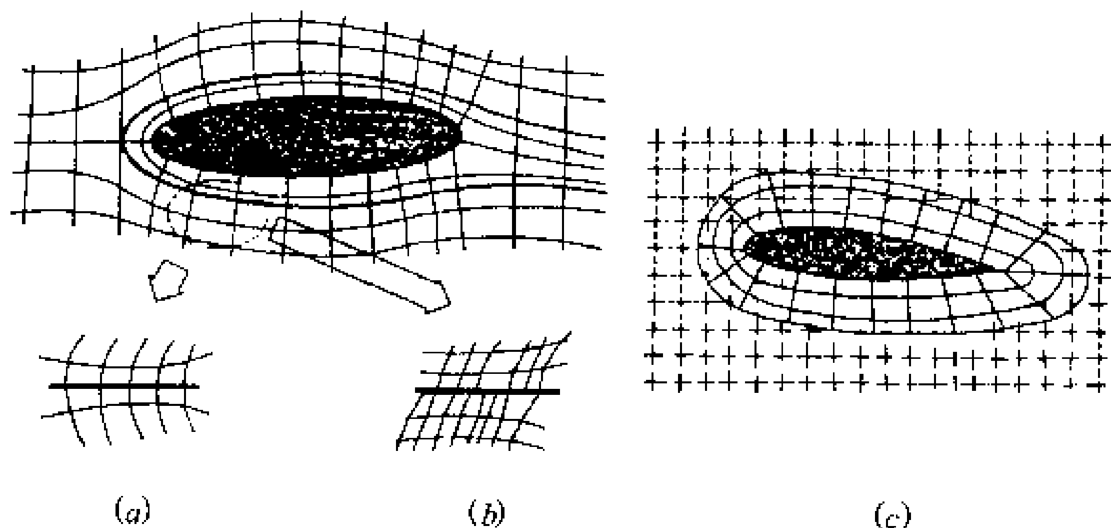


图 8-1　三类分块网格

(a)组合对接网格;(b)搭接网格;(c)重叠网格。

工作。其基本思想是：对复杂外形的每一部分生成贴体网格，各部分之间存在一定的区域重叠；在计算过程中，通过不断的数据插值交换更新各部分重叠区的边界值，进而求得全流场解。重叠网格已被成功地推广应用于三维复杂外形绕流计算。但是其本身仍有一些不足之处。首先，重叠区数据的插值精度直接影响计算结果的精度和收敛性。目前常采用的是所谓三线性插值。在大梯度区域用线性插值显然不能满足要求，而复杂流动的物理量大梯度区域往往事先无法确定，重叠区内出现物理量大梯度变化是极有可能的。其次，重叠网格间的通量守恒性难以严格保证。

组合对接网格[3]和搭接网格[4]产生于重叠网格之前。它们的基本思想是：先将整个计算域分割成几何形状简单的子域，然后在各子域内生成结构网格。这种方法能在各子域内生成高质量的网格，其不足之处在于子域间的连接处理比较困难。对于组合对接网格，各子域交界面上的网格节点要求重合，这必然会影响交界面处的网格质量；对于搭接网格，同样存在重叠网格中的插值和通量守恒性的问题。另外，对于三维复杂外形，划分的子域可能上百个，合理处理各子域间的边界就变得非常繁琐，往往需要付出大量的手工劳动。

到20世纪80年代中、后期，CFD工作者开始尝试采用非结构网格[5-7]（一般在二维时为三角形，在三维时为四面体）。非结构网格最早来源于固体力学的有限元结构强度计算，较之结构网格，它具有以下显著的优点：一是它舍去了网格节点间的结构性限制，节点和单元的分布是任意的，因此它具有优越的几何灵活性，适应于离散任意复杂的几何外形；二是其随机的数据结构非常利于进行网格自适应。由于上述独特的优点，非结构网格技术倍受关注，各种非结构网格自动生成方法应运而生。由于网格生成过程中，各种方法均采用一定准则进行优化判定，因而能生成高质量的网格，且很容易控制网格的大小和节点的疏密。一旦确定边界，则在计算域内可以自动生成网格，无需分块或人为干预。

尽管非结构网格具有上面介绍的无比优越性，但是它往往需

要较结构网格大得多的计算机内存空间和更长的计算 CPU 时间。为了克服非结构网格需要大量的计算机资源的不足，近年来许多 CFD 工作者尝试将结构网格和非结构网格相混合，形成所谓混合网格方法[8-11]。这样一方面发挥非结构网格的优势，可以离散复杂的计算域，具有可自适应性；另一方面又可节省计算机资源，达到事半功倍的效果。混合网格技术将是未来网格技术发展的必然趋势。

8.1.2 流场计算对网格的基本要求

用数值方法得到的离散解能否比较满意地逼近原偏微分方程组定解问题的解，不仅取决于对原偏微分方程组所采用的离散化方法（即内点计算格式）及边界条件的离散化方法（即边界点计算格式），而且还取决于离散点的分布情况。

例如，当用差商来求导数的近似值时，在某一点处的导数近似值的精确度不仅取决于所采用的差商表达式，还与该离散点本身的位置以及邻近离散点的分布情况有关。今以一维函数 $\phi = \phi(x)$为例说明之。如果对自变量 x 取步长为 Δx 的均匀间隔，并用中心差商来逼近某点 $x = x_i$ 处的一阶导数，则有

$$\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{6}\left(\frac{\mathrm{d}^3\phi}{\mathrm{d}x^3}\right)_i + \cdots \qquad (8.1.1)$$

若用上式右端第一项（中心差商）作为一阶导数的近似，那么上式右端第二项以及以后各项之和即为截断误差。显然，此截断误差的大小与网格点 $x = x_i$ 的位置以及步长 Δx 有关。若 $\phi(x)$代表某一流动参数分布，则在流动参数变化剧烈的区域（$\mathrm{d}^3\phi/\mathrm{d}x^3$）的绝对值可能很大，因此，为了保证一定的计算精度就要求采用很密的网格。如果对整个流场采用均匀网格，那么就会有很多计算点，从而需要很大的计算机内存以及很多的计算机时。因此，人们希望研究出这样一种网格生成技术，它能在流场参数变化大的地方生成较密的网格，而在流动参数变化平缓的地方生成较稀的网格。

这种网格生成技术既可以保证所需要的计算精度,同时还达到了节省计算机内存和计算机时的目的。

另外,一般说来,许多流体力学实际问题的边界几何形状是非常复杂的。要得到高精度的解,边界条件处理本身应保证适当的精度。而在边界处理中,往往有些物理量是通过插值方法得到的。插值的精度直接影响边界条件处理的精度,为此一般要求边界附近的网格线尽量与边界面正交,而且在边界附近还须保证一定的网格节点密度,过稀的网格将导致计算精度的降低。

由上述可知,对于数值求解偏微分方程组的定解问题而言,网格点的分布是十分重要的。在达到相同解的精确度的前提下,合适的网格分布往往可以大大减少网格点的数目,从而大大节省所需要的计算机内存和计算机时。计算经验表明,在某些问题中,不合适的网格分布还可能导致计算过程的不稳定或不收敛。这就是近二十年来,网格生成技术成为计算流体动力学中前沿研究课题的主要原因之一。

对于结构网格而言,从几何观点来看,网格生成技术实际是确定一个适当的影射,它将计算区域中均匀分布的计算点影射到物理空间中相应的网格点上。一般说来,希望这个影射能满足如下要求。

(1) 此影射必须是一一对应的。这个要求是不言而喻的,因为如果影射不是一一对应的,计算将无法进行。

(2) 此影射将物理空间中不规则的求解域影射为计算空间中的正交六面体,并且将物理空间中的各段边界面分别影射为相应的计算空间中的坐标平面。这就是贴体坐标系。

(3) 通常计算空间中的均匀网格往往对应物理空间中的不均匀网格。我们要求物理空间中网格不均匀性的变化是逐渐过渡的,而不是突然过渡的。

例如,考察某一个具有连续一阶导数的函数 $\phi=\phi(x)$,若影射 $x=x(\xi)$将物理空间 x 影射到计算空间ξ,为了求出 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x$,利用上述影射关系,先在 ξ 空间中计算出$\phi(\xi)$及 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\xi$,然后再利用

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d\phi/d\xi}{dx/d\xi} \tag{8.1.2}$$

来计算 $d\phi/dx$。一般说来，由计算空间算出的 $d\phi/d\xi$ 是连续的，如果 $dx/d\xi$ 不连续，则由式(8.1.2)求出的 $d\phi/dx$ 将是不连续的。但原问题中的 $d\phi/dx$ 却是连续的。之所以会得到这个不可靠的结果正是因为影射关系式 $x = x(\xi)$ 的一阶导数不连续的缘故。$dx/d\xi$ 在某一点不连续意味着计算空间 ξ 中的均匀网格，对应在物理空间 x 的相应点处网格密度的变化太突然，于是导致该点附近的计算结果有较大误差。同样，若问题中涉及某流动参数的二阶导数，如 $d^2\phi/dx^2$，则要求影射关系式 $x = x(\xi)$ 的二阶导数是连续的，等等。这就是物理问题对影射关系式的要求。

另外，即使影射关系式是足够光滑的，影射关系的不均匀性，例如一维问题中的 $dx/d\xi \neq \text{const}$，也会带来附加的截断误差。今说明之。设 $q(\lambda)$ 是一个足够光滑的单调变化函数，并且当 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 时对应有 $0 \leqslant q(\lambda) \leqslant 1$。现在令一维问题中物理坐标 x 和计算坐标 ξ 间的影射关系为

$$x = q(\xi/N) \tag{8.1.3}$$

其中 ξ 取 $0,1,2,\cdots,N$。我们知道，在均匀网格下，用中心差分计算一阶导数时，其精度为二阶，即截断误差和步长的二次方成正比，或和网格数 N 的二次方成反比。对于不均匀网格，需要研究两个问题：一是在网格分布规律确定的情况下（即函数 $q(\lambda)$ 不变，随着网格数的增加，截断误差如何变化；二是在网格数不变的情况下，不同的网格分布对截断误差有什么影响。

现以一维函数 $f(x)$ 的一阶导数 f_x 为例来讨论上述问题。f_x 在计算坐标 ξ 中的表达式为

$$f_x = f_\xi / x_\xi \tag{8.1.4}$$

假设 x_ξ 可由解析式进行计算，而 f_ξ 采用中心差分来计算，则有

$$f_x = (f_{i+1} - f_{i-1})/2(x_\xi)_i + T_1 \tag{8.1.5}$$

其中 T_1 为截断误差，易于得到

$$T_1 = -\frac{1}{6}\left(\frac{f_{\xi\xi\xi}}{x_\xi}\right)_i - \frac{1}{120}\left(\frac{f_{\xi\xi\xi\xi\xi}}{x_\xi}\right)_i - \cdots \tag{8.1.6}$$

因为 f 对 x 的各阶导数与网格分布无关，因此不是直接由式(8.1.6)中 f 对 ξ 的各阶导数来估计截断误差，而是将它们变换为 f 对 x 的导数之后再进行分析。由式(8.1.4)得

$$f_\xi = x_\xi f_x \tag{8.1.7}$$

将上式逐次对 ξ 求导，可得

$$\begin{aligned} f_{\xi\xi} &= x_{\xi\xi} f_x + x_\xi^2 f_{xx} \\ f_{\xi\xi\xi} &= x_{\xi\xi\xi} f_x + 3x_\xi x_{\xi\xi} f_{xx} + x_\xi^3 f_{xxx} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{8.1.8}$$

由此可见，$f_{\xi\xi\xi}$的表达式中每一项均包含着对 ξ 的三次求导。这个结论对于更高阶的导数也是成立的，例如 $f_{\xi\xi\xi\xi\xi}$的表达式中每一项均包含着对 ξ 的五次求导。

由式(8.1.3)可得

$$\begin{aligned} x_\xi &= q'/N \\ x_{\xi\xi} &= q''/N^2 \\ x_{\xi\xi\xi} &= q'''/N^3 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{8.1.9}$$

由此可知，$f_{\xi\xi\xi}$和 $1/N^3$ 成正比，而 $f_{\xi\xi\xi\xi\xi}$和 $1/N^5$ 成正比。因此截断误差 T_1 的主要项是式(8.1.6)的右端第一项，即

$$T_1 = -\frac{1}{6}\frac{x_{\xi\xi\xi}}{x_\xi} f_x - \frac{1}{2} x_{\xi\xi} f_{xx} - \frac{1}{6} x_\xi^2 f_{xxx} = \frac{1}{N^2}\left(-\frac{1}{6}\frac{q'''}{q'} f_x - \frac{1}{2} q'' f_{xx} - \frac{1}{6} q'^2 f_{xxx}\right) \tag{8.1.10}$$

可见，此时截断误差仍然和 $1/N^2$ 成正比，意即对于不均匀的网格，用上述中心差分计算一阶导数 f_x 时仍具有二阶精度。

式(8.1.10)右端第三项即为通常的均匀网格中截断误差的估计式，而含 $x_{\xi\xi}$和 $x_{\xi\xi\xi}$的项和网格分布的不均匀性有关，故这两项就是由于网格分布的不均匀性导致的附加截断误差。

最后,数值计算的经验表明,从数值稳定性的角度来考虑,两相邻网格尺度的比值应该小于 2。

(4) 物理空间中的网格应尽可能正交或接近正交,因为正交性差的歪斜网格往往会带来较大的计算误差。今举例说明之。考察如下坐标变换

$$\xi = x/\cos\theta, \quad \eta = y - x\tan\theta \tag{8.1.11a}$$

$$x = \xi\cos\theta, \quad y = \eta + \xi\sin\theta \tag{8.1.11b}$$

其中 $\theta = \text{const}$。物理平面(x, y)与计算平面(ξ, η)上网格间对应关系的示意图示于图 8-2 中。

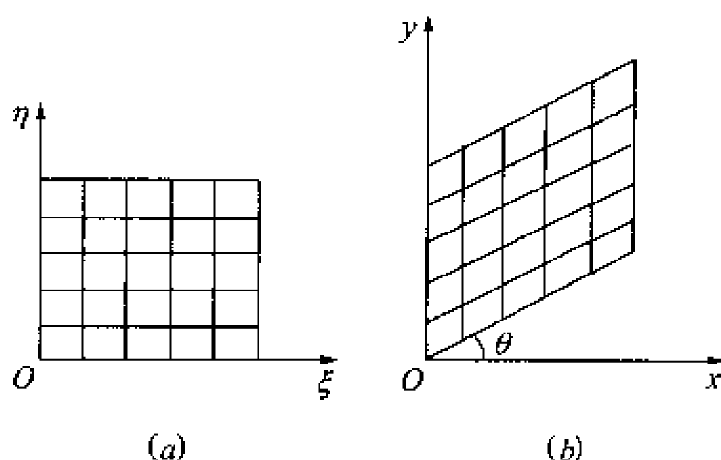


图 8-2 计算平面和物理平面上的网格

(a)计算平面上的网格;(b)物理平面上的网格。

由上图知,当 $\theta = 0$ 时,计算平面上的微元矩形网格对应的物理平面上也是正交的;当 θ 愈接近 $\pi/2$,则对应在物理平面上的网格歪斜愈严重。今考虑某个二维函数 $f(x, y)$的偏导数$\partial f/\partial x$,有

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{8.1.12}$$

由式(8.1.11a)知,当 $\theta \to \pi/2$ 时,$\frac{\partial \xi}{\partial x} \to \infty$,$\frac{\partial \eta}{\partial x} \to \infty$。因此从式(8.1.12)知,当 θ 接近于 $\pi/2$ 时,右端两项的绝对值都很大,但通常$\partial f/\partial x$ 不会特别大,故根据式(8.1.12)来计算时,它将是两个大数(指绝对值)求和时大部分互相抵消的结果,因而由此算出$\partial f/\partial x$的误差可能较大。

还应该强调指出，特别在边界附近，网格的正交或接近正交使得边界条件的履行更加直截了当和准确，从而对计算结果的精确度具有更大影响。

不仅如此，由于非线性问题的数值求解往往要进行迭代运算，计算实践表明，正交性好的网格往往迭代过程的收敛也好。

(5) 前面已提及，为了既保证计算精度而又节省内存和机时，必须在流动参数变化大的地方分布密网格。在某些问题中，在求解流场之前就大致知道流场的哪些区域流动参数变化大。例如机翼的低速或亚声速无黏流问题中，机翼前、后缘附近的流动参数变化比较剧烈；又例如高 *Re* 数黏流中物面附近的流动参数变化也相当大。因而对于这些问题来说，我们事先就可在机翼的前、后缘附近分布密网格。但是在另一些问题中，事先并不知道流场的哪些区域流动参数变化剧烈，例如当流场出现激波时，就属于这种情况。当应用激波捕捉法对带有激波的流场进行计算时，激波被抹平为在有限几个网格内流动参数的急剧变化，因此为了提高数值解的精确度，就要求在激波附近布置密网格。然而我们事先并不知道激波的位置，为此必须根据流场解的结果来自动地布置网格。这就是所谓的自适应网格技术。

(6) 若有可能，一族网格线应尽量接近流线。以上是生成结构网格的一些基本要求，当然其中的一些要求对非结构网格也同样适用。例如网格尺度要求光滑过渡，网格的形状要尽量正规(结构网格要求网格尽量正交，非结构网格要求单元尽量为正三角形或正四面体)，网格自适应技术(这正是非结构网格的优势)，等等。由于篇幅的限制，这里就不一一详述了。

8.1.3 网格与计算格式精度的关系

由于计算技术的提高和流场解算方法的进步，因而复杂流动数值模拟的研究工作越来越多。计算所采用的物理模型由全速势方程过渡到 Euler 方程，又从 Euler 方程发展到抛物化的 Navier-Stokes 方程，并进一步发展为层流 Navier-Stoks 方程和加湍流模

型的湍流 Navier-Stoks 方程。人们的研究重点也由过去的无黏流转为黏性流，试图通过对黏性流的数值计算，模拟真实的流动现象，揭示未知的流动机理，并进而为实际的工程应用提供更加可靠的数值依据。在进行复杂黏性流动数值模拟的过程中，有的文献使用几十万个网格点，有的则使用数百万甚至上千万个网格点；有的采用重叠网格或搭接网格，有的采用非结构网格。比较其同一复杂外形绕流用同一解算方法，但不同的网格布局和不同的网格点数的计算结果，可以发现它们在分离区、物面拐角区或背风区等区域有显著的差异，并且计算收敛时间很不相同[12]。这就提出"多少网格点合宜"、"网格点如何布局"和"采用何种网格可减少计算时间"的问题。关于这个问题在第 5 章的 5.1 节中已作过分析，这里不重复了。

8.2 网格生成技术概述

网格生成技术可以分为三大类，即结构网格、非结构网格和结构/非结构混合网格。以下对这几类网格生成技术加以简要概述。

8.2.1 结构网格生成技术概述

结构网格生成技术大致可分为如下几种。

(1) 代数方法

前面已经指出，结构网格生成问题实际上就是用适当的方法生成一个曲线坐标系(计算坐标系)。而生成一个曲线坐标系的问题可以归结为：根据计算空间中规则的计算域边界上规定的相应笛卡儿坐标值来生成计算域内部笛卡儿坐标值的分布。

当然，可以根据计算域边界上规定的笛卡儿坐标值用内插值法直接生成计算域内部笛卡儿坐标值的分布。此种网格生成方法称为网格的代数生成方法或简称为代数方法。它主要是利用一些线性和非线性的(例如多项式或三次样条插值)、一维或多维的插值公式来生成网格。

代数方法的主要优点是应用简便、计算工作量小以及能比较直观地控制网格的形状和密度。而它的主要缺点如下。

(i) 对于复杂的边界形状,有时很难找到合适的插值函数和插值方法。

(ii) 一般说来由于缺乏固有的平滑机制,边界坡度的间断往往会传播到流场的内部。

(2) 保角变换方法

这种方法是利用解析的复变函数来完成物理平面到计算平面的影射。

保角变换方法的主要优点是能精确地保证网格的正交性,而它的主要缺点如下。

(i) 对于比较复杂的边界形状,有时难于找到相应的影射关系式。

(ii) 它的应用局限于二维问题。

不过,对于某些三维问题,有时可以沿某一方向取若干截面,并对每一个截面用保角变换方法生成网格,然后沿着垂直于截面的方向采用相应的插值方法来处理。

(3) 微分方程方法

在这类方法中,物理空间坐标和计算空间坐标之间是通过偏微分方程组联系起来的。根据用来生成贴体网格的偏微分方程的类型不同,又可分成椭圆型方程方法、双曲型方程方法和抛物型方程方法。

最常用的方法是椭圆型方程方法。因为对于大量的实际流体力学问题来说,物理空间中的求解域是几何形状比较复杂的已知封闭边界的区域,并且在封闭边界上的计算坐标对应值是给定的。这是一个典型的偏微分方程的边值问题,而椭圆型偏微分方程的边值问题是适定的。最简单的椭圆型方程是拉普拉斯方程,但使用得最广泛的是泊松方程,因为其中的非齐次项还可用来调节求解域中网格密度的分布。

如果只在求解域的一部分边界上规定计算坐标值,那么可采

用抛物型或双曲型偏微分方程来生成网格。例如当流场的内边界是给定的，而外边界则是任意的，就属于这种情况。

(4) 变分原理方法

在这类方法中，将生成网格所希望满足的要求表示成某个目标函数(泛函)取极值。这种方法常用于生成自适应网格，因为可以比较方便地将自适应网格的要求用某个变分原理来表示，然后再导出和该变分原理相应的偏微分方程，即 Euler 方程。

8.2.2 非结构网格生成技术概述

非结构网格方法由于其优越的几何灵活性而倍受青睐，因此各种非结构网格自动生成方法应运而生，其中主要有：四叉树/八叉树方法[5](Quadtree/Octree Method)、Delaunay 方法[6]和阵面推进法[7](Advancing Front Method)。

(1) 四叉树(二维)/八叉树(三维)方法

四叉树/八叉树方法的基本思想是先用一个较粗的矩形(二维)/立方体(三维)网格覆盖包含物体的整个计算域，然后按照网格尺度的要求不断细分矩形(立方体)，即将一个矩形分为四(八)个子矩形(立方体)，最后将各矩形(立方体)划分为三角形(四面体)。例如一个没有边上中间点的矩形可以划分为两个三角形，一个没有棱上中间点的立方体可以划分为五个或六个四面体。对于流场边界附近被边界切割的矩形(立方体)，则需考虑各种可能的情况，作特殊的划分。

四叉树/八叉树方法是直接将矩形/立方体划分为三角形/四面体，因此这种方法不涉及邻近点面的查寻，以及邻近单元间的相交性和相容性判断等问题，所以网格生成的速度很快。不足之处是网格质量较差，特别是在流场边界附近，被切割的矩形/立方体的形状可能千奇百怪，由此而划分的三角形/四面体的品质难以保证。尽管如此，四叉树/八叉树作为一种数据结构已被广泛应用于阵面推进法和 Delaunay 方法中[13]，以提高查寻效率。

(2) Delaunay 方法

Delaunay 三角化的依据是 Dirichlet 在 1850 年提出的一种利用已知点集将平面划分为凸多边形的理论。这一理论的基本思想是：假设平面内存在点集 $\{P_k\}, k = 1, 2, \cdots, N$，则能将此平面域划分成互不重合的 Dirichlet 子域或称 Voronoi 子域 $\{V_k\}, k = 1, 2, \cdots, N$。每个 Dirichlet 子域内包含点集中的一个点 P_k，而且对应于 P_k 的 V_k 内的任意点 P 到 P_k 的距离较之到点集中的其它点的距离最短。数学表述为 $V_k = \{P: |P - P_k| < |P - P_j|, \forall j \neq k\}$。连接相邻的 Voronoi 子域的包含点，即构成惟一的 Delaunay 三角形网格。后来 CFD 工作者将上述 Dirichlet 思想简化为 Delaunay 准则，即每个三角形的外接圆内不存在除其自身三个角点外的其它节点，进而给出划分三角形的简化方法：给定一个人工构造的初始简单三角形网格系，引入一个新点，标记并删除初始网格系中不满足 Delaunay 准则的三角形单元，形成一个多边形空洞，连接新点与多边形的顶点构成新的 Delaunay 网格系；重复上述过程，直至网格系达到所希望的分布。

Delaunay 方法有一个显著的优点，那就是它能使给定点集构成的网格系中每一个三角形单元的最小角尽可能最大，也就是说它能得到尽可能等边的高质量三角形单元。另外，Delaunay 方法在插入新点的过程中同时生成几个单元，因此网格生成的效率也较高，而且可以直接推广到三维问题。Delaunay 方法的不足之处在于它可能构成非凸域流场边界以外的单元或者与边界相交，即它不能保证流场边界的完整性。为了实现对任意外形的非结构网格生成，必须对流场边界附近的操作做某些限制，这可能使边界附近的网格丧失 Delaunay 性质。另外，对于三维复杂外形，初始网格的构造比较繁琐。

(3) 阵面推进法

阵面推进法的基本思想是首先将流场边界划分为小的阵元(Fronts)，构成初始阵面，然后选定某一阵元，将某一流场中新插入的点或者原阵面上已存在的点相连构成非结构单元。随着新单

元的生成，新的阵元产生，组成新的阵面。这一阵面不断向流场中推进，直至整个流场被非结构网格覆盖。

阵面推进法也有其自身的优缺点。首先阵面推进法的初始阵面即为流场边界，推进过程是阵面不断向流场内收缩的过程，所以不存在保证边界完整性的问题。另外阵面推进是一个局部过程，相交性判断仅涉及局部邻近的阵元，因而减少了由于计算机截断误差导致推进失败的可能性，而且局部性使得执行过程可以在推进的任一中间状态重新开始。再者，在流场内引入新点是伴随推进过程自动完成的，因而易于控制网格步长分布。但是每推进一步，仅生成一个单元，因此阵面推进法的效率较前两者要低。推进效率低的另一个原因是在每一步的推进过程中，都要涉及到邻近点、邻近阵元的搜索以及相交性判断。另外，尽管阵面推进的思想可以直接推广到三维问题，但在三维情况下，阵面的形状可能非常复杂，相交性判断就变得更加繁琐。

8.2.3 混合网格生成技术概述

如前所述，结构网格和非结构网格各有优缺点，自然而然，CFD 工作者想到如何将这二者的优势结合起来，同时克服各自的不足，由此混合网格技术应运而生，并越来越受到重视。

将结构网格和非结构网格混合起来的方案很多，其中主要有以下几种。

(1) 针对多部件或多体复杂外形的混合网格。这类混合网格是先对多体问题的每一单体或复杂外形的每一部件生成贴体结构网格，而在体与体、部件与部件之间的交界区挖出一个洞，洞内由非结构网格来填充。这类混合网格的代表有“拉链”网格(Zipper Grids)[9]和“龙型”网格(DRAGON Grids)[8]等。

(2) 针对黏性计算的混合网格[10]。这类混合网格是先在物面附近向外推出数层有一定压缩比的结构网格(二维)或半结构网格(三维，三棱柱)以模拟边界层，然后外场用非结构网格。事实上，在外形不太复杂的情况下，全场采用三棱柱网格也是可行的。

(3) 矩形与非结构混合网格[11]。矩形网格中不必进行Jacobian矩阵计算,具有比贴体网格更为简单更为快捷的优点。但其不足在于不易处理曲面边界,处理得不好就会出现所谓“台阶效应”。事实上,在物面附近采用非结构网格可以消除“台阶效应”,同时达到模拟复杂外形的目的。这就形成了矩形/非结构混合网格。为了计算黏性问题,亦可在物面附近采用结构(二维)或半结构(三维)网格,然后由非结构网格过渡到外场的矩形网格,由此构成矩形/非结构/半结构混合网格。

8.3 单块结构网格生成技术

在多种结构网格生成技术中,比较常用的是代数网格生成技术和微分方程生成技术。

8.3.1 网格的代数生成技术

用代数方法生成计算网格时,为了生成贴体网格,常常要用到“剪切变换函数”;为了控制网格的疏密,所谓“压缩或拉伸变换函数”也是很有用的。又因网格的代数生成技术本质上是以各种插值公式为基础的,因此在本小节中,首先介绍上述两个常用的变换函数,然后介绍三种常用的插值公式,最后介绍一种常用的网格代数生成技术。

(1) 剪切变换函数

今以二维问题为例。设物理平面上的求解域为:$x_1 \leqslant x \leqslant x_2$,$f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)$,如图 8-3 所示。

若采用如下变换

$$\xi = (x - x_1)/(x_2 - x_1)$$

$$\eta = [y - f_1(x)]/[f_2(x) - f_1(x)] \qquad (8.3.1)$$

则可将物理平面上的上述求解域$ABCD$影射到计算平面上

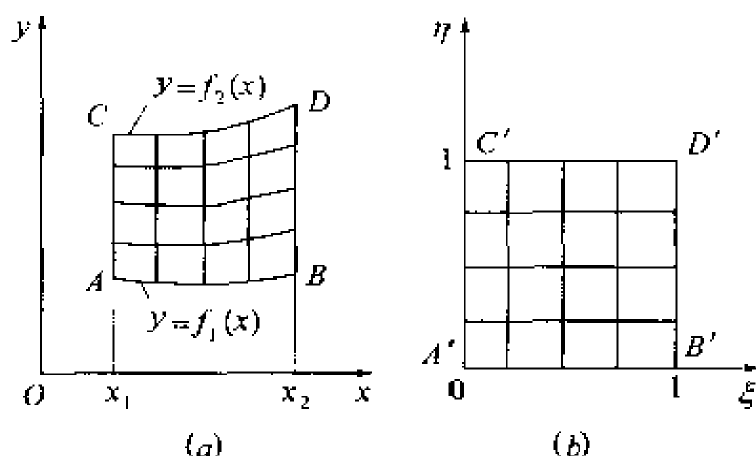


图 8-3　物理平面到计算平面的变换

（a）物理平面；（b）计算平面。

的计算域 $A'B'C'D'$：$0\leqslant\xi\leqslant1$ 和 $0\leqslant\eta\leqslant1$。而且计算平面上的每一个微元矩形对应于物理平面上的微元平行四边形。因此，式（8.3.1）称为剪切变换。

（2）压缩或拉伸变换函数

今考虑如图 8-4 所示的变换

$$x = f(\xi) \tag{8.3.2}$$

式中 x 为物理坐标，ξ 为计算坐标。由图可见，当在计算坐标中取等距网格时，$f'(\xi)$小的地方物理坐标的对应网格较密，而 $f'(\xi)$ 大的地方物理坐标的对应网格较稀。由此，适当选取函数 $f(\xi)$ 可使式（8.3.2）成为压缩或拉伸变换，通常选用指数函数。式（8.3.2）可用于一维问题，也可用于多维问题中的某一个物理坐标。

下面介绍两个应用实例。

（i）平面叶栅绕流

物理平面中的求解域为图 8-5（a）中的 $ABCDEFGHA$。其中 AB 和 EF 边界分别在叶栅前、后无限远处。$\overline{BCDE}$ 的方程为 $y=y_p(x)$，$\overline{AHGF}$ 的方程为 $y=y_s(x)$。

若采用如下坐标变换

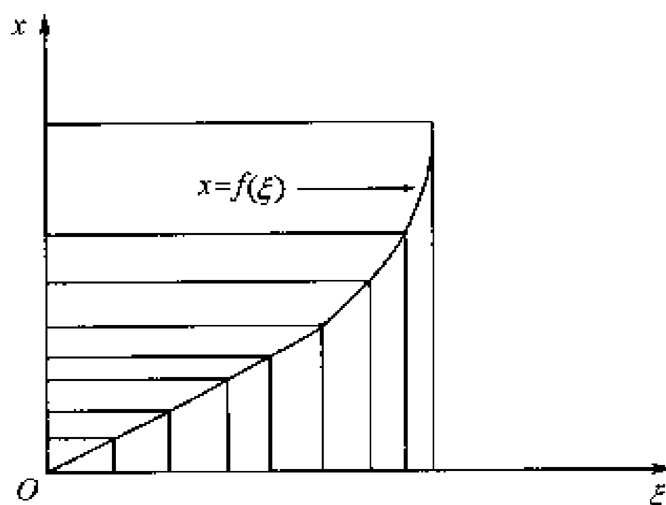


图 8-4 压缩或拉伸变换函数

$$
\xi = \xi(x) = \begin{cases} e^{x}, & -\infty \leqslant x \leqslant 0 \\ 1 + x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3 - e^{(1-x)}, & 1 \leqslant x \leqslant +\infty \end{cases}
$$

$$
\eta = \eta(x, y) = [y - y_s(x)]/[y_p(x) - y_s(x)] \tag{8.3.3}
$$

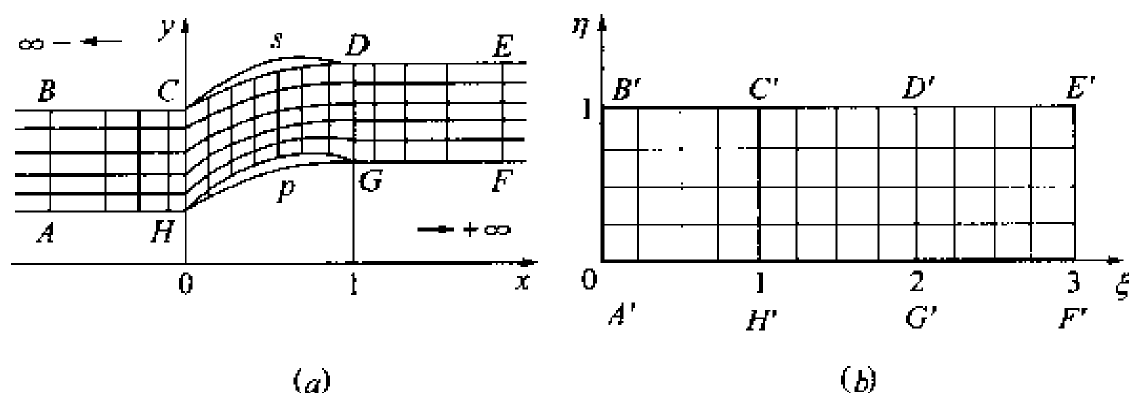


图 8-5 平面叶栅的 H 形网格

(a)物理平面内的网格；(b)计算平面内的网格。

则它将示于图 8-5(b)中的计算平面上的等距网格影射为示于图 8-5(a)中的物理平面上的不等距网格。其中在叶片区($0 \leqslant x \leqslant 1$)中 x 方向的网格间距 Δx 为常数，但在栅前和栅后由叶片前后缘截面分别向前后无限远处按指数规律伸展 Δx；而 y 方向的网格间距 Δy 为常数。

显然，由式(8.3.3)决定的(ξ, η)是贴体坐标系。由于它在物

理平面上对应的网格线的形状而称这样生成的网格为 H 形网格。这样的网格在平面叶栅的无黏绕流问题的数值计算中常被采用。文献[14]中成功地采用这个变换计算了压气机转子叶栅的二维无黏跨声速流场。应当指出，这种网格存在如下不足之处。

(a) 在叶片区中网格是非正交的。

(b) 在叶片前、后缘附近流动参数变化较剧烈，但该处的网格并没有被特殊加密。

(c) 求解域边界坡度的不连续传播到求解域内部（在图 8-5 (a)中的直线 CH 和 DG 上，所有 $\eta=\text{const}$ 的网格线的坡度均不连续）。

(ii) 网格线向某坐标线密集

利用指数函数还能使网格线向某一坐标线集中，这种变换在边界层类型的流动计算中特别有用。因为在大 Re 数流动中，边界层很薄，自然希望在物面附近网格线能密集，而在边界层以外的流场中网格可以较稀疏。

以(x,y)表示流动的物理平面，而(ξ,η)为计算平面。今考察平板的黏性绕流，$y=0$ 表示平板面。则如下的变换实现了(ξ,η)平面的等距网格对应于(x,y)平面上在 $y=0$ 附近网格密集的要求（见图 8-6）

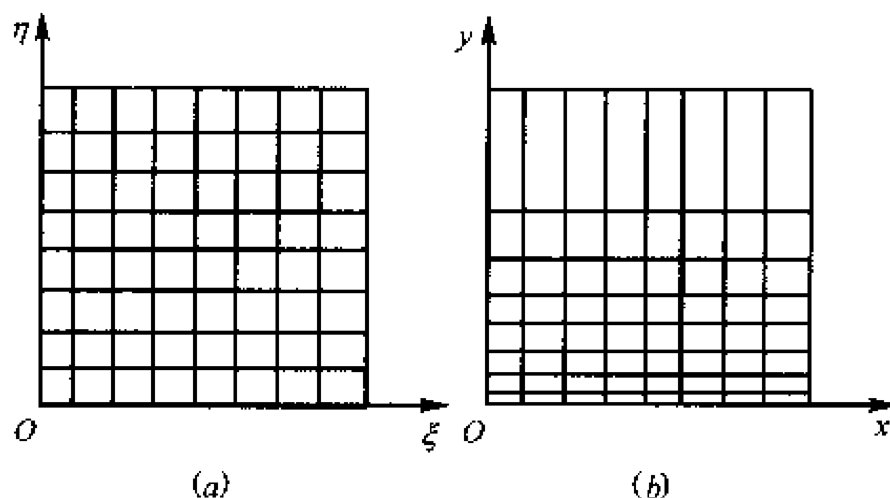


图 8-6　网格线向某坐标线的密集

(a)计算平面；(b)物理平面。

$$
\left.\begin{aligned}
x &= \xi \\
y &= \frac{e^{k\eta} - 1}{e^{k} - 1}
\end{aligned}\right\} \tag{8.3.4}
$$

这里 k 是一个可调参数,它的值由提出的要求来确定。显然,$y=0$ 对应于 $\eta=0$;$y=1$ 对应于 $\eta=1$。例如要求 η 方向 20 等分,即 $\Delta\eta=0.05$,且要求与 $\eta=0$ 毗邻的第一条坐标线 $\eta=0.05$ 对应于 $y=0.01\sim0.015$,即

$$
0.01 \sim 0.05 = \frac{e^{0.05k} - 1}{e^{k} - 1} \tag{8.3.5}
$$

由此求出 $k\approx2.5$。显然,k 越大,密集度就越高。

(3) 几个常用的一维插值公式

有许许多多各种不同的插值公式,这里仅援引三个常用的一维插值公式[15]。

(i) Lagrange 插值公式

设 ξ 为自变量,其定义域为 $0\leqslant\xi\leqslant I$,而因变矢量 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 表示物理空间中点(x,y,z)的矢径。若已知矢量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\xi)$在 N 个离散点:$\xi_1(=0),\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_N(=I)$上的值分别为 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3,\cdots,\boldsymbol{r}_N$,欲找一个多项式来近似地表达函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\xi)$,使得在上述 N 个离散点上刚好等于已知的相应离散值。

Lagrange 插值公式解决了上述问题,它可表示为

$$
\boldsymbol{r}(\xi) = \sum_{n=1}^{N} \Phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right)\cdot \boldsymbol{r}_n \tag{8.3.6}
$$

式中 Φ_N 是$(N-1)$次多项式

$$
\Phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right) = \prod_{\substack{l=1\\(l\neq n)}}^{N} \frac{\xi-\xi_l}{\xi_n-\xi_l} \tag{8.3.7}
$$

显然有 $\Phi_n\left(\frac{\xi_m}{I}\right)=\delta_{nm}=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 1, & m=n\end{cases}$

(ii) Hermite 插值公式

Lagrange 插值公式只拟合诸给定离散点处的函数值 $\boldsymbol{r}_n$,而 Hermite 插值公式则同时还要求拟合诸给定离散点处的导数 $\boldsymbol{r}'_n=$

$(\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}\xi)_n$。

已知函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\xi)$及其导数 $\boldsymbol{r}'(\xi)$在 N 个离散点 ξ_1，ξ_2，ξ_3，…，ξ_N的值分别为 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$，…，$\boldsymbol{r}_N$ 及 $\boldsymbol{r}'_1$，$\boldsymbol{r}'_2$，$\boldsymbol{r}'_3$，…，$\boldsymbol{r}'_N$，那么对于插值区间内任一点 ξ，可按下式计算函数值

$$\boldsymbol{r}(\xi)=\sum_{n=1}^{N}\omega_n\left(\frac{\xi}{I}\right)\cdot\boldsymbol{r}_n+\sum_{n=1}^{N}\psi_n\left(\frac{\xi}{I}\right)\cdot\boldsymbol{r}'_n \tag{8.3.8}$$

式中 ω_n 和 ψ_n 为相应的$(2N-1)$次多项式

$$\omega_n\left(\frac{\xi}{I}\right)=\left[1-2\left(\frac{\xi-\xi_n}{I}\right)\sum_{\substack{l=1\\(l\neq n)}}^{N}\left(\frac{I}{\xi_n-\xi_l}\right)\right]\phi_n^2\left(\frac{\xi}{I}\right) \tag{8.3.9a}$$

$$\psi_n\left(\frac{\xi}{I}\right)=\left(\frac{\xi-\xi_n}{I}\right)\phi_n^2\left(\frac{\xi}{I}\right) \tag{8.3.9b}$$

$$\phi_n^2\left(\frac{\xi}{I}\right)=\prod_{\substack{l=1\\(l\neq n)}}^{N}\left(\frac{\xi-\xi_l}{\xi_n-\xi_l}\right)^2 \tag{8.3.9c}$$

(iii) 样条插值公式

前面介绍的Lagrange插值公式和Hermite插值公式都是用多项式来表示的，因此插值函数在所有点处都是解析的(不仅函数连续，而且各阶导数都是连续的)。然而，当离散点数目增加时，表示插值函数的多项式的次数也随之提高，而高次多项式函数会出现波动，因而不能很好地逼近真实函数。所以人们宁愿用较低次数的多项式来分别代表每两个离散点之间的小区间内的函数，并且只要求各段函数在各小区间的分界点处保持函数本身以及适当阶的导数连续。这样的插值函数称为样条插值函数，这样的插值方法称为样条插值方法。

最常用的是三次样条插值方法。在该方法中，取每段的插值函数为三次多项式，并要求在各段的分界点处保持函数、一阶导数及二阶导数连续。

因为在每一段中插值函数是三次多项式，故其二阶导数是线性函数，于是有

$$r''(\xi) = \frac{\xi_{i+1} - \xi}{\xi_{i+1} - \xi_i} r''_i + \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} r''_{i+1}, \quad (\xi_i \leqslant \xi \leqslant \xi_{i+1}) \tag{8.3.10}$$

将上式对 ξ 进行两次积分，并利用条件 $r(\xi_i) = r_i$ 和 $r(\xi_{i+1}) = r_{i+1}$ 确定两个积分常数，可得

$$\begin{aligned} r(\xi) = & \frac{(\xi_{i+1} - \xi)^3}{6(\xi_{i+1} - \xi_i)} r''_i + \frac{(\xi - \xi_i)^3}{6(\xi_{i+1} - \xi_i)} r''_{i+1} + \\ & \left(\frac{1}{\xi_{i+1} - \xi_i} r_i - \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{6} r''_i\right)(\xi_{i+1} - \xi) + \\ & \left(\frac{1}{\xi_{i+1} - \xi_i} r_{i+1} - \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{6} r''_{i+1}\right)(\xi - \xi_i) \\ & (\xi_i \leqslant \xi \leqslant \xi_{i+1}) \end{aligned} \tag{8.3.11}$$

将上式对 ξ 求导，并令 $\xi = \xi_i$，得

$$r'_i = \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{6}(2r''_i + r''_{i+1}) + \frac{1}{\xi_{i+1} - \xi_i}(r_{i+1} - r_i) \tag{8.3.12}$$

对 $\xi_{i-1} \leqslant \xi \leqslant \xi_i$ 区间进行类似的运算，可得

$$r'_i = \frac{\xi_i - \xi_{i-1}}{6}(2r''_i + r''_{i-1}) + \frac{1}{\xi_i - \xi_{i-1}}(r_i - r_{i-1}) \tag{8.3.13}$$

一阶导数连续的条件要求式(8.3.12)和式(8.3.13)的右端相等，由此可得

$$\begin{aligned} (\xi_i - \xi_{i-1}) r''_{i-1} + 2(\xi_{i+1} - \xi_{i-1}) r''_i + (\xi_{i+1} - \xi_i) r''_{i+1} = \\ 6\left(\frac{r_{i+1} - r_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} - \frac{r_i - r_{i-1}}{\xi_i - \xi_{i-1}}\right) \\ (i = 2, 3, \cdots, N-1) \end{aligned} \tag{8.3.14}$$

这就是决定诸离散点（N 个离散点）上的 r'' 的线性代数方程组，为了使它封闭，还要补充在整个区间的两端点处的两个附加条件。通常取 $r''_1 = r''_N = 0$，它称为自然插值条件，相应于曲率最小，也即插值曲线最光滑的情况。这样，就得到了决定 N 个离散点处

r''的封闭的三对角线性代数方程组。应用追赶法即可求出 r''_i($i=1,2,\cdots,N$)。

将上面求出的 r''_i($i=1,2,\cdots,N$)代入式(8.3.11)就得到了所要的插值函数——三次样条插值函数。

(4) 超限插值法

现在介绍一种生成贴体网格的代数方法——超限插值法[16]。

设 x,y,z 是物理空间的坐标;ξ,η,ζ 是计算空间的坐标。并设与物理空间中求解域相对应的计算空间中的计算域是如下正六面体

$$0\leqslant\xi\leqslant1,0\leqslant\eta\leqslant1,0\leqslant\zeta\leqslant1 \qquad (8.3.15)$$

若作为计算空间点函数的物理空间点的矢径已知,即已知如下函数

$$\boldsymbol{r}(\xi,\eta,\zeta)=\begin{bmatrix}x(\xi,\eta,\zeta)\\y(\xi,\eta,\zeta)\\z(\xi,\eta,\zeta)\end{bmatrix},\quad\begin{matrix}0\leqslant\xi\leqslant1\\0\leqslant\eta\leqslant1\\0\leqslant\zeta\leqslant1\end{matrix} \qquad (8.3.16)$$

则计算空间与物理空间的影射关系就确定了。于是与计算空间均匀分布的计算点相对应的物理空间中的网格点分布即可求出,网格生成的任务即告完成。由此可知,网格生成的任务就在于确定上述函数式(8.3.16)。

下面将介绍确定上述函数的两种超限插值法——点方法与外表面法。

(i) 点超限插值方法

点超限插值方法的任务是:寻求一个从计算空间(ξ,η,ζ)到物理空间(x,y,z)的矢量变换函数式(8.3.16),使得已知的物理空间中一组有序的离散点 $\boldsymbol{S}_p=(x_{IJK},y_{IJK},z_{IJK})$,($I=1,2,\cdots,L$;$J=1,2,\cdots,M$;$K=1,2,\cdots,N$)与计算空间中一组确定的离散点 $\boldsymbol{S}_c=(\xi_I,\eta_J,\zeta_K)$相对应(见图 8-7)。

因为计算空间中每一个点是三个相互正交的坐标平面的交点,而在物理空间中的对应点则是三个对应曲面的交点。

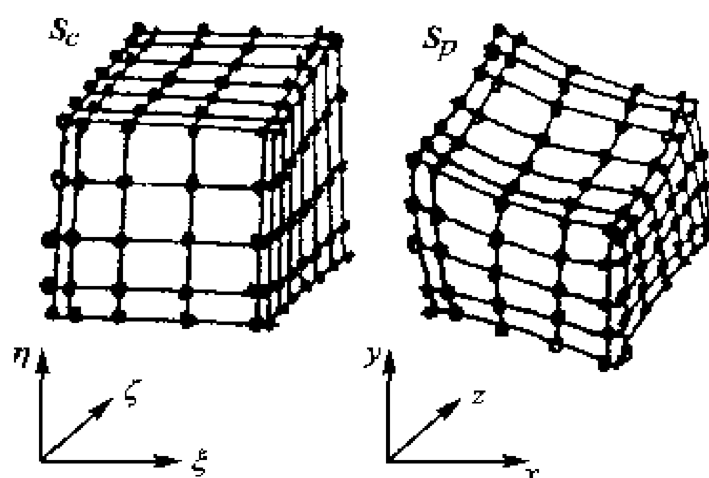


图 8-7

在点超限插值方法中，假定上述三组曲面是已知的，即已知

$$r(\xi_I,\eta,\zeta)=\begin{bmatrix}x(\xi_I,\eta,\zeta)\\y(\xi_I,\eta,\zeta)\\z(\xi_I,\eta,\zeta)\end{bmatrix}=\boldsymbol{a}_I(\eta,\zeta),\quad I=1,2,\cdots,L \tag{8.3.17a}$$

$$r(\xi,\eta_J,\zeta)=\begin{bmatrix}x(\xi,\eta_J,\zeta)\\y(\xi,\eta_J,\zeta)\\z(\xi,\eta_J,\zeta)\end{bmatrix}=\boldsymbol{b}_J(\xi,\zeta),\quad J=1,2,\cdots,M \tag{8.3.17b}$$

$$r(\xi,\eta,\zeta_K)=\begin{bmatrix}x(\xi,\eta,\zeta_K)\\y(\xi,\eta,\zeta_K)\\z(\xi,\eta,\zeta_K)\end{bmatrix}=\boldsymbol{c}_K(\xi,\eta),\quad K=1,2,\cdots,N \tag{8.3.17c}$$

应当指出，上面的 $\xi_I(I=1,2,\cdots,L)$；$\eta_J(J=1,2,\cdots,M)$；$\zeta_K(K=1,2,\cdots,N)$，一般说来并不一定是由 ξ,η,ζ 方向的区间等分得到的，因此(ξ_I,η_J,ζ_K)并不一定是计算空间中的计算点，从而$(x_{IJK},y_{IJK},z_{IJK})$也不一定是物理空间中的网格点。

现在，构造下列掺和(blending)函数

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_I(\xi), I=1,2,\cdots,L\\ \beta_J(\eta), J=1,2,\cdots,M\\ \gamma_K(\zeta), K=1,2,\cdots,N\end{array}\right\} \tag{8.3.18}$$

要求满足

$$\alpha_I(\xi_p)=\delta_{Ip}, \beta_J(\eta_p)=\delta_{Jp}, \gamma_K(\zeta_p)=\delta_{Kp} \tag{8.3.19}$$

其中 $p=1,2,\cdots$；δ_{ij}是通常的 Kronecker delta 记号。

于是，生成网格的插值函数可按下列三步确定

$$\boldsymbol{r}_1(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{I=1}^{L}\alpha_I(\xi)\boldsymbol{a}_I(\eta,\zeta) \tag{8.3.20a}$$

$$\boldsymbol{r}_2(\xi,\eta,\zeta)=\boldsymbol{r}_1(\xi,\eta,\zeta)+\sum_{J=1}^{M}\beta_J(\eta)[\boldsymbol{b}_J(\xi,\zeta)-\boldsymbol{r}_1(\xi,\eta_J,\zeta)] \tag{8.3.20b}$$

$$\boldsymbol{r}(\xi,\eta,\zeta)=\boldsymbol{r}_2(\xi,\eta,\zeta)+\sum_{K=1}^{N}\gamma_K(\zeta)[\boldsymbol{c}_K(\xi,\eta)-\boldsymbol{r}_2(\xi,\eta,\zeta_K)] \tag{8.3.20c}$$

以上三步是依次按 ξ,η,ζ 方向的插值顺序进行的，但实际上这三个方向的插值顺序是不重要的。

不难验证，当 $\xi=\xi_I(I=1,2,\cdots,L)$时，式(8.3.20)与曲面式(8.3.17a)完全拟合；类似地，$\eta=\eta_J(J=1,2,\cdots,M)$，或 $\zeta=\zeta_K(K=1,2,\cdots,N)$时，式(8.3.20)也和曲面式(8.3.17b)或式(8.3.17c)完全拟合。

由此可见，插值公式(8.3.20)不仅在有限个点上，而且和由式(8.3.17)所确定的三族曲面上全部的无限多个点上完全拟合，所以称它为超限插值法。

有两个问题应该作一说明。

(a) 掺和函数 $\alpha_I(\xi),\beta_J(\eta),\gamma_K(\zeta)$有各种可能的形式，它与有限元方法中的形函数很相似。掺和函数选取得好坏对变换性质的好坏起重要作用。通常可采用 Lagrange 多项式形式。

(b) 如何确定函数 $a_I(\eta,\zeta)$, $b_J(\xi,\zeta)$, $c_K(\xi,\eta)$也是一个值得研究的问题。这就是说,如何由空间一组有序的点来建立它们的曲面方程。通常是利用双向样条插值的方法来实现的。具体过程相当繁复,这里不作细说,可参见文献[16]。一般说来,点超限插值法的缺点是要求的几何数据太多。

(ii) 外表面超限插值法

这种方法的基本思想是根据已知的外表面位置及其若干阶导数来构造网格。

设与物理空间中求解域相对应的计算空间的计算域为如下正交六面体

$$\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2, \eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2, \zeta_1 \leqslant \zeta \leqslant \zeta_2 \quad (8.3.21)$$

已知

$$\frac{\partial^n \boldsymbol{r}}{\partial \xi^n}[\xi_L, \eta, \zeta] = \boldsymbol{A}_L^n(\eta,\zeta), \quad (L = 1,2; n = 0,1,2,\cdots,P) \quad (8.3.22a)$$

$$\frac{\partial^n \boldsymbol{r}}{\partial \eta^n}[\xi, \eta_L, \zeta] = \boldsymbol{B}_L^n(\xi,\zeta), \quad (L = 1,2; n = 0,1,2,\cdots,Q) \quad (8.3.22b)$$

$$\frac{\partial^n \boldsymbol{r}}{\partial \zeta^n}[\xi, \eta, \zeta_L] = \boldsymbol{C}_L^n(\xi,\eta), \quad (L = 1,2; n = 0,1,2,\cdots,R) \quad (8.3.22c)$$

显然,其中的一阶偏导数的值直接控制着边界附近的网格密度。

构造下列掺和函数

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_L^{(n)}(\xi), \quad (L = 1,2; n = 0,1,2,\cdots,P) \\ &\beta_L^{(n)}(\eta), \quad (L = 1,2; n = 0,1,2,\cdots,Q) \\ &\gamma_L^{(n)}(\zeta), \quad (L = 1,2; n = 0,1,2,\cdots,R) \end{aligned}\right\} \quad (8.3.23)$$

要求它们满足

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\partial^m \alpha_L^{(n)}(\xi)}{\partial \xi^m}\right]_{\xi=\xi_K} &= \delta_{LK}\delta_{nm}\\ \left[\frac{\partial^m \beta_L^{(n)}(\eta)}{\partial \eta^m}\right]_{\eta=\eta_K} &= \delta_{LK}\delta_{nm}\\ \left[\frac{\partial^m \gamma_L^{(n)}(\zeta)}{\partial \zeta^m}\right]_{\zeta=\zeta_K} &= \delta_{LK}\delta_{nm}\end{aligned}\right\} \tag{8.3.24}$$

$$(k = 1,2)$$

生成网格的插值函数可按下列三步确定出来

$$\boldsymbol{r}_1(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{L=1}^{2}\sum_{n=0}^{P}\alpha_L^{(n)}(\xi)\boldsymbol{A}_L^{(n)}(\eta,\zeta) \tag{8.3.25a}$$

$$\boldsymbol{r}_2(\xi,\eta,\zeta) = \boldsymbol{r}_1(\xi,\eta,\zeta) + \sum_{L=1}^{2}\sum_{n=0}^{Q}\beta_L^{(n)}(\eta) \times \left[\boldsymbol{B}_L^{(n)}(\xi,\zeta) - \frac{\partial^n \boldsymbol{r}_1}{\partial \eta^n}(\xi,\eta_L,\zeta)\right] \tag{8.3.25b}$$

$$\boldsymbol{r}(\xi,\eta,\zeta) = \boldsymbol{r}_2(\xi,\eta,\zeta) + \sum_{L=1}^{2}\sum_{n=0}^{R}\gamma_L^{(n)}(\zeta) \times \left[\boldsymbol{C}_L^{(n)}(\xi,\eta) - \frac{\partial^n \boldsymbol{r}_2}{\partial \zeta^n}(\xi,\eta,\zeta_L)\right] \tag{8.3.25c}$$

以上三步是依次按 ξ,η,ζ 方向的插值顺序进行的，但实际上这三个方向的插值顺序是可以改变的。

不难验证，当 $\xi=\xi_L\ (L=1,2)$ 时，式(8.3.25)与式(8.3.22a)完全一致；类似地，$\eta=\eta_L\ (L=1,2)$ 或 $\zeta=\zeta_L\ (L=1,2)$ 时，式(8.3.25)也和曲面式(8.3.22b)或式(8.3.22c)完全一致。

8.3.2 网格的微分方程生成技术

由求解偏微分方程来实现网格生成的方法称为网格的微分方程生成方法。应用最广的是椭圆型微分方程生成法，其次是双曲型或抛物型微分方程生成法。

(1) 椭圆型偏微分方程生成方法

自从 1974 年左右，J. F. Thompson 等人[17]利用椭圆型偏微分方程作为建立贴体网格系的网格生成方法之后，这种方法得到了广泛的应用与发展。其原因在于它既能处理二维或三维问题，又能处理定常和非定常问题；另一方面，Poisson 方程的源项又可起到调节网格疏密的作用，这是代数方法和保角变换方法所不能代替的；加之，生成的网格质量很高。下面以二维问题为例说明之。

前面已经指出，网格生成问题实际上就是用适当的方法生成一个贴体坐标系。所谓贴体坐标系就是一种曲线坐标系，它使得物理平面上所有的边界曲线（可以是多连通的），变为 (ξ,η) 平面上的坐标线（即 $\xi=\text{const}$ 或 $\eta=\text{const}$ 线）。作为贴体坐标系的一个最简单的例子，首先来考虑物理平面 (x,y) 上以原点 O 为中心的半径分别为 a_1 和 a_2 的两个同心圆之间所围成的区域 D（见图 8-8(a)）。显然，这是一个双连通区域。如果沿 x 轴割开一条裂缝，其上、下两侧分别以 $\overline{AB}$ 和 $\overline{A'B'}$ 表示，那么由封闭曲线 $AEA'B'FBA$ 所围的区域就成了单连通区域。今以 Γ_1 表示内边界 $\widehat{AEA'}$，Γ_2 表示外边界 $\widehat{BFB'}$，Γ_3 表示割线的上侧 $\overline{AB}$，Γ_4 表示割线的下侧 $\overline{A'B'}$。很显然，笛卡儿坐标 (x,y) 不是贴体坐标系。但如果用极坐标系 (r,θ) 来描述，则上述区域 D 对应于图 8-8(b) 中所示的

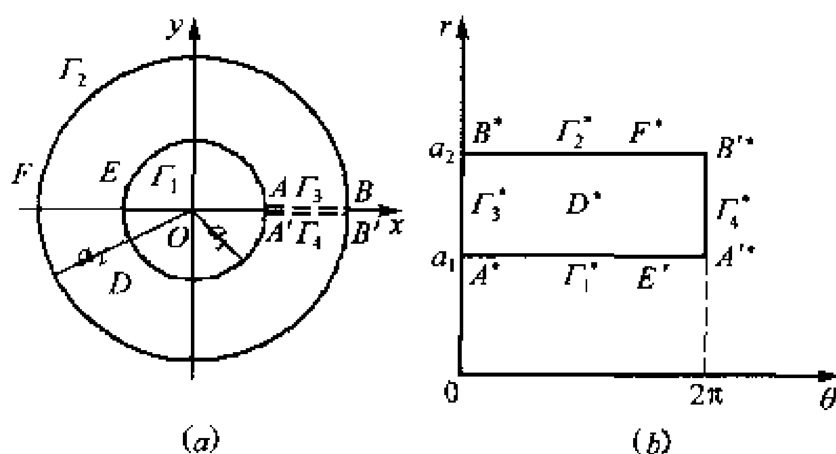


图 8-8　椭圆型偏微分方程网格生成方法

(a)笛卡儿坐标系；(b)极坐标系。

矩形区域 D^*，且诸边界 Γ_n 对应于 Γ_n^* $(n=1,2,3,4)$。显然，此时极坐标系就是一个贴体坐标系。

现在来考察一个一般情况。例如，(x,y)平面上一个复杂的双连通区域 D，其内、外边界分别为 Γ_1 和 Γ_2，如图 8-9(a)中所示。为了变成单连通区域，在该区域内割开一条裂缝，其上、下两侧分别以$\overline{AB}$和$\overline{A'B'}$表示。我们希望引入一个曲线坐标系(ξ,η)，使得内边界 Γ_1 变成 $\eta=\eta_1$ 线，而外边界 Γ_2 变成 $\eta=\eta_2$ 线。而 ξ 坐标也希望如上例中的 θ 一样，从某一处为零值起，逆时针绕 Γ_1(同时也包括 Γ_2)一周，ξ 从零单调地增加到某一固定值 ξ_2(例如 2π 或 1)。具体地说，若令割线上侧$\overline{AB}$处 $\xi=0$，而在割线下侧$\overline{A'B'}$处 $\xi=2\pi$(或 1)。从而使(ξ,η)平面上的对应区域变为一个矩形。

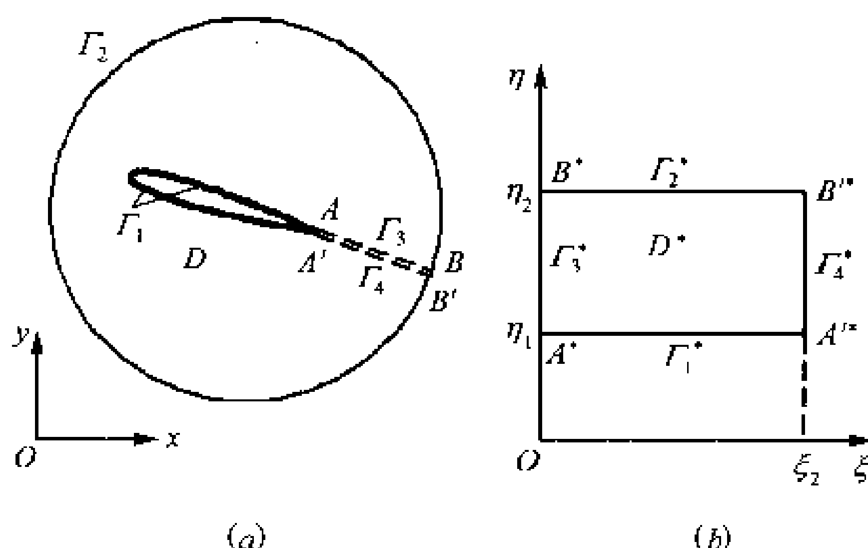


图 8-9　物理平面和计算平面的求解域

(a)物理平面；(b)计算平面。

从上面的叙述可知，对于区域 D 来说，变换函数

$$\xi=\xi(x,y),\eta=\eta(x,y) \tag{8.3.26}$$

在边界 Γ_1 和 Γ_2 上，边界值是已经给定了的，因为

$$\left.\begin{array}{l}\text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}, \eta=\eta_1, \xi=f(x,y) \\ \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}, \eta=\eta_2, \xi=g(x,y)\end{array}\right\} \tag{8.3.27}$$

式中函数 f 和 g 分别是曲线 Γ_1 和 Γ_2 上点的某个单调函数，当点从 $A(B)$ 按逆时针方向沿着 $\Gamma_1(\Gamma_2)$ 转到 $A'(B')$ 时，f 和 g 应单调增加且使

$$\xi_A = \xi_B = f(x_A, y_A) = g(x_B, y_B) = 0$$

$$\xi_{A'} = \xi_{B'} = f(x_A, y_A) = g(x_B, y_B) = 2\pi(\text{或 } 1)$$

满足这种要求的函数 f 和 g 是很多的，具体地说是根据对网格密度的要求人为地规定它们的数值对应关系。

现在的问题是，已知边界值公式(8.3.27)后，如何确定整个变换函数式(8.3.26)？显然，这个问题可有无限多个答案，而且可以采取各种不同的方法来解决。前面介绍的代数方法就是一种可能的解决方法。Thompson 等人提出了一种求解椭圆型偏微分方程边值问题的办法。

下面以生成如图 8-10(a)中所示翼型绕流问题的贴体网格为例来说明应用椭圆型偏微分方程来生成贴体网格的具体过程。

图 8-10(a)中 Γ_1 为翼型表面，Γ_2 近似代表无穷远边界，在实际计算中取一个半径为 5～10 倍弦长的圆就可以了。物理平面中的求解域即以 Γ_1 和 Γ_2 为边界所围成的区域。

首先，要选定生成贴体网格的支配方程。显然，不同的支配方程将导致不同的贴体网格。今遵循 Thompson 等人的建议，选定如下的 Poisson 方程

$$\begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} &= (x_\xi^2 + y_\xi^2)P(\xi, \eta) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= (x_\eta^2 + y_\eta^2)Q(\xi, \eta) \end{aligned} \tag{8.3.28}$$

式中，$P(\xi, \eta)$，$Q(\xi, \eta)$ 可用来控制网格的密度及正交性。它们的确定方法将在下面进行讨论。

其次，要规定物理平面中求解域边界与计算平面中计算域边界之间的对应关系。显然，不同的对应关系也将导致不同的贴体网格。如果希望生成 O 型网格，规定如下边界点之间的对应关

系。为了将物理平面中的求解域化为单连通域，可从翼型的后缘 A 点到 Γ_2 上某一点 B 取一条割线，其两侧分别以 Γ_3 和 Γ_4 表示(应该指出，此割线在物理平面中的位置并不是事先规定的，而是作为计算结果确定的)。然后，规定将物理平面中的求解域变换到计算平面中的矩形计算域，具体规定如下。

将 Γ_1 变为 $\Gamma_1^*:\eta=\eta_1$，且 Γ_1 的网格点分布按照对于所研究问题中流动参数变化情况的了解作出规定。于是，在 Γ_1 上，$\xi=\xi_1(x,y)$ 也知道了。

将 Γ_2 变为 $\Gamma_2^*:\eta=\eta_2$，且规定了 Γ_2 上的网格点分布。于是，在 Γ_2 上，$\xi=\xi_2(x,y)$ 也知道了。

将 Γ_3 变为 $\Gamma_3^*:\xi=\xi_1$。

将 Γ_4 变为 $\Gamma_4^*:\xi=\xi_2$。

前面已讲过，在物理平面上割线 $\Gamma_3(\Gamma_4)$ 的位置事先是未知的，但显然，割线两侧的对应点的物理坐标 x,y 分别相等，意即实际上它们是物理平面上同一个点。因此除了 A(或 E)和 B(或 F)两点的位置已知外，此割线上应该提周期性边界条件，即割线两侧的 ξ 分别取常数 ξ_1 和 ξ_2，对应点处的 η 值相等，并且 ξ 和 η 对于 x 或 y 的各阶导数应该连续。

规定了支配方程式(8.3.28)及上述边界条件后，贴体网格就惟一地被确定了。

上述 Poisson 方程的边值问题一般需要用数值方法求解。当用差分法求解时，由于物理平面上求解域的边界是不规则的，边界点不一定是网格点，所以边界条件的履行不仅麻烦，而且不够精确。我们希望将上述问题化为计算平面中的矩形计算域来求解。为此将上述问题中的自变量和因变量对调，可得

$$g_{22}(\boldsymbol{r}_{\xi\xi}+P\boldsymbol{r}_{\xi})+g_{11}(\boldsymbol{r}_{\eta\eta}+Q\boldsymbol{r}_{\eta})-2g_{12}\boldsymbol{r}_{\xi\eta}=0 \tag{8.3.29}$$

式中，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$；$g_{11}\equiv\boldsymbol{r}_{\xi}\cdot\boldsymbol{r}_{\xi}$，$g_{22}\equiv\boldsymbol{r}_{\eta}\cdot\boldsymbol{r}_{\eta}$，$g_{12}\equiv\boldsymbol{r}_{\xi}\cdot\boldsymbol{r}_{\eta}$。相应的边

界条件为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\xi, \eta_1) \\ f_2(\xi, \eta_1) \end{bmatrix}, \quad (\xi, \eta_1) \in \Gamma_1^* \qquad (8.3.30)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(\xi, \eta_2) \\ g_2(\xi, \eta_2) \end{bmatrix}, \quad (\xi, \eta_2) \in \Gamma_2^* \qquad (8.3.31)$$

由于 Γ_3^* 和 Γ_4^* 的对应点(即 η 值相同的点)处的物理坐标 $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$是相同的,这些函数的各阶导数都是连续的,因此将 Γ_3^* 和 Γ_4^* 称为计算域的一对再进入边界。由上述知,在计算平面中计算域右侧边界外部某一水平距离处的各点和左侧边界内部在同一水平线上和相同水平距离处的各点分别都对应于物理平面内相同的点,反之亦然。于是,如果在位于计算域的一对再进入边界的每一条边界外部都增加一层计算点,其上存储着相应与此对再进入边界的另一条边界内部适当点处的物理坐标值,那么在这对再进入边界上的各计算点可当作内点来处理,而不必再规定任何边界条件。

用差分法求解边值问题{式(8.3.29),式(8.3.30),式(8.3.31)},即可得到所需要的贴体网格,它被示意地绘于图 8-10 中。

数值求解 Poisson 方程的边值问题不会遇到任何困难,关键在于如何根据控制点的分布给出源项 P 和 Q。通常希望物面附近的网格线与物面正交,并控制毗邻物面的第一条网格线与物面之间的距离。

目前,都采用迭代方法来决定源项。我们知道,对于一个二阶椭圆型偏微分方程而言只允许要么在边界上规定点的位置,要么在边界上规定坐标线的坡度,但不能两者同时规定。但若用迭代方法调整支配方程式(8.3.29)中的 P 和 Q,则不仅可以获得边界上规定的坐标线坡度,还可得到离边界的第一个坐标面与边界之间规定的距离,同时具有规定的边界网格点分布。

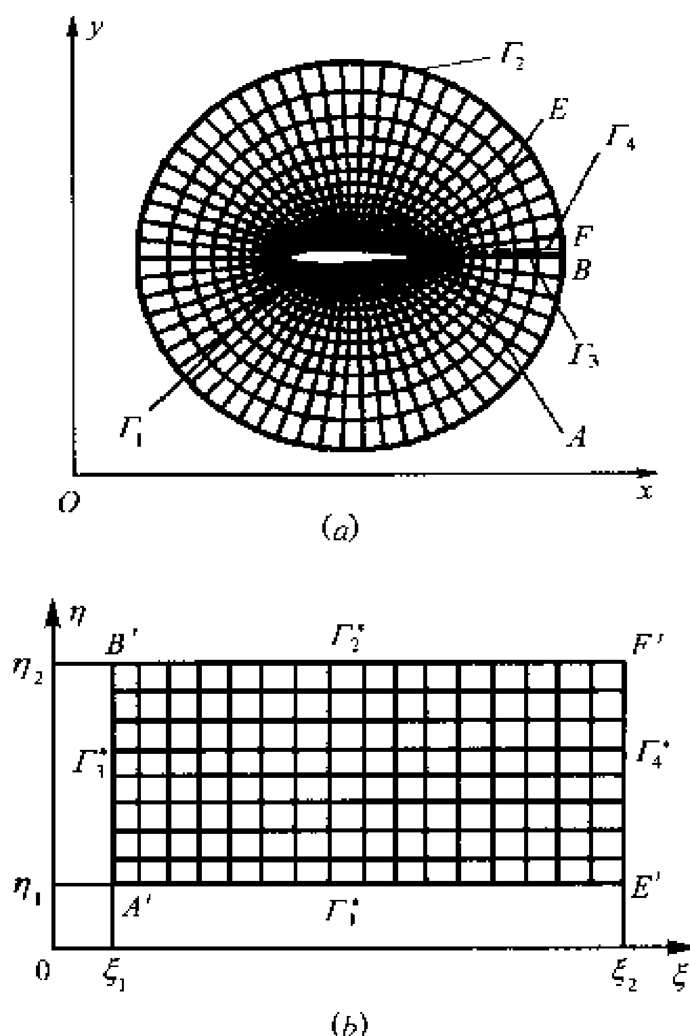


图 8-10　物理平面和计算平面上的网格

(a)物理平面；(b)计算平面。

下面来介绍 Thompson[18]和 Sorenson[19]提出的一种决定源项的方法。

现考察一物面边界，设它为一条 ξ 坐标线(即 $\eta=\text{const}$ 线)，并规定了其上的边界点分布。则在边界上，$\boldsymbol{r}_\xi$ 和 $\boldsymbol{r}_{\xi\xi}$ 已知。

现规定毗邻该边界第一条网格线与该边界之间的间距为

$$d_r = |\boldsymbol{r}_\eta| = \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2} \tag{8.3.32}$$

再要求在该边界上网格线正交，即

$$\boldsymbol{r}_\xi \cdot \boldsymbol{r}_\eta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta = 0 \tag{8.3.33}$$

参见图 8-11。

根据式(8.3.32)和式(8.3.33)可由已知的 x_ξ 和 y_ξ 求出 x_η 和

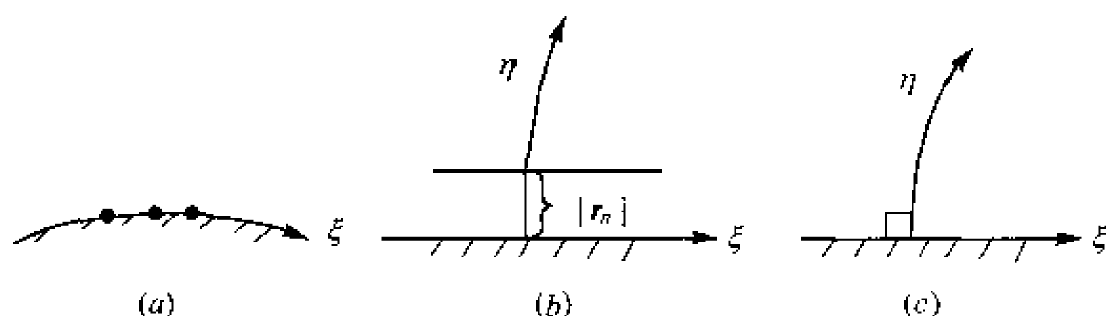


图 8-11

(a)边界点分布；(b)毗邻边界的第一条网格线与边界之间的间距；(c)边界处网格线的正交。

y_η，于是在该边界处 $\boldsymbol{r}_\eta$ 已知。

将式(8.3.33)代入式(8.3.29)，可得

$$|\boldsymbol{r}_\eta|^2(\boldsymbol{r}_{\xi\xi}+P\boldsymbol{r}_\xi)+|\boldsymbol{r}_\xi|^2(\boldsymbol{r}_{\eta\eta}+Q\boldsymbol{r}_\eta)=0$$

分别用 $\boldsymbol{r}_\xi$ 和 $\boldsymbol{r}_\eta$ 点积上式，可得关于该边界处控制函数的如下两个表达式

$$P=-\frac{\boldsymbol{r}_\xi\cdot\boldsymbol{r}_{\xi\xi}}{|\boldsymbol{r}_\xi|^2}-\frac{\boldsymbol{r}_\xi\cdot\boldsymbol{r}_{\eta\eta}}{|\boldsymbol{r}_\eta|^2} \tag{8.3.34a}$$

$$Q=-\frac{\boldsymbol{r}_\eta\cdot\boldsymbol{r}_{\eta\eta}}{|\boldsymbol{r}_\eta|^2}-\frac{\boldsymbol{r}_\eta\cdot\boldsymbol{r}_{\xi\xi}}{|\boldsymbol{r}_\xi|^2} \tag{8.3.34b}$$

由此可知，在该边界上，除了 $\boldsymbol{r}_{\eta\eta}$ 以外，这两个表达式中的所有量都是已知的。

类似地，在一条为 η 坐标线(即 $\xi=\text{const}$ 线)的边界上，可以得到与上面完全相同的关于控制函数的两个表达式，但此时，$\boldsymbol{r}_{\xi\xi}$ 是未知的。

剩下的问题是如何由边界处的源项值来决定流场内部的源项值?

Sorenson 以上述边界处的源项值为基础，提出用如下指数函数作内插以确定流场内部的源项值。

$$\left.\begin{aligned} p(\xi,\eta)&=p(\xi)e^{-a\eta}+r(\xi)e^{-c(\eta_{\max}-\eta)}\\ Q(\xi,\eta)&=q(\xi)e^{-b\eta}+s(\xi)e^{-d(\eta_{\max}-\eta)}\end{aligned}\right\} \tag{8.3.35}$$

式中，$p(\xi)$ 和 $r(\xi)$ 分别是由式(8.3.34a)决定的 $P(\xi,\eta_1)$ 和

$P(\xi,\eta_{\max})$；$q(\xi)$和 $s(\xi)$分别是由式(8.3.34b)决定的 $Q(\xi,\eta_1)$和 $Q(\xi,\eta_{\max})$。a,b,c,d 都是正常数，它们表征由边界向流场内部网格源项的衰减速率，较小的常数值表示较慢的衰减，但若取得太小，会导致收敛困难。

至此，还剩下的问题是在应用式(8.3.34a)时 $\boldsymbol{r}_{\eta\eta}$是未知的，而在应用式(8.3.34b)时，$\boldsymbol{r}_{\xi\xi}$是未知的。上述问题靠如下的迭代过程来解决。

(i) 在边界处假设源项的初值(最简单的办法令 $P=Q=0$)。

(ii) 将物面与外边界处的源项值内插到流场内部网格点处(例如使用式(8.3.35))。

(iii) 求解方程式(8.3.29)获得流场中的网格分布。

(iv) 根据(iii)的结果，用单侧差分计算 ξ 坐标线边界上的$\boldsymbol{r}_{\eta\eta}$和$\eta$ 坐标线上的 $\boldsymbol{r}_{\xi\xi}$。然后从式(8.3.34)计算出边界上的源项 P和Q。再应用内插法(例如用式(8.3.35)从边界处的源项值算出流场内部网格点处的源项值。

第(iii)步和第(iv)步反复进行，直到收敛为止。

椭圆型偏微分方程生成方法的主要优点如下。

(i) 某些椭圆型偏微分方程存在极值原理，其极值点只能位于边界上，从而保证了它所产生的影射是一一对应的。

(ii) 因为具有封闭边界的区域内椭圆型偏微分方程边值问题的解在区域内是处处解析的，因此即使边界不光滑或边界上网格点分布的函数不光滑，它的解在区域内仍然是光滑的。这就保证了它所生成的贴体网格具有足够的光滑性。

(iii) 适当选取源函数 $P(\xi,\eta)$和 $Q(\xi,\eta)$后可以保证它所生成的贴体网格具有所希望的网格密度变化以及在边界附近网格是接近正交的。

椭圆型偏微分方程生成方法的不足之处在于椭圆型偏微分方程的边值问题原则上必须在整个区域内联立求解，往往需要采用迭代算法，比较费机时。

(2) 双曲型偏微分方程生成方法

如果所研究的问题在物理空间中的求解域是不封闭的(例如上述翼型绕流问题在物理平面中的内边界是翼型表面,而外边界严格地说应在无穷远处。在具体的数值计算中,其内边界是已知的,而外边界只要离翼型足够远就行,其精确位置是不重要的),此时也可以采用双曲型偏微分方程来生成网格。

Steger 和 Chaussee[20]首先提出用双曲型偏微分方程来生成二维网格的方法,随后,Steger 和 Zick[21]将该方法推广到三维情况。近年来,Chan 和 Steger[22]进一步完善了此方法。

下面以二维问题为例说明之。首先来说明支配方程的确定。

网格的正交性条件式(8.3.33)可以作为网格生成的一个支配方程

$$x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta = 0 \tag{8.3.36}$$

又因坐标变换 Jacobian $\sqrt{g} = |J^{-1}| = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$ 表征着两个变换平面中相应网格单元面积的比值,通常又取 $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$,故此时$|J^{-1}|$代表物理平面中网格单元的面积。

规定物理平面中网格单元面积的分布可以作为网格生成的另一个支配方程,即

$$x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = V(\xi, \eta) \tag{8.3.37}$$

其中右端项 $V(\xi, \eta)$是给定的函数。

现在将方程式(8.3.36)和方程式(8.3.37)进行线化。令

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= x^0(\xi, \eta) + \tilde{x}(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) &= y^0(\xi, \eta) + \tilde{y}(\xi, \eta) \end{aligned} \tag{8.3.38}$$

这里,$x^0(\xi, \eta)$,$y^0(\xi, \eta)$为已知状态解;$\tilde{x}(\xi, \eta)$,$\tilde{y}(\xi, \eta)$为扰动量。将式(8.3.36)和式(8.3.37)中的每一项作线化处理,例如

$$\begin{aligned} x_\xi x_\eta &= (x^0 + \tilde{x})_\xi (x^0 + \tilde{x})_\eta \approx x_\xi^0 x_\eta^0 + x_\xi^0 \tilde{x}_\eta + x_\eta^0 \tilde{x}_\xi = \\ &x_\xi^0 x_\eta^0 + x_\xi^0 (x - x^0)_\eta + x_\eta^0 (x - x^0)_\xi = \\ &x_\xi^0 x_\eta + x_\eta^0 x_\xi - x_\xi^0 x_\eta^0 \end{aligned}$$

则可得

$$Ar_\xi + Br_\eta = f \tag{8.3.39}$$

式中 $r=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $f=\begin{bmatrix} 0 \\ V+V^0 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} x_\eta^0 & y_\eta^0 \\ y_\eta^0 & -x_\eta^0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} x_\xi^0 & y_\xi^0 \\ -y_\xi^0 & x_\xi^0 \end{bmatrix}$$

以 B^{-1}左乘式(8.3.39),可得

$$r_\eta + B^{-1}Ar_\xi = B^{-1}f \tag{8.3.40}$$

式(8.3.40)就是我们采用的网格生成的支配方程。由于 $B^{-1}A$ 矩阵的特征值为

$$\lambda_{1,2} = \pm\left[\frac{(x_\eta^0)^2 + (y_\eta^0)^2}{(x_\xi^0)^2 + (y_\xi^0)^2}\right]$$

可见,只要$(x_\xi^0)^2+(y_\xi^0)^2\neq 0$,方程组(8.3.40)是双曲型的。对于双曲型偏微分方程组而言,应该提出初值问题。

今以前述翼型绕流问题的网格生成为例。若规定物理平面(x,y)中的翼型影射到计算平面(ξ,η)中 $\eta=\eta_1$ 坐标线,并规定了翼型表面上的网格点分布后,就规定了如下初值条件

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\xi,\eta_1) \\ f_2(\xi,\eta_1) \end{bmatrix}, \quad (\xi,\eta_1) \in \Gamma_1^* \tag{8.3.41}$$

现在来对支配方程式(8.3.40)进行离散。将方程中的 ξ 向导数用二阶中心差商逼近,η 向导数用一阶后向差商逼近,另外为了计算稳定人为附加一个四阶耗散项,可得如下差分方程

$$\begin{aligned} r_{i,j+1} - r_{i,j} + \frac{1}{2}[B^{-1}A]_{i,j+1}(r_{i+1,j+1} - r_{i-1,j+1}) = \\ (B^{-1})_{i,j+1}f_{i,j+1} + \varepsilon(\nabla_i\Delta_j)^2 r_{i,j} \end{aligned} \tag{8.3.42}$$

式中,$\nabla_i r_{i,j} = r_{i+1,j} - r_{i,j}$,$\Delta_j r_{i,j} = r_{i,j} - r_{i,j-1}$。显然,沿每条 $\eta=\text{const}$ 线,式(8.3.42)组成一个(2×2)的块三对角方程组。由物面开始,沿 η 方向推进逐条求解上述(2×2)的块三对角方程组,就可生成网格系统。

由上述知,在此方法中需要给定物理平面上网格单元面积的

分布函数 $V(\xi,\eta)$。一种规定该函数的办法是:作一个周长与物面周长相等的圆,引入极坐标 $\theta(\xi)$和 $R(\eta)$,沿此圆周布置与物面上规定的网格点分布具有相同弧长的对应点,它们定义了 $\theta_i=\theta(\xi)$。在径向规定所要求的间距分布 $R_j=R(\eta)$,可以采用各种不同的分布形式。例如可采用如下指数分布形式

$$R_j = R_{j-i} + (r_2 - r_1)(1+\epsilon)^{j-2}, j = 2,3,4,\cdots \tag{8.3.43}$$

式中 r_1, r_2 和 ϵ 都是根据需要事先给定的。应用如上引入的极坐标线,即可规定物理平面中网格单元面积分布函数如下

$$V_{i,j} = (R_{j+1}^2 - R_j^2)(\theta_{i+1} - \theta_{i-1})/4 \tag{8.3.44}$$

上述双曲型偏微分方程生成方法有如下优点:①节省数值网格生成的时间,它所需要计算的时间可以比椭圆型偏微分方程生成方法少 1~2 个量级;②规定物理平面中网格单元面积分布易于控制网格线之间的间距。这种方法的主要缺点有:①应用范围受到限制;②边界上坡度的不连续性会传入求解域内部。

以上介绍了两类结构网格生成方法。事实上,可以将这两种结合起来应用。例如可以先用代数方法生成一个初场,然后用偏微分方程方法对其进行适当的光滑优化,提高网格的正交性等等。以下给出几个利用上述方法生成的绕复杂外形的结构网格。图 8-12为绕某战斗机的网格;图 8-13 为绕某导弹的网格。

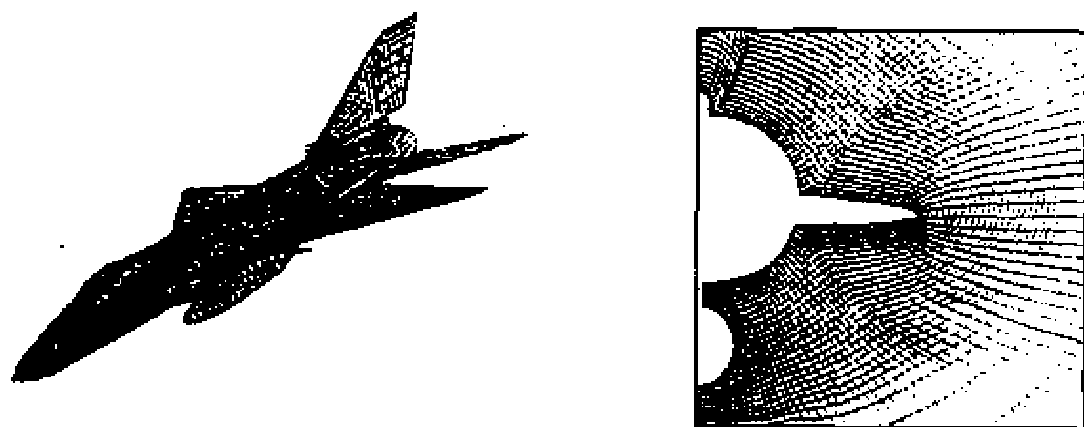


图 8-12　绕某战斗机的网格(取自文献[23])

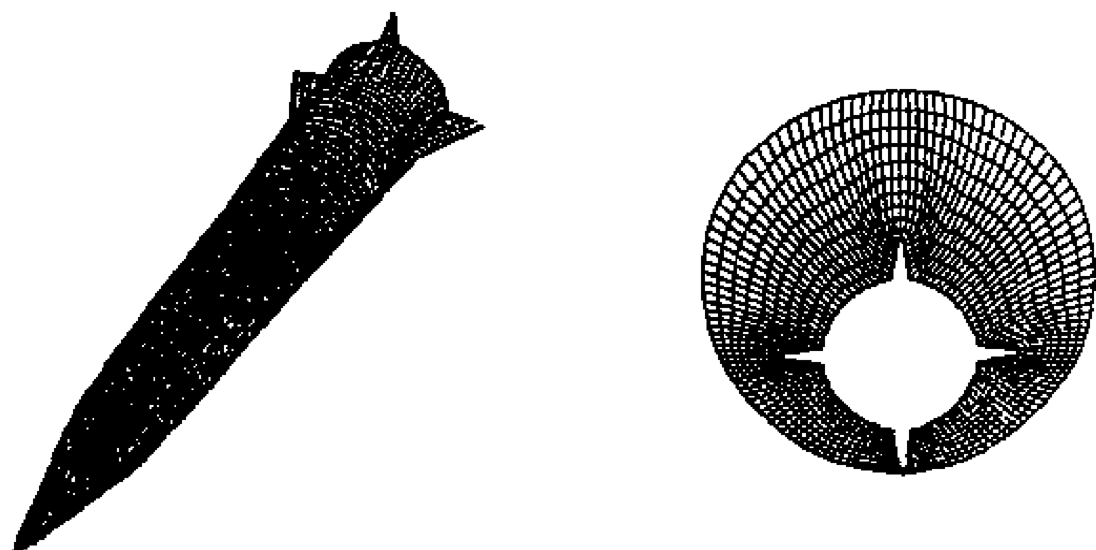


图 8-13 绕某导弹的网格(取自文献[24])

8.4 复杂外形的结构网格生成技术

对于复杂多部件或多体的实际工程外形,如现代战斗机和捆绑火箭,生成统一的贴体网格相当困难。即使勉强生成,网格质量也不能保证,从而会影响流场数值计算的效果。为了克服上述困难,CFD 工作者发展了分区网格和分区计算方法。它的基本思想就是根据整体外形特点,先将整个计算域分成若干个子域,然后在每一个子域内分别生成网格并进行数值计算,而在各子域间的信息传递通过边界处的耦合条件来实现。常用的分区结构网格方法有三种,即组合对接网格、搭接网格和重叠网格。

8.4.1 组合对接网格和搭接网格技术

组合对接网格和搭接网格的主要区别在于子域的交界面上网格节点是否重合,但它们的子域间都没有区域的重叠,网格生成的方法大致相似,因此我们将它们放在一起讨论。

生成组合对接网格的方法如下。

(1) 根据外形和流动特点将整个计算域分区,并确定每区中的网格拓扑。

(2) 生成表面网格。在上述几何处理的基础上按网格疏密的要求生成各部件或各体表面的网格，注意在这里就应该保证各子域交界面处的网格节点重合。

(3) 生成交界面上的网格。整个计算域分区后，相邻子域之间的公共交界面一般是一个空间曲面，它在空间的位置、走向及其上的网格分布极大地影响着以它为边界的两相邻子域内的空间网格的生成过程和网格的质量。在一个空间曲面上生成网格的方法很多。例如可以将这个曲面变换到平面上，在平面内采用上一节中介绍的各种方法生成网格，然后反变换为曲面网格。我们建议各子域的交界面划分为平面或曲面的形状尽量简单，这样可以不用作变换或者变换后的几何形状不会有太大的变形。

(4) 生成空间网格。当表面和交界面上网格生成后，各子域的边界即已确定，各子域内的空间网格即可用前面介绍的代数方法或求解偏微分方程的方法等来生成。

对于分区搭接网格，不要求子域交界面上的网格节点重合，这时可以在各子域内分别生成自己的空间网格，不必事先生成子域间交界面上的网格。这样可以保证每一个子域内的网格质量很好。但是，这里必须指出的是：相邻子域交界面上的网格节点数和

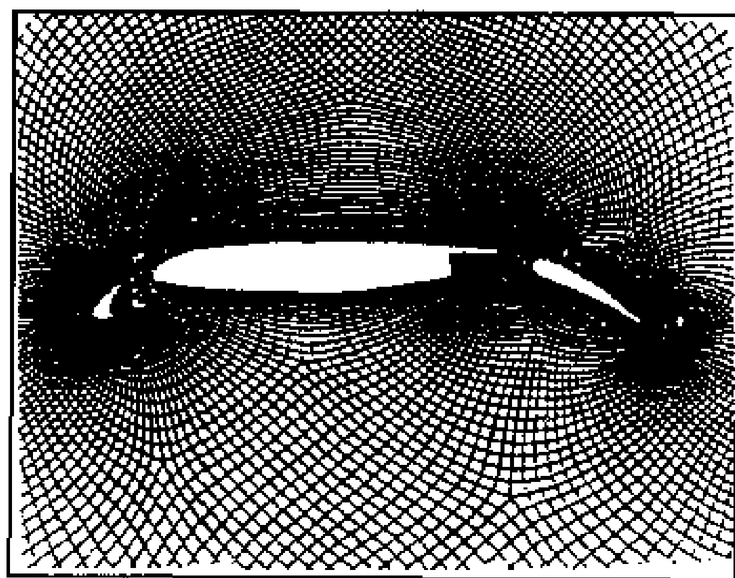


图 8-14 绕某多段翼型的对接网格(取自文献[25])

网格分布情况需大体相近,相差得太多会导致插值误差,从而影响计算结果。

以下给出几个应用实例。图 8-14 为绕某多段翼型的对接网格,图 8-15 为绕 NASA 运输机模型的对接网格。

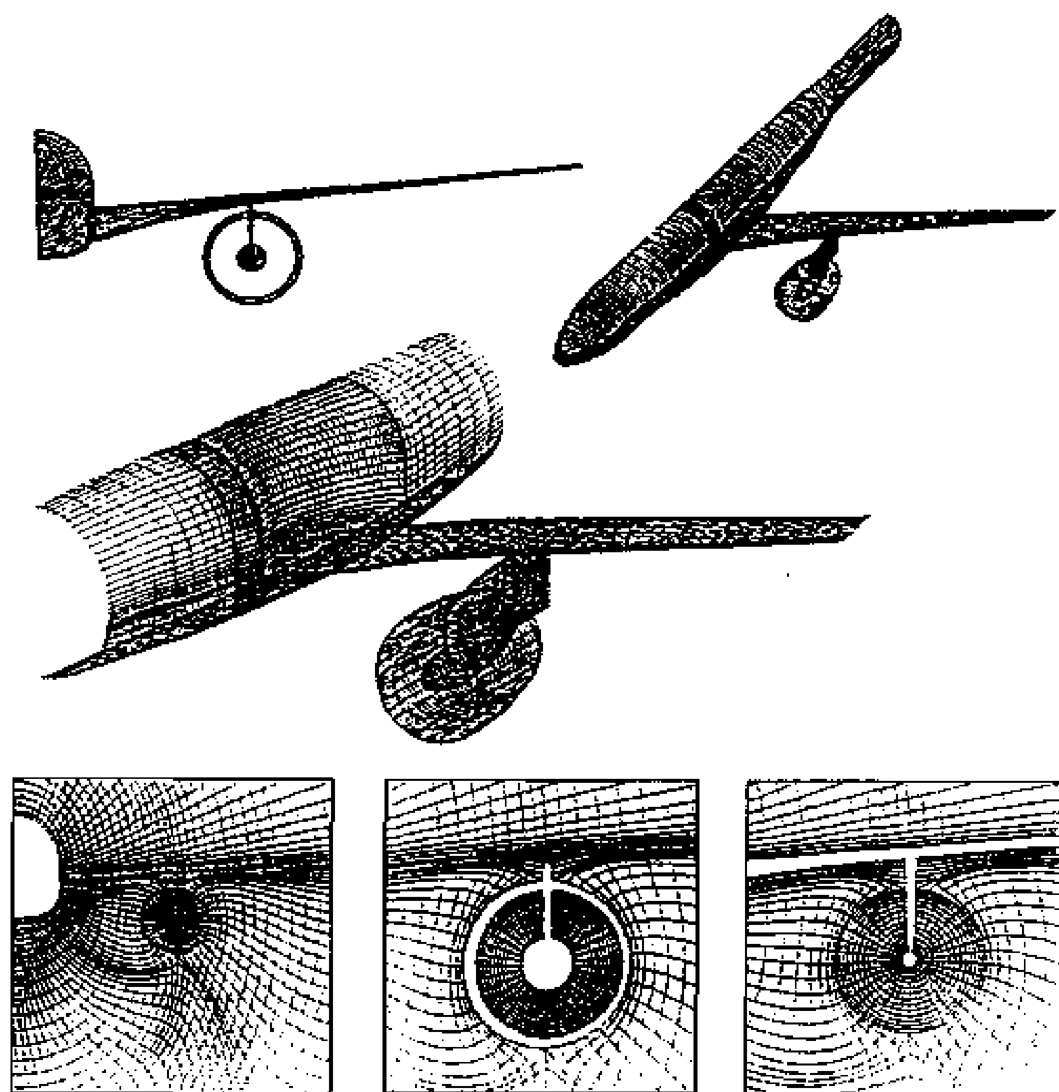


图 8-15 绕 NASA 运输机模型的对接网格(取自文献[26])

8.4.2 重叠网格技术

分区网格的另一种形式是重叠网格技术。它在整个计算域的分区过程中允许子域间的网格重叠,而不要求各子域共享边界,这样大大减轻了各子域自身网格生成的难度。区域分解技术包含两层含义:其一是将整个计算域划分为若干个子域,其二是建立各子

域间的信息传递关系。

(1) 子域的划分和重叠网格的结构

在计算域中划分子域,并允许子域相互有重叠部分,就必须有某种重叠的结构关系。早期的嵌合体要求各子域的重叠关系具有嵌入式的层次结构,即构成 I 层子域的网格系列 $G_{I,i}$, $i=1,2,\cdots$ 全部嵌入在 $I-1$ 层的子域网格中,同时又完全包含了第 $I+1$ 层的子域网格。图 8-16(a)反映了它们的结构关系和拓扑图。显然这种结构简化了各子域网格关联的方式,特别在内边界处插值时,对相应点的搜索比较简单,因而减少了计算量和对计算资源的要求,但却使应用于较复杂外形时的分区困难,故随后又推广成图 8-16(b)所示的结构,不要求一个子域被完全包含在另一个子域中,而增大了方法的通用性,并可用已有的单域网格生成方法来生成类似对接的子域网格。以翼身组合体为例,图 8-17 表示了两种结构的区别,在嵌入式层次结构(图 8-17(a))中 G_3 的外边界只与 G_2 关联,而在图 8-17(b)中 G_3 的外边界分别与 G_1 和 G_2 相关,因而 G_3(机翼的网格)不仅要在 G_2(机身网格)中,而且要在 G_1(外网格)中"挖洞",建立人工的内边界,这虽然增加了计算复杂程

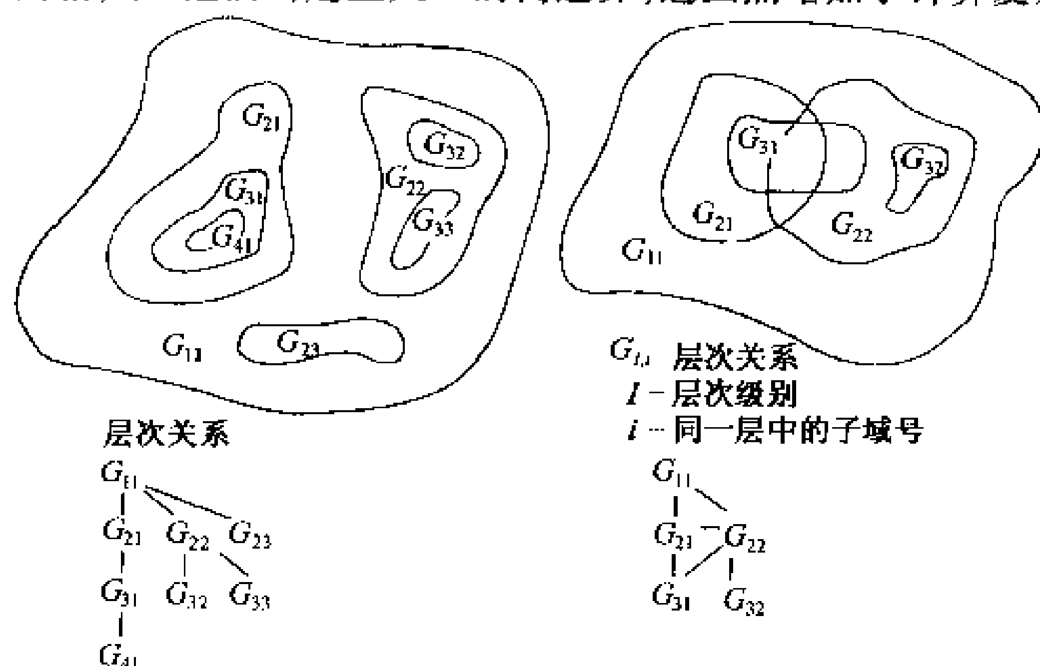


图 8-16

(a)嵌入式层次结构;(b)广义的网格重叠结构。

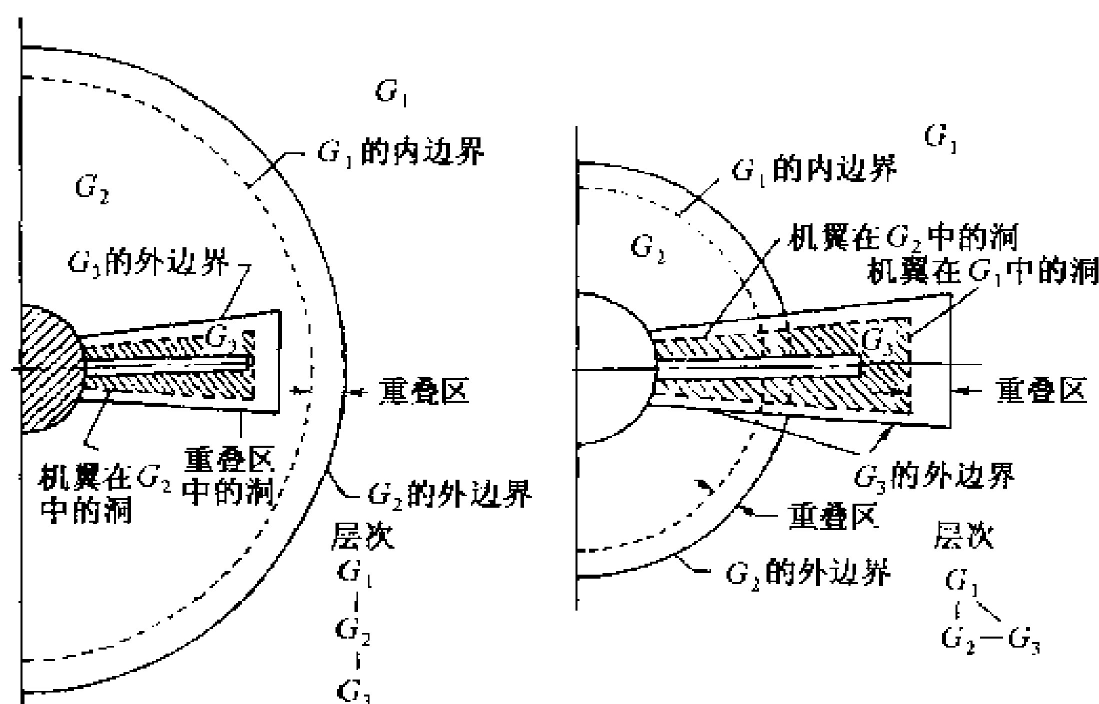


图 8-17

(a)层次结构的分区网格;(b)广义重叠结构的分区网格。

度,但使各子域网格生成容易了。

(2) 重叠区和人工内边界的建立——“洞”的生成

由于每个部件的网格都是独立生成的,在网格嵌套时需处理好子域网格重叠区的大小和位置。现以图 8-16(a)所示的嵌入式层次结构为例加以说明。对于落在相邻子域网格(如 $G_{l+1,i}$)中,固壁边界内的父子域 $G_{l,i}$网格点在解的过程中应去除,因为它们位于计算域外。此外,若对所有 $G_{l,i}$和 $G_{l+1,i}$的公共边界点都进行插值和更新,不仅计算量大,且会降低计算的精度,为此,只对重叠区中的边界点进行插值和更新,这就需要在重叠区内建立人工内边界。如图 8-18 所示,包含在子域内的那部分 $G_{l,1}$的网格点将从 $G_{l,i}$中去掉而形成$G_{l,i}$的人工边界或在 $G_{l,i}$中引入“洞”。为了保证能较精确地通过插值得到网格边界上的流动参数,需要在 $G_{l+1,i}$中 $G_{l,i}$洞边界外提供足够大的覆盖区(如图 8-18 所示)。图 8-19 显示了确定洞边界的具体过程。

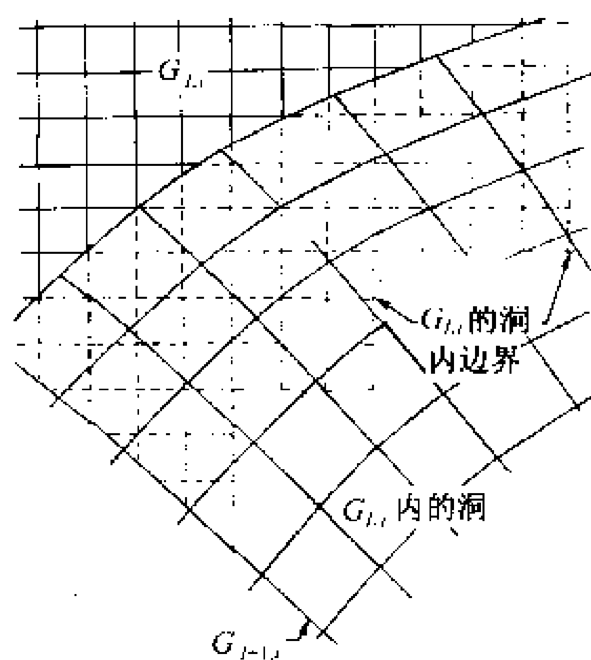


图 8-18　重叠区的网格

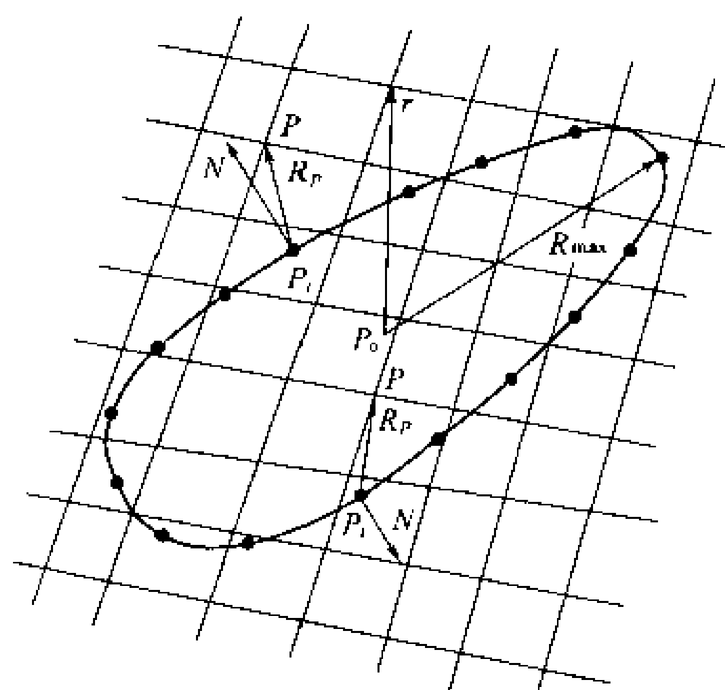


图 8-19　洞点搜索方法

(i) 定义初始洞边界,即在 $G_{l+1,i}$ 中选一条曲线 C,最简单的方法是选一条网格曲线。

(ii) 计算 C 上每一网格点的法向量 N。

(iii) 在曲线 C 内确定一临时中心点 P_0。

(iv) 定义搜索区域,一般取 P_0 为圆心,半径为 $R_{\max}$(P_0 到曲线 C 的最大距离)的大圆。

(v) 相对于 P_0 计算 $G_{l,i}$ 中每一网格点 P 到 P_0 的距离 r,若 $r>R_{\max}$,P 点位于圆外;$r<R_{\max}$,则 P 点落在圆内。

(vi) 计算 $N\cdot R_p$,N 为 C 上最靠近 P 点的 P_c 点处的法向量,R_p 为从 P_c 到 P 的向量。若 $N\cdot R_p>0$,则 P 在 C 外;若 $N\cdot R_p<0$,则 P 在 C 内。

假定在生成洞边界时给 $G_{l,i}$ 中的所有网格点赋上标记参数 $IBLANK=1$,则在洞内的网格点将其标记为 $IBLANK=0$,令它们不参与求解过程。为了确定边界点,可以再次搜索 $G_{l,i}$ 中 $IBLANK=1$ 的所有点 P,将最靠近洞边界的网格点定义为边界点(如图 8-20),在边界点处的物理参数需要从 $G_{l+1,i}$ 的网格上插值获得。对边界点构成一个插值时使用的清单,一旦清单形成后,可以将这些点的 $IBLANK$ 值赋为 0,以减少流场计算时间。

(3) 重叠区信息的传递——插值

洞边界的确定表示人为地建立了相邻网格重叠区中内边界的位置,流场计算时子域求解过程中需要确定此边界上的边界条件——相邻域的解(流动参数)通过此边界时必须匹配,这可通过插值方法来实现,即在 $G_{l,i}$ 中求解时边界点上的流动参数由相应的 $G_{l+1,i}$ 网格点上的流动参数值通过插值确定。Marstin[27] 的结果表明,在二维计算时双线性插值方法优于泰勒级数展开法,因此目前计算中一般都采用双线性插值;类似地,三维计算中采用三线性插值,即

$$\phi=a_1+a_2\xi+a_3\eta+a_4\zeta+a_5\xi\eta+a_6\xi\zeta+a_7\zeta\eta+a_8\xi\eta\zeta \qquad (8.4.1)$$

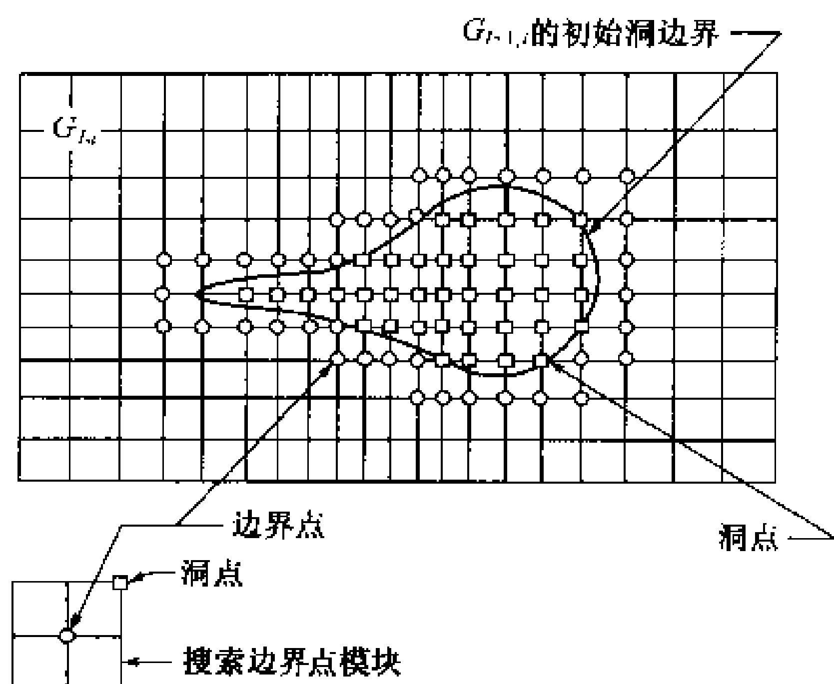


图 8-20　洞点和边界点的关系

式中 $0 \leqslant \xi, \eta, \zeta \leqslant 1$，$a_i(i=1,\cdots,8)$是取决于立方体 8 个顶点处流动参数值的系数。系数 a_i 很容易通过立方体的顶点值来确定。例如在$(\xi,\eta,\zeta)=(0,0,0)$点，$\phi=a_1$(见图 8-21)。

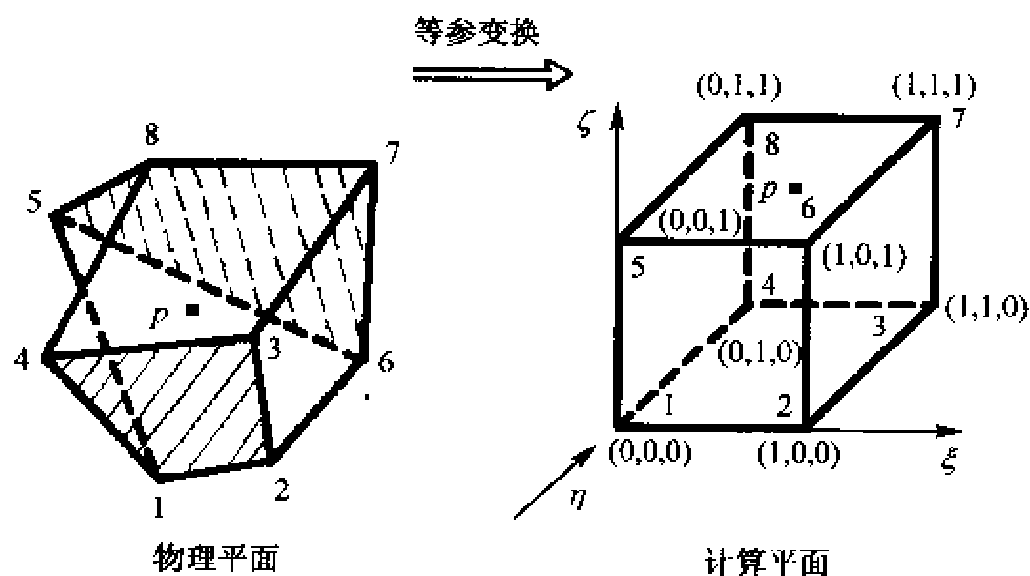


图 8-21　等参变换

于是有

$$a_1 = \phi_1 = \phi_{i,j,k}$$
$$a_2 = \phi_2 - \phi_1 = \phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k}$$
$$a_3 = \phi_4 - \phi_1 = \phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j,k}$$
$$a_4 = \phi_5 - \phi_1 = \phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k}$$
$$a_5 = \phi_1 - \phi_2 + \phi_3 - \phi_4 = \phi_{i,j,k} - \phi_{i+1,j,k} + \phi_{i+1,j+1,k} - \phi_{i,j+1,k}$$
$$a_6 = \phi_1 - \phi_2 - \phi_5 + \phi_6 = \phi_{i,j,k} - \phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k+1} + \phi_{i+1,j,k+1}$$
$$a_7 = \phi_1 - \phi_4 - \phi_5 + \phi_8 = \phi_{i,j,k} - \phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j,k+1} + \phi_{i,j+1,k+1}$$
$$\begin{aligned} a_8 = & -\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 - \phi_6 + \phi_7 - \phi_8 = \\ & -\phi_{i,j,k} + \phi_{i+1,j,k} - \phi_{i+1,j+1,k} + \phi_{i,j+1,k} + \\ & \phi_{i,j,k+1} - \phi_{i+1,j,k+1} + \phi_{i+1,j+1,k+1} - \phi_{i,j+1,k+1} \end{aligned} \tag{8.4.2}$$

由于三线性插值只能在立方体上使用，而曲线坐标中生成的网格单元是曲六面体，因此为对单元内一点的流场参数进行插值，必须先将曲六面体转换成一个立方体，这可采用等参变换来实现。(ξ,η,ζ)与(X,Y,Z)的对应关系为

$$\left.\begin{aligned} X &= a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\zeta + a_5\xi\eta + a_6\xi\zeta + a_7\zeta\eta + a_8\xi\eta\zeta \\ Y &= b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\zeta + b_5\xi\eta + b_6\xi\zeta + b_7\zeta\eta + b_8\xi\eta\zeta \\ Z &= c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\zeta + c_5\xi\eta + c_6\xi\zeta + c_7\zeta\eta + c_8\xi\eta\zeta \end{aligned}\right\} \tag{8.4.3}$$

式中 $a_i, b_i, c_i (i = 1, \cdots, 8)$是取决于物理空间曲六面体顶点坐标的系数，可类似于式(8.4.2)求得。立方体内任一点 P 的 X, Y, Z 是已知的，由式(8.4.3)利用牛顿迭代法，可求得对应的(ξ,η,ζ)，再根据式(8.4.1)求得对应 P 点的流动参数值。

(4) 内边界条件的实施

对于洞内的网格点，不须进行流场计算。这时可对离散后得到的代数方程组

$$\boldsymbol{A\Phi} = \boldsymbol{F} \tag{8.4.4}$$

进行适当的修改。为了叙述方便，假设系数距阵 $\boldsymbol{A}$ 为三对角阵，$\boldsymbol{\Phi}$ 为未知向量，$\boldsymbol{F}$ 为已知向量，并假设总共有 7 个网格点，其中第

3、4、5 点为洞边界点，则式(8.4.4)可表为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{76} & a_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix} \tag{8.4.5}$$

边界点 3、4、5 的流场参数 ϕ_3, ϕ_4, ϕ_5 分别为 f_3, f_4, f_5，则要求非对角线的元素 $a_{32}, a_{34}, a_{43}, a_{45}, a_{54}, a_{56}$ 为零，对角线上的元素 a_{33}, a_{44}, a_{55} 为 1，F_3, F_4, F_5 为 f_3, f_4, f_5。则上面方程组改为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{76} & a_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix} \tag{8.4.6}$$

可见将洞的结构插入到计算中时并不改变向量本身。由于洞的结构已由标记 *IBLANK* 定义，即对应洞内点，$IBLANK = 0$，对洞外点，$IBLANK = 1$。因此可建立一个简单的开关函数来实现代数方程组的修改

$$\left.\begin{aligned} a_{ij} &= a_{ij} * IBLANK_i & i \neq j \\ a_{ij} &= a_{ij} * IBLANK_i + (1 - IBLANK_i) & i = j \\ F_i &= F_i * IBLANK_i + f_i(1 - IBLANK_i) & \end{aligned}\right\} \tag{8.4.7}$$

以下给出两个重叠网格的例子。图 8-22 为绕航天飞机发射运载系统的网格,图 8-23 为绕数值风洞中的民航标模的网格。

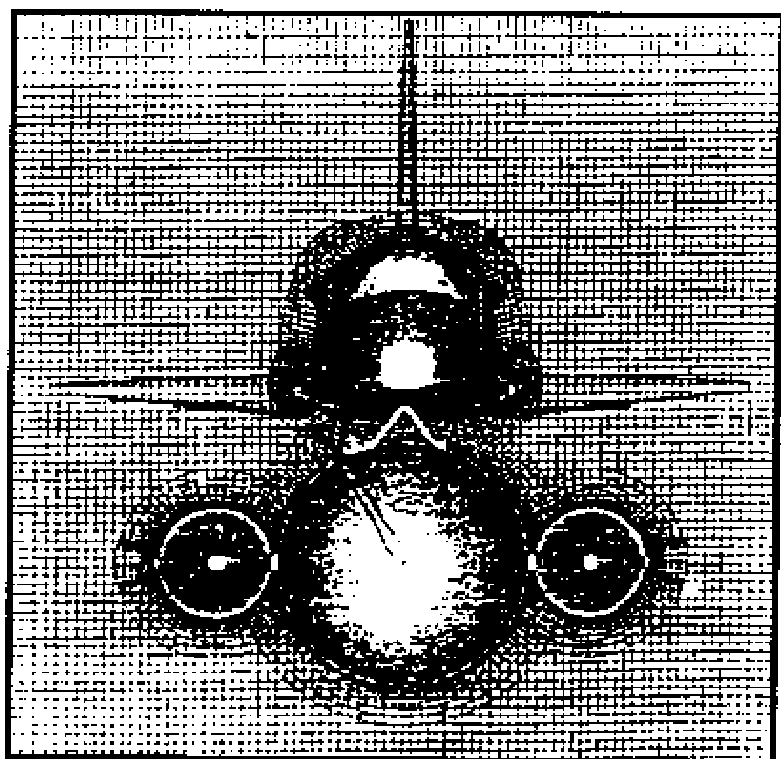


图 8-22　绕航天飞机发射运载系统的网格(取自文献[28])

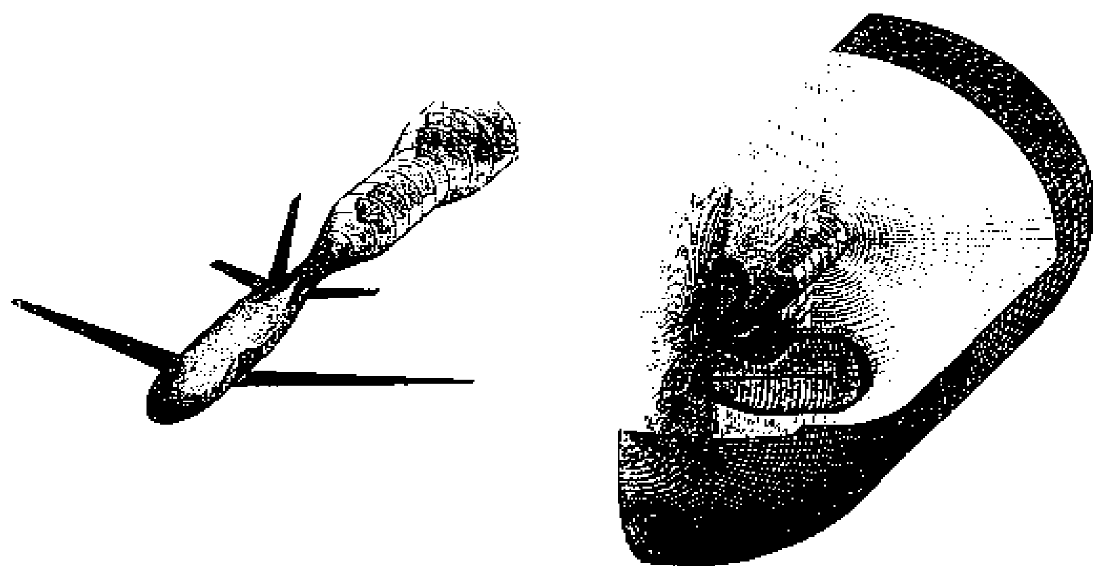


图 8-23　绕数值风洞中的民航标模的网格(取自文献[29])

8.5 非结构网格生成技术

尽管组合对接和搭接网格及重叠网格技术在求解复杂三维外形绕流方面取得了较大的成功，但正如引言中所指出的，它们也存在许多不足之处。非结构网格打破了结构化网格的习惯思维，以全新的面目受到CFD工作者的普遍关注，并于20世纪80年代末以来得到了迅速的发展。

8.5.1 Quadtree/Octree方法(四叉树/八叉树方法)

在8.2.2中已经介绍了Quadtree/Octree方法的基本思想。这里以二维平面域为例给出具体的网格生成过程。

(1) 用较粗矩形网格覆盖包含物体在内的整个计算域，同时建立Quadtree数据结构[13]。

(2) 建立背景网格。建立背景网格的目的是通过在其上分布一定的步长控制参数，以便能得到合理的、适于物理流场计算的网格分布(关于背景网格的构造方法和控制参数的分布问题亦将在8.5.3节中详细介绍)。

(3) 根据背景网格步长控制参数的要求不断细分各矩形网格，即将一个矩形细分为4个子矩形，直到网格尺度达到所需要的步长分布。为了能使最终生成的网格分布光滑，限制相邻两个矩形的层次级别数之差不大于2是必要的，即在矩形的边上仅容许存在中点，而不容许存在1/4点。当然在每一次的Quadtree细分过程中还可加入如下的光滑措施(图8-24)。

(4) 如果位于流场边界附近的四边形角点到物面的距离小于某一给定值(一般取为局部四边形短边长度的1/8)，则将该点修正到物面上，构成修正的四边形。这一修正的目的是为了防止在边界附近出现很畸形的三角形单元。

(5) 对每一个四边形作如下循环处理。

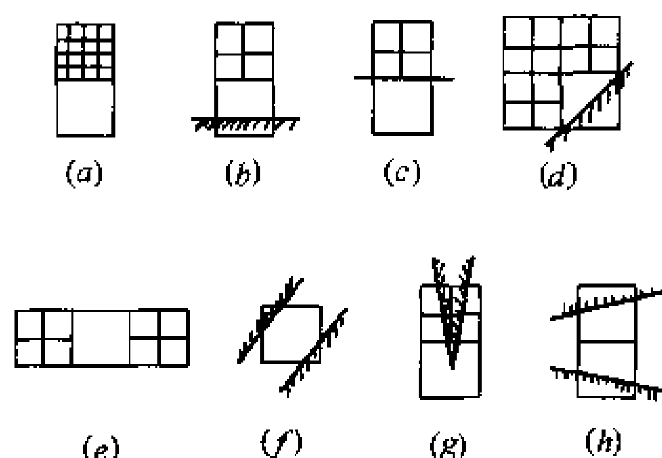


图 8-24　各种光滑措施

(a) 如果 4 个角点都在流场外，则舍弃该四边形（见图 8-25 中 case-A）。

(b) 如果四边形的 4 个角点都在流场内，且在物面附近细分四边形的过程中其边界没有受到分割，即四边形的边上没有被分点（以后称边中心点），则将其划分为两个三角形，对角线的连接方式可随机选取（见图 8-25 中 case-B）。

(c) 如果 4 个角点都在流场内，且边上存在中心点，则在四边形的中心引入一个内部节点，连接此点与四边形的角点和边中心点构成三角元（见图 8-25 中 case-C）。

(d) 如果物面边界切割四边形，对切割后余下的部分（多边形），若仅有 3 个顶点，它就是一个三角形单元；若仅有 4 个顶点，连接距离较短的对角线而构成两个三角形；如果多边形的顶点数多于 4 个，则按前述情况(c)引入内部节点的方式划分（见图 8-25 中 case-D）。

(6) 对生成的初始网格进行光滑处理（关于非结构网格的光滑技术将在 8.5.4 节中介绍）。

图 8-26 显示了用上述方法生成的绕 NACA0012 翼型的网格。其中图 8-26(*a*)为细分后的 Quadtree 结构；图 8-26(*b*)为经过划分和光滑后的三角形网格。

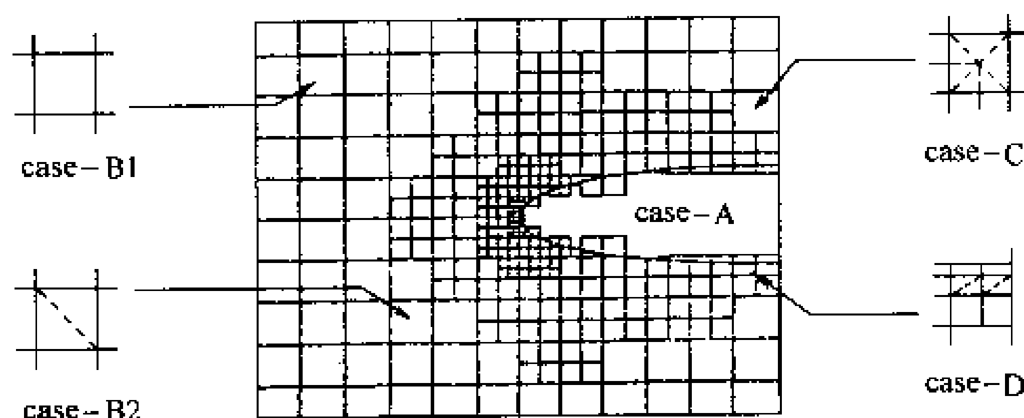


图 8-25　各种可能的划分方式

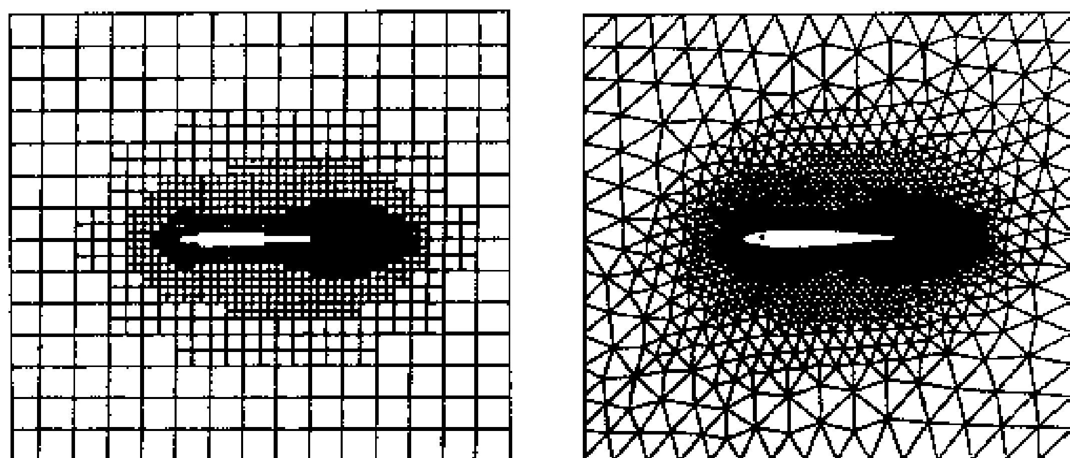


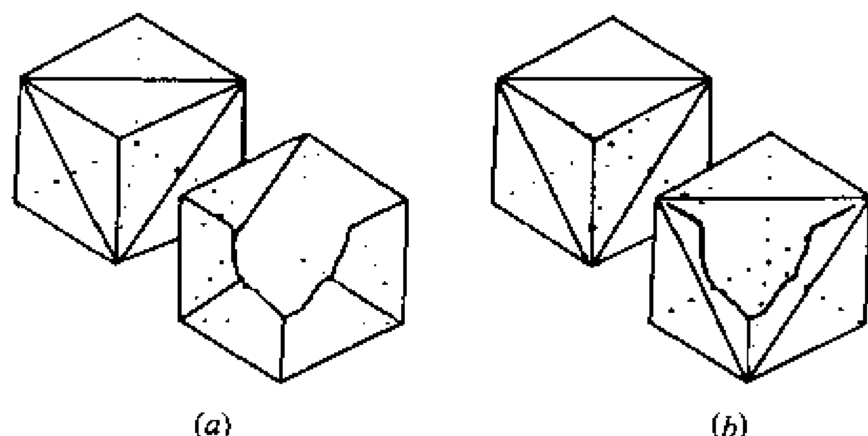
图 8-26　绕 NACA0012 翼型的网格

二维 Quadtree 方法可以推广到三维 Octree 方法。从逻辑上讲，这并不存在什么困难，但有两个问题必须引起注意。

(1) 曲面切割立方体的可能性较之二维时多得多，有人指出可能的曲面切割立方体的方式高达几千种。在作了某些限制假设之后，可能的组合情况仍有几十种。显然要按各种可能的组合情况逐一编程是不现实的。因此需要一种简单实际的方法。

(2) 相容性问题。所谓相容性，是指相邻的两个单元在相接的界面上共面。对于二维情况，要求相邻三角形共线段；对于三维问题，则要求两相邻的四面体共享同一个三角形，如图 8-27 所示。

对于二维问题无论如何划分矩形都能保证相容性，而对于三维问题则需要谨慎行事，否则就会出现图 8-27(b)中所示的不相容情况。



(a) (b)

图 8-27 相容性的定义
(a)一致；(b)不一致。

解决上述问题的一种简单方法是：首先将立方体的各表面划分为三角形，然后在立方体的几何中心引入一点，连接此点与表面三角形构成四面体。划分立方体各表面的可能情况较之划分立方体本身要简单得多，同时各表面的划分方式一旦确定，相邻两个立方体之间的相邻四面体的相容性就自然得到保证。

8.5.2 Delaunay 方法

Delaunay 方法的依据是 Dirichlet 提出的一种利用已知点集将平面划分成凸多边形的理论。它要求将给定点集的计算域划分为互不重叠的 Voronoi 子域。通过连接各相邻 Voronoi 子域内的节点构成非结构网格。实现上述过程的算法很多。例如对于平面内的点集，早期有一种通过作任意两点的垂直平分线的方法可以得到包含某点的 Voronoi 区域。设 P_j 为点集 $\{P_k\}, k=1,2,\cdots,N$ 中的某一点。通过作 P_j 与 $P_m(m=1,2,\cdots,N$, 且 $m\neq j)$间的垂直平分线，垂直平分线的交点围成的最小凸多边形即为 P_j 的 Voronoi 子域。虽然这种方法的几何逻辑相当简单，但具体操作起

来却并不容易，特别是将其推广到三维问题就更加复杂。在 1980 年，Bowyer[30]和 Waston[31]分别提出了两种新的算法。后来经过 CFD 工作者的不断研究与发展，形成了目前这种比较简单的 Delauney 网格生成方法。其具体过程如下。

(1) 构造初始网格。初始网格需要满足以下要求：①包含整个计算域；②满足 Delaunay 准则；③尽可能体现物形特征。

(2) 在网格步长没有达到要求的地方引入一个新点。

(3) 标记需要删除的所有三角形。如果初始网格中的某一三角形的外接圆内包含新点，则该三角形要被删除(图 8-28(*a*))。

(4) 由所有要删除的三角形构成一个 Delaunay 空洞(图 8-28(*b*))。

(5) 连接新点与 Delaunay 空洞的边界上的顶点，构成新的网格系(图 8-28(*c*))。

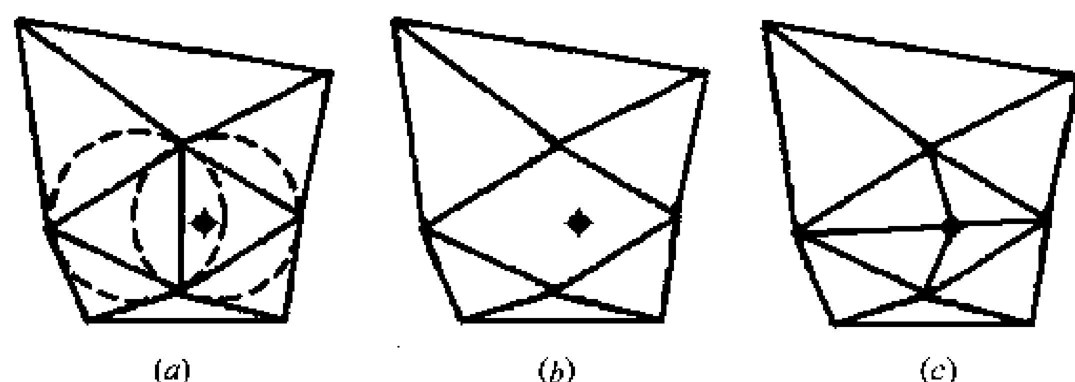


图 8-28　Delaunay 三角化原理

(6) 重复(2)至(5)步的操作，直到所有的三角形网格步长达到所希望的分布。

图 8-29 显示了 Delaunay 方法在一个环域内生成三角形网格的全过程。图 8-29(*a*)为初始网格，在新点的引入过程中生成图 8-29(*b*)和 8-29(*c*)的中间过渡网格，最后得到一个全场均匀过渡的网格(图 8-29(*d*))。上述方法可直接推广到三维问题。图 8-30 即为绕某先进战斗机的表面网格。

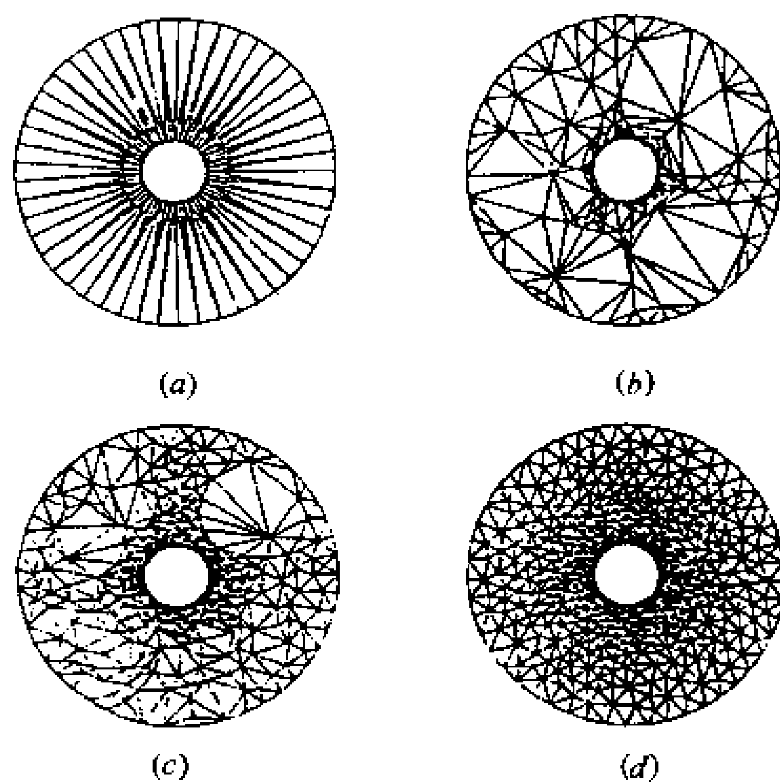


图 8-29　Delaunay 三角形网格生成过程

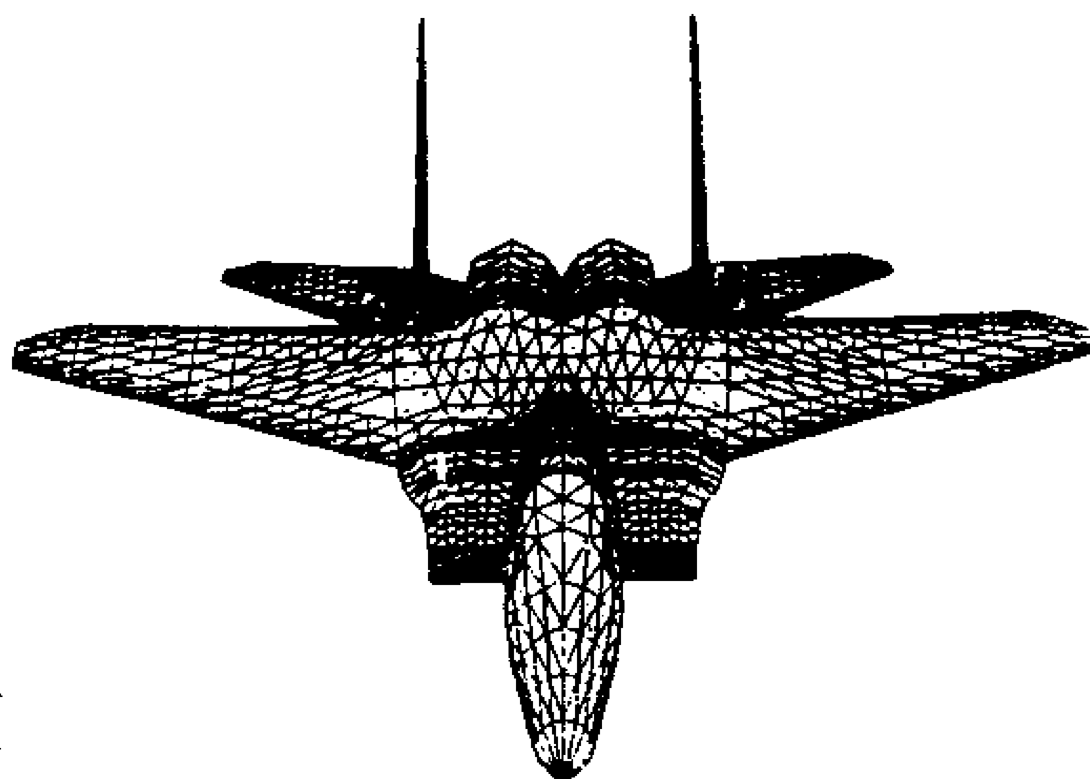


图 8-30　用 Delaunay 方法生成的战斗机表面网格(取自文献[32])

8.5.3 阵面推进法

本节将以二维平面域为例详细介绍阵面推进法，并在最后将其推广到三维复杂外形。阵面推进法的总体框架如下。

(1) 外形描述。

(2) 背景网格的构造。

(3) 初始阵面的生成。

(4) 阵面推进生成空间网格。

关于外形描述将在后面介绍，首先讨论背景网格的构造。

(1) 背景网格的构造

为了实时控制初始阵面的划分以及推进过程中新点的插入，需要建立背景网格。在背景网格上按不同问题的要求分布空间步长控制参数：空间步长 S、伸展比 δ 和伸展方向 R（各参数的定义见图 8-31）。

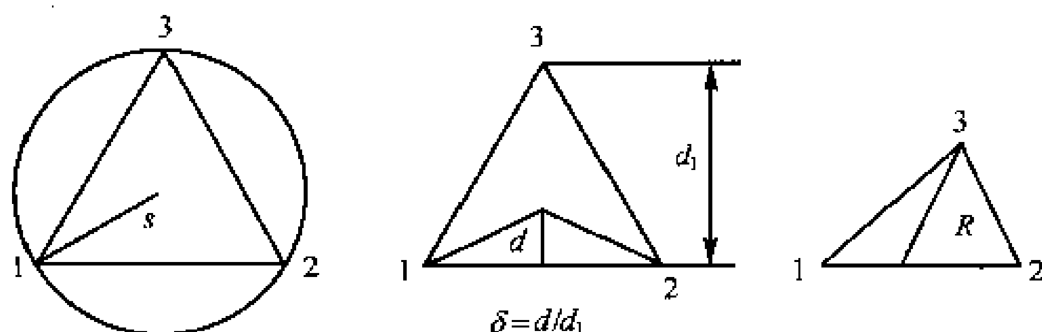


图 8-31　空间步长控制参数的定义

推进过程中任意点的推进控制参数由背景网格上的参数插值获得。传统的方法是用数目较少的非结构网格。这种方法存在以下不足：①非结构背景网格一般由人工构造，显然对复杂三维问题这是一件繁琐且费时的工作；②非结构背景网格上给定控制参数分布带有较强的经验性，而且修改和调节起来显得不太灵活，如果给定的参数不合适将可能导致推进失败；③在非结构背景网格上插值，需要复杂的查寻过程，长时间的查寻与插值必将影响推进效率。由于这些不足，S. Pirzadeh 等[33]提出利用矩形结构网格作为背景网格。这一方法的基本思想是：用矩形结构网格覆盖流场，在

流场中分布一定的点源和线源，即流场网格在该局部区域的控制参数，将这些源视为离散的热源，求解热传导方程，求得的稳态解即为全流场的控制参数分布。以参数 S 为例，控制参数的求解方法如下。

主控方程可以表述为

$$\nabla^2 S = G \tag{8.5.1}$$

对于外流问题，一般使用 Dirichlet 边界条件；对于内流问题，一般使用 Neumann 边界条件。上式中 G 为源项，其定义为

$$G_{i,j} = \sum_{n=1}^{N} \Psi_n (S_{i,j} J_n - I_n) \tag{8.5.2}$$

式中下标(i,j)代表背景网格节点，N 为“热”源的总数，Ψ_n 为第 n 个源的强度因子，函数 I_n 和 J_n 定义如下

$$I_n = \begin{cases} S_n / r_n^2 \\ \dfrac{1}{|I_n|}\displaystyle\int_{I_n} \dfrac{f_n(l)}{r^2(l)} \mathrm{d}l \end{cases} \tag{8.5.3a}$$

$$J_n = \begin{cases} I / r_n^2 \\ \dfrac{1}{|I_n|}\displaystyle\int_{I_n} \dfrac{\mathrm{d}l}{r^2(l)} \end{cases} \tag{8.5.3b}$$

式中 S_n 和 $f_n(l)$分别为点源和线源的强度；r 为背景网格节点到源的距离；$|I_n|$为线源长度。上述热传导方程由 Gauss-Seidel 迭代法求解。

为了对参数分布实施更为灵活的控制，这里采用如下带有方向性的强度因子

$$\Psi_n = a_n \beta + b_n |\Phi^k| \tag{8.5.4}$$

$$\Phi = (1 - |\alpha|/2) \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} + \alpha/2 \cdot |\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}| \tag{8.5.5}$$

式中 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}_n / r_n$；

$$\beta = \begin{cases} 0, & \alpha(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}) < 0 \\ 1, & \alpha(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}) \geqslant 0。 \end{cases}$$

上式中 $\boldsymbol{u}$ 为期望的强度因子作用方向，k 为一正常数（文中

取为 10)，α 可取为 1,0 或 -1。当 $\alpha=1$ 时表示该源仅对 $\boldsymbol{u}$ 正向的区域起作用；当 $\alpha=-1$ 时反之；而当 $\alpha=0$ 时表示双向作用。参数 a_n 控制该源的传播半径，而 b_n 为方向强度参数，b_n 愈大，对 $\boldsymbol{u}$ 方向上的区域作用愈强。

矩形背景网格的参数插值相当简单。如要求点 $P(x_p, y_p)$的步长 S_p，由 $d_x = x_p - x_{\min}, d_y = y_p - y_{\min}$很快可以扫描到点 P 所在的背景网格区域。通过该子域四角点的步长参数线性插值即可求出 S_p。对比非结构背景网格，该操作要简单快捷得多。

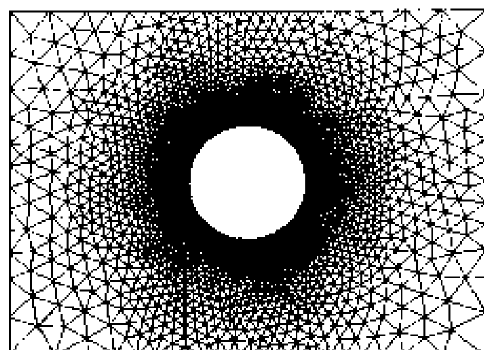
通过适当调节上述各源项控制参数 $a_n, b_n, \boldsymbol{u}, \alpha$，可以得到满意的网格分布。以下就各参数的变化对网格生成的影响举一简单的例子。假设物形为圆点在(0.5,0)，半径为 0.5 的圆，流场区域为(-2.0,3.0) * (-2.0,2.0)，背景网格的区域取为(-2.25,3.25) * (-2.25,2.25)的长方形域，x 和 y 方向的背景网格尺度取为0.1。在四个角点都布上各向同性的点源($S=0.1, a_n=2.0, b_n=1.0, \boldsymbol{u}=(0,0), \alpha=0$)；在圆的中心亦布上点源，点源的强度 $S=0.01$，各参数的选取列于表 8-1。

表 8-1 中心点源的参数变化情况

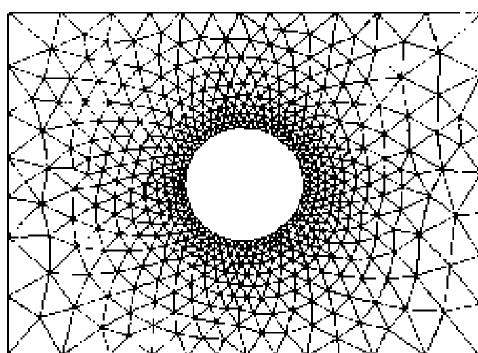
	a_n	b_n	α	$\boldsymbol{u}$
case 1	8	0	0	(0,0)
case 2	2	0	0	(0,0)
case 3	4	0	1	(-1,0)
case 4	4	5	0	(-1,0)
case 5	4	5	-1	(-1,0)

各状态对应的网格如图 8-32 所示。由图 8.32(a)与图 8.32(b)比较可知，a_n 的大小决定源的传播半径，a_n 愈大，其影响区域越大。当 α 取 1 时(case3)，点源仅对(-1,0)正方向的区域有影响，因此左边的区域网格较密，右边的区域网格较稀。$b_n>0$ 时(case4～5)，点源的影响方向各异，且在给定的方向 $\boldsymbol{u}=(-1,0)$

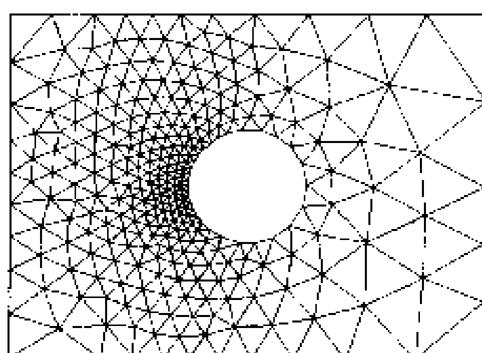
上的影响最大；$\alpha = 0$ 时同时影响正负方向（图 8-32（d）），而当 $\alpha = -1$ 时，仅影响 $\boldsymbol{u} = (-1,0)$ 的反方向，即区域右侧（图 8-32（e））。



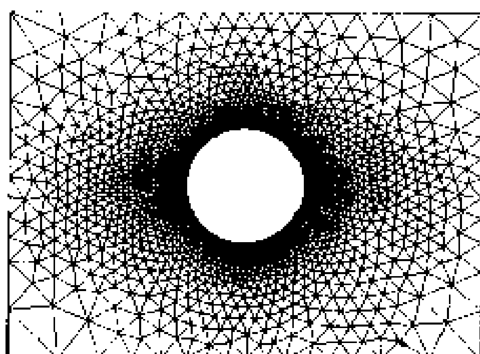
（a） case 1 网格



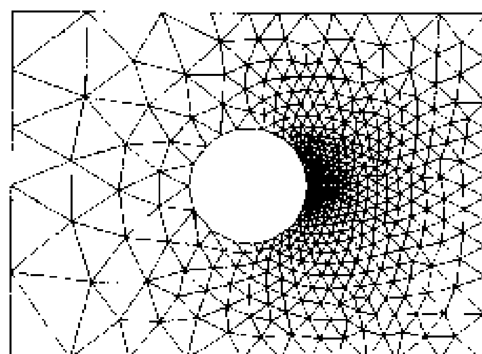
（b） case 2 网格



（c） case 3 网格



（d） case 4 网格



（e） case 5 网格

图 8-32　点源的参数变化对网格疏密的影响

有时候，需要在流场的某一狭长区域内加密网格，比如导弹的控制翼附近，跨超声速流中的激波区等，为此可在局部区域布上线源。仍以上述问题为例，当中心点源参数取为 $a_n = 4.0$，$b_n = 1.0$，$\boldsymbol{u} = (0,0)$，$\alpha = 0$ 时，分别于 $(0.5,0.4) \sim (0.5,0.9)$ 和 $(-0.5,$

$-0.4)\sim(-0.5,-0.9)$的线段上布置线源，线源的强度取为0.004，各参数分别取为 $a_n=0.25$, $b_n=1.0$, $\boldsymbol{u}=(0,0)$，图 8-33(*a*)显示了 $\alpha=0$ 时的网格。图 8-33(*b*)显示了上线源取 $\alpha=1$，下线源取 $\alpha=-1$ 时的网格，可见圆的右上方和左下方的网格分别加密。

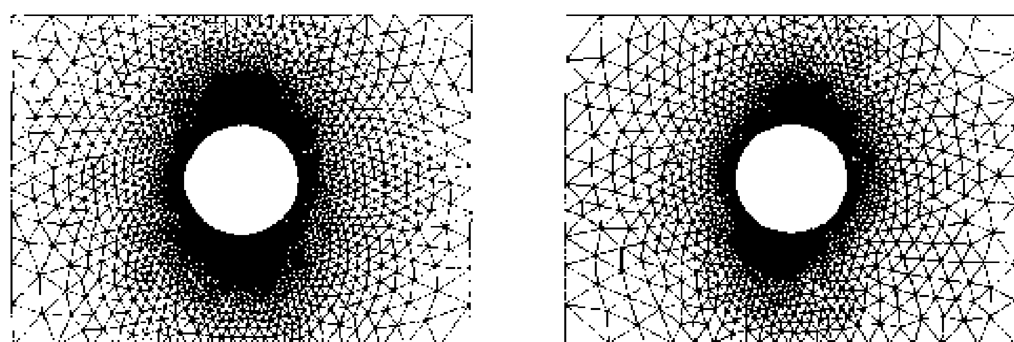


图 8-33　线源的参数变化对网格疏密的影响

(*a*)上下线源 $\alpha=0$ 时的网格；(*b*)上线源 $\alpha=1$，下线源 $\alpha=-1$ 时的网格。

对于更复杂的任意外形，有人提出采用多层次的矩形背景网格，这样可以节省背景网格的单元数目，而且继承了上述单层矩形背景网格的优点。

(2) 初始阵面生成

对于二维任意外形，其物面及流场内外边界一般可以被表征为分段参数三次样条曲线。考虑到参数三次样条曲线不适用于初等解析曲线，还可利用如直线、抛物线、圆(圆弧)和椭圆等解析曲线，当然更可以用现在计算机辅助几何设计中普遍采用的 *B* 样条曲线来描述。为了保证在下一步的阵面推进过程中阵面向流场内收缩，在外形输入时应遵循以下原则：对内边界曲线段，按顺时针方向的顺序输入；而对外边界曲线段，按逆时针方向的顺序输入。将各曲线段按背景网格的步长要求分割为小的直线段(阵元)，即构成初始阵面。具体分割各曲线段的过程如下。

(i) 给定当前点的坐标矢量 $\boldsymbol{X}_0$，在背景网格中插值出 $\boldsymbol{X}_0$ 处的空间步长参数 S_p，并由 $\boldsymbol{X}_0$ 处的曲线切线方向 $\boldsymbol{\tau}_0$ 构成矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}_0=S_p*\boldsymbol{\tau}_0$。

(ii) 在 $\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{X}_0+0.5*\mathrm{d}\boldsymbol{X}_0$ 处用第(i)步同样方法构造矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1=S_p*\boldsymbol{\tau}_1$。

(iii) 如果 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}_0\neq\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1$,令 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}_0=(\mathrm{d}\boldsymbol{X}_0+\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1)/2$,返回到第(ii)步迭代运行。

(iv) 判断曲(直)线段终点 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{end}}$与 $\boldsymbol{X}_0$ 间的弧长 S_r

(a) 如果 $S_r<S_p*0.3$,取 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{X}_{\mathrm{end}}-\boldsymbol{X}_0$ 为最后阵元,过程结束。

(b) 如果 $S_r<S_p*1.3$,取 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{X}_{\mathrm{mid}}-\boldsymbol{X}_0$,这里 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{mid}}$为 $\boldsymbol{X}_0$ 与 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{end}}$间弧段的中点,并令 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{mid}}-\boldsymbol{X}_0$,$\boldsymbol{X}_{\mathrm{end}}-\boldsymbol{X}_{\mathrm{mid}}$为最后二阵元,过程结束。

(c) 其它情况则记录 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}_0$ 为阵元,并令 $\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{X}_0+\mathrm{d}\boldsymbol{X}_0$,返回第(i)步。

(3) 阵面推进

初始阵面生成以后即可开始阵面推进,阵面推进包含如下步骤。

(i) 在所有阵元中找寻最短阵元 AB。由最短阵元开始推进可以生成质量较高的单元,并减少出现推进失败的可能性。为了缩短全局查寻时间,这里运用"堆"数据结构[21]。在开始推进前,将各阵元按由长到短的顺序压入堆;推进过程中生成的新阵元也按同样方式压入堆,始终保持堆顶阵元为最短。

(ii) 确定一最佳点 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{best}}$作为候选点。$P_{\mathrm{best}}$的位置定义为 $X_{\mathrm{best}}=X_{\mathrm{m}}+S_p*\boldsymbol{n}_{ab}$,其中 X_{m} 为阵元 AB 的中点,S_p 为 X_{m} 处的空间步长,$\boldsymbol{n}_{ab}$为阵元AB 指向流场的单位法向。

(iii) 在 P_{best}周围 $\alpha*S_p$ 的范围内(一般取 $\alpha=6$),查寻阵面上的邻近点(不包括点 A 和 B),以备下一步筛选。本步的目的是尽可能利用现有点构成三角形,因为 P_{best}与阵元 AB 构成的三角形有可能与原有三角形相交,或者尽管 $\Delta ABP_{\mathrm{best}}$的质量很好,但继续推进时可能导致生成质量很差的单元。为了加速查寻这里利用 Quadtree 数据结构[21]

(iv) 在阵元 AB 的周围的 $\alpha * S_p$ 范围内查寻邻近阵元，以后将利用这些阵元进行相交性判断。由于推进是一个局部过程，故取一定范围内的阵元即可。为了加速查寻，这里利用链表数据结构[21]。

(v) 将最佳点和邻近点按网格质量参数 q_n 由大到小的顺序排列。q_n 的定义为 ΔABP 的面积与其外接圆的面积之比。考虑到当出现有点与阵元 AB 构成的单元质量不太差时，尽可能取现有点，于是令 $q_{\text{best}} = 0.6 * q_{\text{best}}$。

(vi) 按网格质量参数的顺序，依次判断候选点 P_{cond} 是否与邻近阵元相交。如果相交，则选下一点继续判断；如果不相交，则由 P_{cond} 与阵元 AB 构成新的三角形。

(vii) 更新阵面信息，即删去新阵面外的阵元，增补新生成的阵元。

(viii) 重复(i)～(vii)的过程，直至堆中没有阵元存在，初始网格生成结束。

图 8-34 显示了阵面推进法生成三角形网格的全过程。

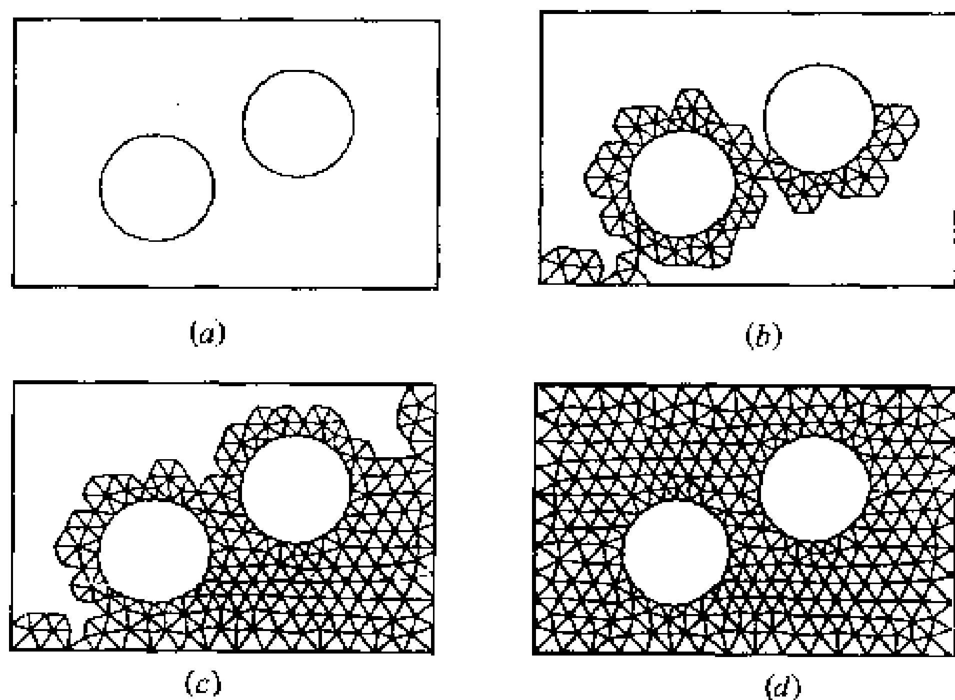


图 8-34　阵面推进法生成三角形网格的过程

(4) 三维复杂外形的网格生成

将二维阵面推进法应用于三维问题，前面介绍的背景网格技术、数据结构、推进方法等都可直接推广，只是这时的初始阵面为由三角形组成的曲面。这就首先要将任意曲面进行描述，并将它划分为三角形。

(i) 表面三角化过程

整个表面网格生成过程由以下各部分组成。

(a) 按由点到线到面的层次结构定义外形。

(b) 建立矩形背景网格及分布网格尺度控制参数。

(c) 按网格尺度分布划分曲线成线阵元。

(d) 按网格尺度分布生成各曲面片内的三角形网格。

(d1) 将曲面片变换成平面。

(d2) 由线阵元组成该曲面片的初始阵面。

(d3) 阵面推进生成变换平面内的三角形网格。

(d4) 网格优化。

(d5) 反变换成三角化曲面。

(e) 整体表面网格优化。

(ii) 表面定义

为了减少手工输入量，采用由点构成线、再由线构成面的层次数据结构。线的类型共有如下几种。

(a) 由两点组成的直线。

(b) 由三点组成的抛物线。

(c) 由三个以上的点构成的参数三次样条曲线。

(d) 由上述三种线组成的线。

考虑到参数三次样条曲线不能准确描述圆(圆弧)等解析曲线，必须对由(b)、(c)或(d)描述的圆(圆弧)做解析修正。(d)类线的引入对减少描述表面的曲面片数是非常有益的。例如，对于翼身组合体，在翼的前缘曲率变化较大，一般要单独分片，而在机身上此处曲率变化并不大，没有必要单独分片，采用(d)类线可以较好地解决这一问题，并保证曲面片间的网格相容性。

曲面片的类型共有如下几种。

(a) 由任意条线组成的平面。

(b) 由三条抛物线组成的三角形等参抛物面。

(c) 由四条抛物线组成的四边形等参 Serendipity 曲面片。

(d) 由任意三条曲线组成的三角形 Barnhill-Gregory-Nielson 曲面片。

(e) 由任意四条曲线组成的四边形双线性 Coon's 曲面片。

上述曲面片不能准确描述某些解析曲面，而在航空航天应用领域经常遇到球头及旋成体等情况，为此须对由上述曲面片描述的球面和旋成表面做相应的修正。很显然，线和面的类型并不局限于上述几种。计算机辅助几何设计(CAGD)的新成果均可用于复杂几何外形的描述，例如 Bezier 曲线曲面、B 样条曲线曲面以及最近发展的非均匀有理 B 样条(NURBS)曲线曲面等。

(iii) 曲面变换

(a) 平面变换$(x,y,z)\Rightarrow(\xi'',\eta'')$

假设平面片位于由向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 组成的平面内，定义 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ (平面法向量)和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}$(图 8-35)，则可以得到$(x,y,z)$与$(\xi'',\eta'')$间的变换关系

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \xi''\boldsymbol{x}_1 + \eta''\boldsymbol{x}_2 \tag{8.5.6}$$

且

$$\left.\begin{aligned}\xi'' &= \boldsymbol{x}_1\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0),\\ \eta'' &= \boldsymbol{x}_2\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\end{aligned}\right\} \tag{8.5.7}$$

式中 $\boldsymbol{x}_0$ 为平面内一点，$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$，$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{c}/|\boldsymbol{c}|$。

(b) 三角形等参抛物面$(x,y,z)\Rightarrow(\xi,\eta)$

三角形等参抛物面由六点定义(如图 8-36)，则该曲面片上任意点的坐标可表述为

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{6} N^i\boldsymbol{x}_i \tag{8.5.8}$$

式中 N^i 为形函数

$$
\left.\begin{aligned}
N^1 &= (1-\xi-\eta)(1-2\xi-2\eta) & N^4 &= 4\xi\eta \\
N^2 &= 4\xi(1-\xi-\eta) & N^5 &= \eta(2\eta-1) \\
N^3 &= \xi(2\xi-1) & N^6 &= 4\eta(1-\xi-\eta)
\end{aligned}\right\}
\tag{8.5.9}
$$

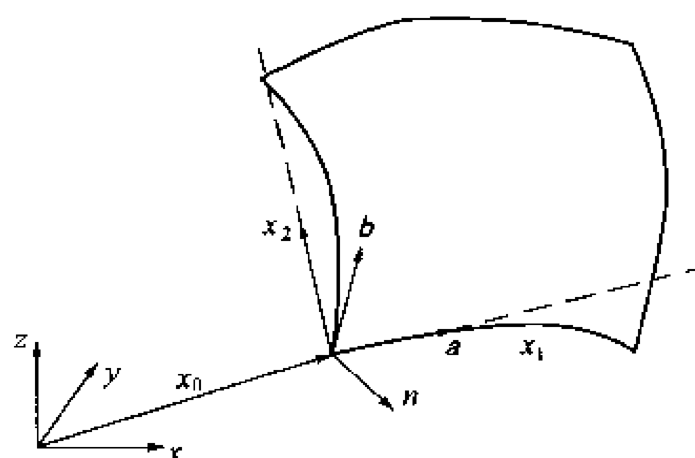


图 8-35　平面变换示意图

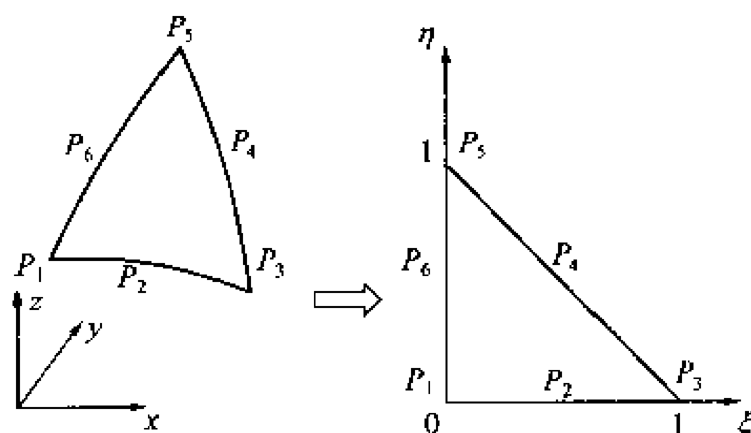


图 8-36　三角形等参抛物面变换示意图

(c) 四边形等参 Serendipity 曲面片$(x,y,z)\Rightarrow(\xi,\eta)$

该曲面片可由八个点来定义(如图 8-37),曲面上的点可以表述为

$$
\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{8} N^i \boldsymbol{x}_i \tag{8.5.10}
$$

这里形函数 N^i 的具体形式为

$$\left.\begin{array}{ll} N^1 = (1-\xi)(1-\eta)(1-2\xi-2\eta) & N^5 = -\xi\eta(3-2\xi-2\eta) \\ N^2 = 4\xi(1-\xi)(1-\eta) & N^6 = 4\xi\eta(1-\xi) \\ N^3 = -\xi(1-\eta)(1-2\xi+2\eta) & N^7 = -\eta(1-\xi)(1+2\xi-2\eta) \\ N^4 = 4\xi\eta(1-\eta) & N^8 = 4\eta(1-\xi)(1-\eta) \end{array}\right\} \tag{8.5.11}$$

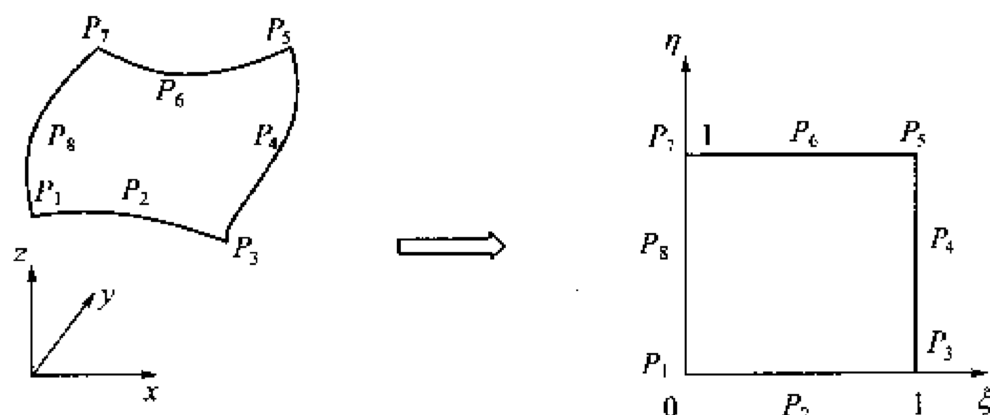


图 8-37 四边形等参 Serendipity 曲面片

(d) 三角形 Barnhill-Gregory-Nielson 曲面片

如图 8-38 所示，三条任意曲线 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 构成此曲面片，曲面上的点可表述为

$$\boldsymbol{x} = \xi\boldsymbol{F}_2(\eta) + \eta\boldsymbol{F}_2(1-\xi) +$$

$$\boldsymbol{F}_1(\xi) + \boldsymbol{F}_3(1-\eta) - \eta[\boldsymbol{F}_1(\xi) + \boldsymbol{F}_3(\xi)] -$$

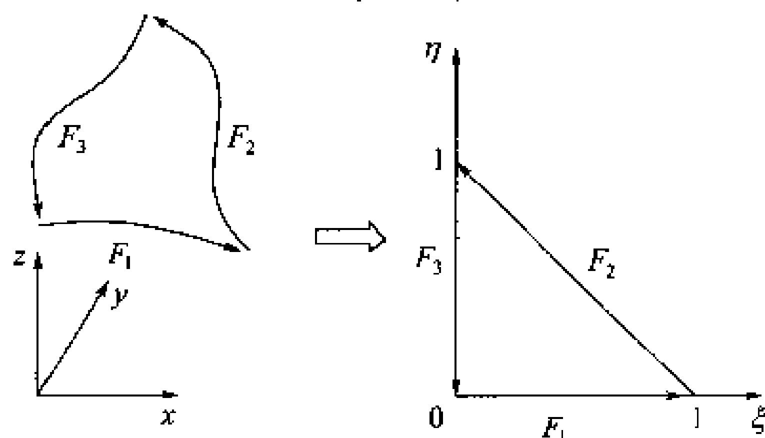


图 8-38 三角形 Barnhill-Gregory-Nielson 曲面片

$$\xi[\boldsymbol{F}_1(1-\eta)+\boldsymbol{F}_3(1-\eta)]-(1-\xi-\eta)\boldsymbol{F}_1(0)$$

(8.5.12)

(e) 四边形双线性 Coon's 曲面片

如图 8-39 所示，四条任意曲线 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3,\boldsymbol{F}_4$ 构成此曲面片，曲面上的点可表述为

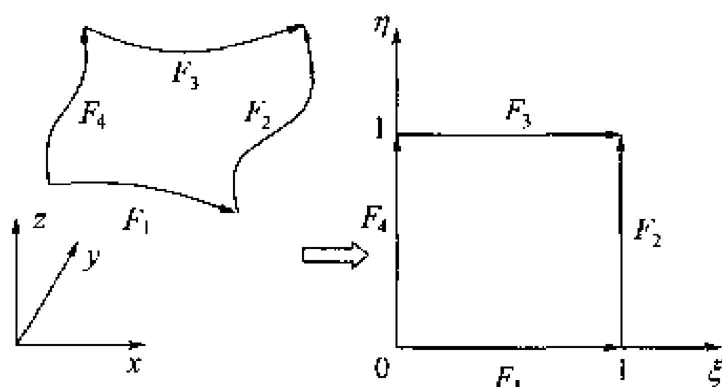


图 8-39 四边形双线性 Coon's 曲面片

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}=&(1-\eta)\boldsymbol{F}_1(\xi)+\xi\boldsymbol{F}_2(\eta)+\\&\eta\boldsymbol{F}_3(\xi)+(1-\xi)\boldsymbol{F}_4(\eta)-[(1-\xi)(1-\\&\eta)\boldsymbol{F}_1(0)+\xi(1-\eta)\boldsymbol{F}_2(0)+\\&\xi\eta\boldsymbol{F}_2(1)+(1-\xi)\eta\boldsymbol{F}_3(0)]\end{aligned} \tag{8.5.13}$$

(f) 单位平面的保形变换$(\xi,\eta)\Rightarrow(\xi'',\eta'')$

为了确保按三维空间网格尺度分布生成表面网格，须将变换后的单位平面(ξ,η)进行适当的拉伸与剪切来近似三维空间曲面片，方法如下

$$\left.\begin{aligned}\xi''&=x_B\xi+x_D\eta+(-x_B+x_C-x_D)\xi\eta\\\eta''&=y_D\eta\end{aligned}\right\} \tag{8.5.14}$$

或

$$\left.\begin{aligned}\eta &= \eta''/y_D \\ \xi &= (\xi'' - x_D\eta)/[x_B + (-x_B + x_C - x_D)\eta]\end{aligned}\right\} \quad (8.5.15)$$

当曲面片为三角形时，令 $x_C = x_B + x_D$，各坐标点的定义如图 8-40所示。

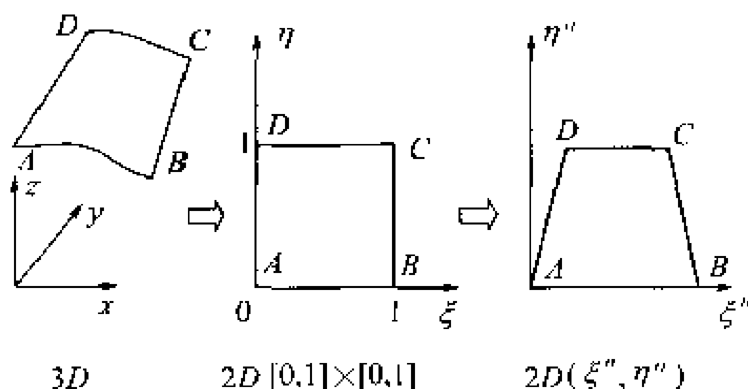


图 8-40　单位平面的保形变换$(\xi,\eta)\Rightarrow(\xi'',\eta'')$

(iv) 相交性判断

在二维阵面推进过程中，仅涉及到线段与线段之间的相交性判断，这是比较简单的。在三维情况下，必须判断三角形之间是否相交。这种三角形之间的相交性判断的几何逻辑也非常简单，但由计算机实现起来却相当繁琐。判断的效率直接影响网格生成的效率，而且更为重要的，判断的正确与否直接关系到是否能正确地生成网格。

两个三角形之间的相交性判断可以分解为每一个三角形的三条边与另一个三角形是否相交，即通过六次边与三角形的相交判断可以确定两个三角形是否相交。如果有一条边与另一个三角形相交，则两个三角形相交，否则两个三角形不相交。

(5) 应用实例

非结构网格模拟复杂外形具有结构网格不可比拟的灵活性，图 8-41 显示了绕航天飞机发射系统的表面网格，图 8-42 为类麦道 82 飞机的表面网格，图 8-43 为类“联盟”号飞船返回舱的表面网格。

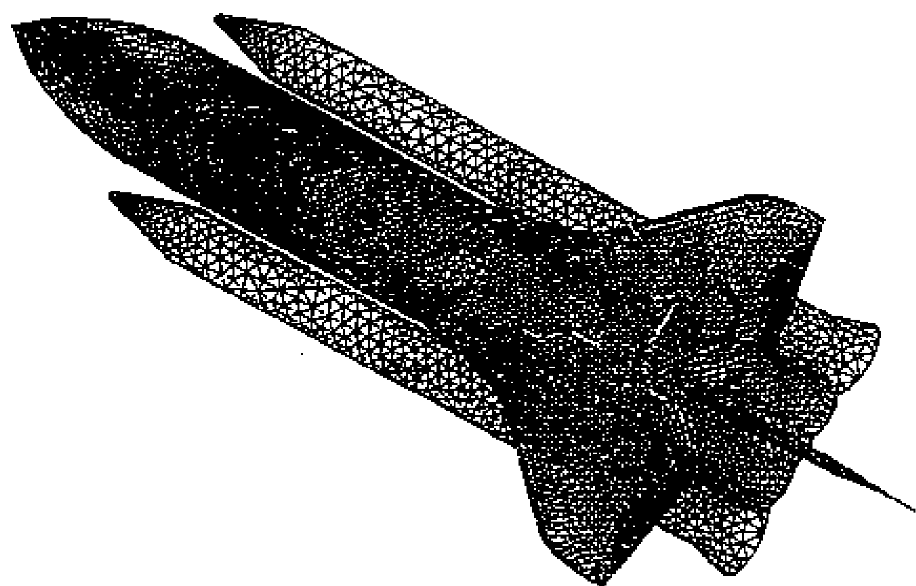


图 8-41　航天飞机发射系统的表面网格(取自文献[7])



图 8-42　类麦道 82 飞机的表面网格

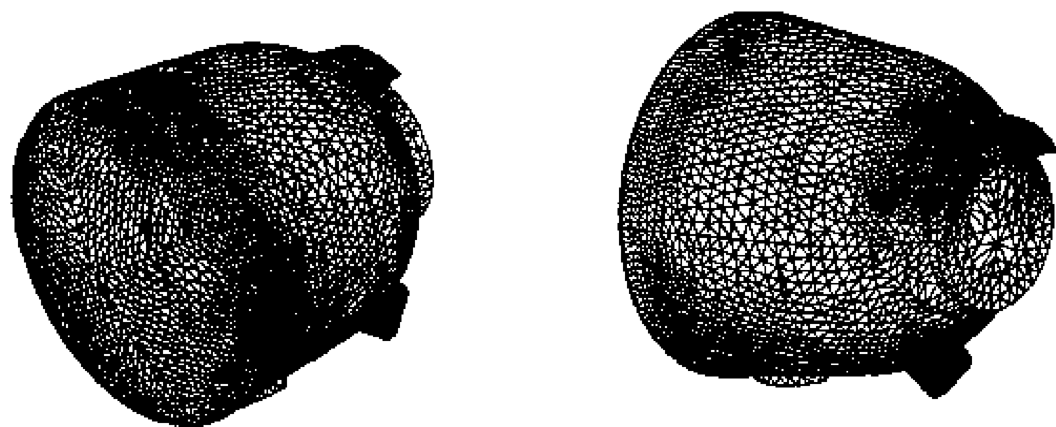


图 8-43　类"联盟"号飞船返回舱的表面网格

8.5.4 非结构网格的光滑技术

网格光滑是非结构网格生成不可缺少的一环。通常的网格光滑技术是基于弹簧原理的节点松弛法,即将节点坐标移至与之相关联的节点组成的多边形的中心,数学表述为

$$x_p = \sum_{i=1}^{N} x_i / N \tag{8.5.16}$$

式中 N 为与点 P 相关联的节点总数。

一般来说,对于二维问题,上述的节点松弛已能得到较好的网格,但对于某些特殊情况,仅实施节点松弛是不够的。比如,某个节点仅与周边三个节点相关联,此时无论如何移动节点位置,都会出现一个顶角大于等于 120°的三角形,其网格质量显然不能满意。为此可实施基于 Delaunay 准则的"对角线交换"操作,即将不满足 Delaunay 准则的两相邻三角形构成的四边形的对角线交换,如图 8-44 所示。两两相邻单元逐一判断,直到所有单元都满足 Delaunay 准则。另外为了保证三角形网格的质量,可以限制一个点关联的单元数目,一般限制在 5~7 个之间,这也可用"对角线交换"操作来实现。实际的网格光滑过程是节点松弛与"对角线交换"操作的交替迭代过程,一般迭代 3~5 次即可得到满意的网格。

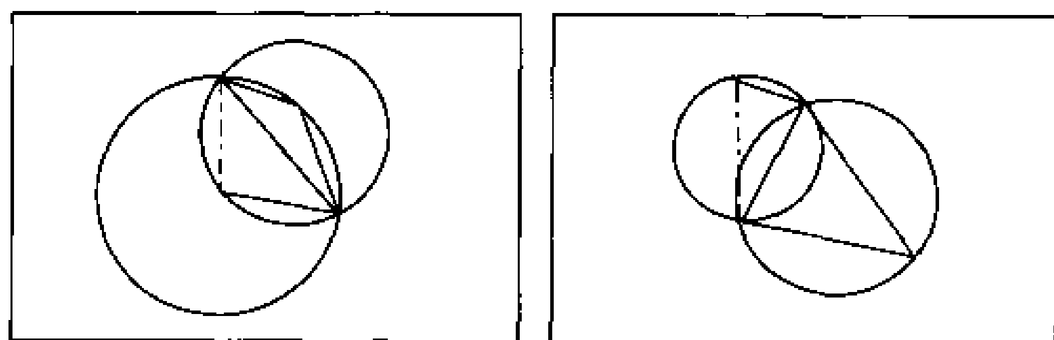


图 8-44 "对角线交换"操作

对于三维非凸域情形,即使在限制了边界节点不移动的条件下,基于弹簧原理的节点松弛也可能得不到收敛解,即平衡态破坏边界,导致出现负的体积元。为此必须在节点松弛的过程中加入约束条件。

在做三维四面体网格光滑之前，首先要将各节点分成以下四种类型：①内部节点（记为 id = 0）——流场内部节点；②表面节点（记为 id = 1）——流场边界面上的节点；③棱边节点（记为 id = 2）——两个流场边界面的交线上的节点；④顶角点（记为 id = 3）——三个或三个以上流场边界面的交点（如图 8-45）。对于内部节点它可以在流场内移动，对于表面节点则限制在边界面上移动，对棱边节点则限制在交界线上移动，对于顶角点则不移动。

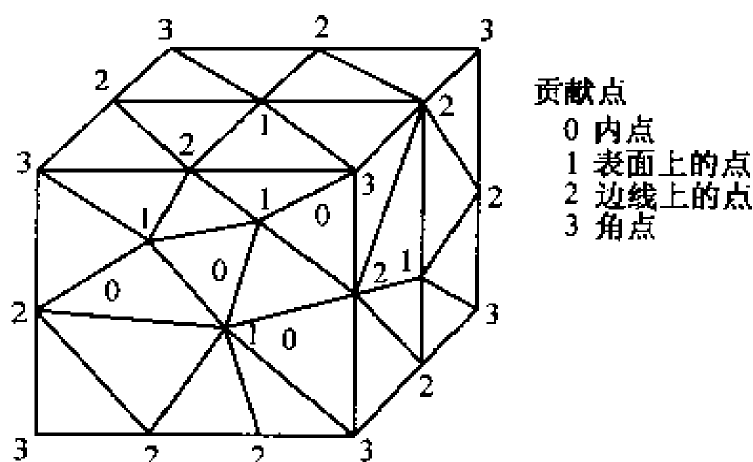


图 8-45 节点的分类

为了保证节点松弛的顺利进行，文献中采用了"网格关联质量"约束条件。所谓网格质量（Q_i）其定义为四面体的内切球半径 r 与外接球半径 R 之比的 3 倍，即 $Q_i = 3r/R$。显然 $0 < Q_i \leqslant 1$。当单元为正四面体时 $Q_i = 1$。而"关联质量" Q_j（Joint Quality）定义为

$$\frac{1}{Q_j} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{Q_i} \tag{8.5.17}$$

这里 N 为总的节点数。显然 Q_j 对质量差的单元（如 $Q_i < 0.01$）非常敏感，要想得到高质量的网格系，必须尽可能使 Q_j 最大。为了达到上述目的，在将每一旧点 X_0 移到多面体的中心（新点）X_N 时作如下判断：①新点是否位于多面体内，这一判断的目的是为了保证不出现负的体积元；②如果移到新点，该点的局部网格关联质量是否提高。如果上述两个条件均满足则移动旧点到新点；如果

不满足，则取 $X_N=(X_0+X_N)/2$，然后循环执行判断，循环步数控制在三步以内，超过三步仍不满足上述条件则不移动该点。具体约束节点松弛的流程如图 8-46 所示。

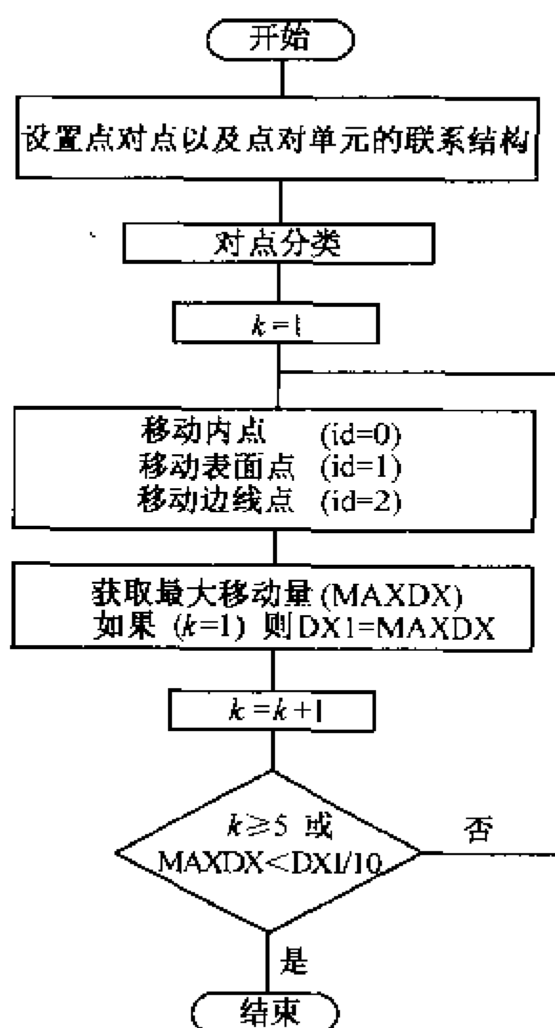


图 8-46　约束节点松弛的流程图

在二维情况下普遍采用的"对角线交换"操作，在三维情况下已不成立，需要进行特殊的 Delaunay 变换，它可分为如下两种情况。

(a) 交界面的交换。两个相邻的四面体有两个面落在同一个物体表面上，则可按图 8-47(a)的方式进行交界面的交换。

(b) 将两个四面体变换为三个四面体或者反变换。如果两相

邻的四面体不满足 Delaunay 准则，可将其变换为三个四面体（图8-47(*b*)）。反之，共同一条棱的三个四面体，如果将其合并成两个四面体后满足 Delaunay 准则，则将它们变换为两个四面体（图8-47(*b*)）。

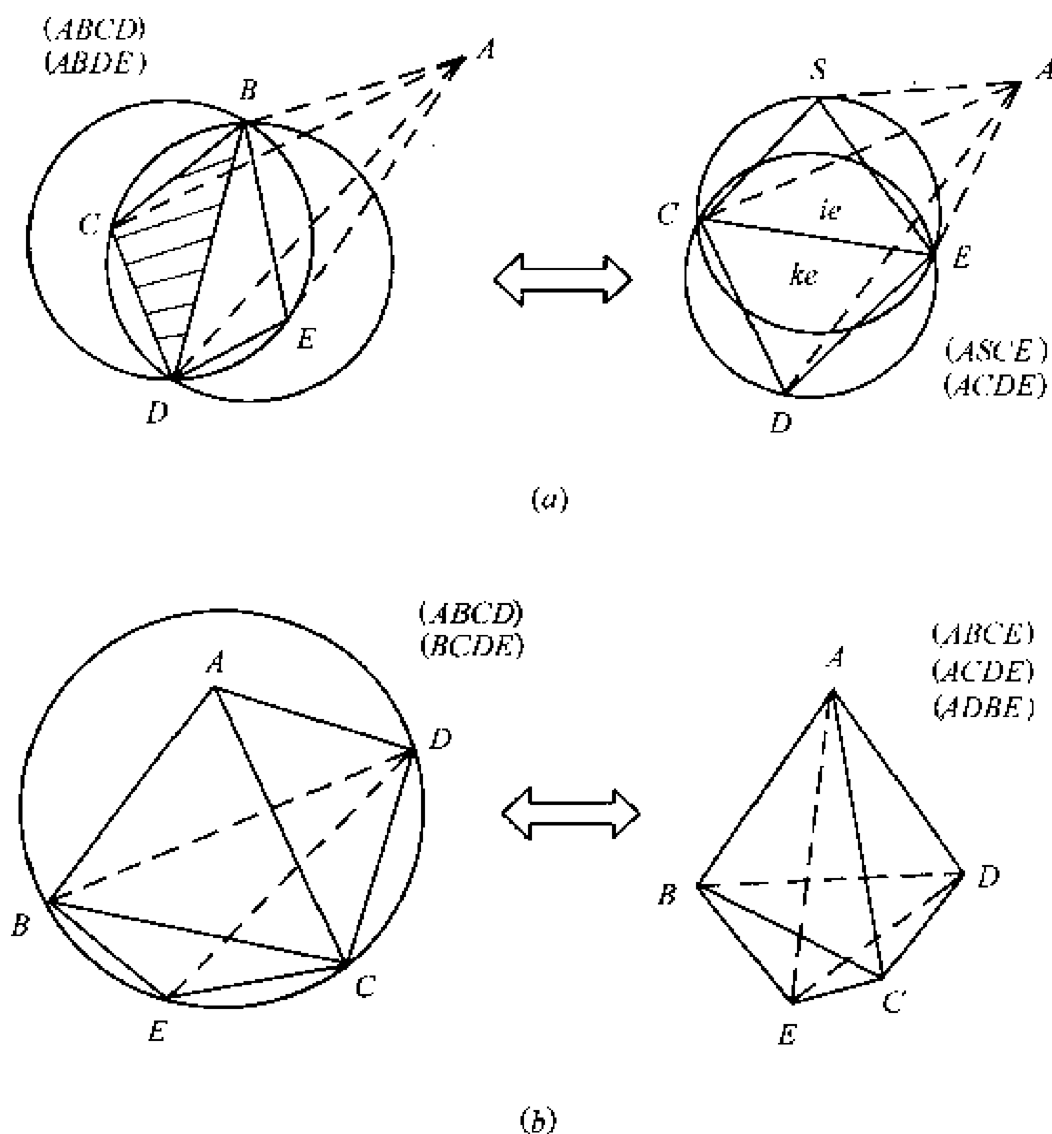


图 8-47　三维 Delaunay 变换

通过约束节点松弛与 Delaunay 变换的交替迭代优化，可以使平均网格质量系数和网格关联质量系数大幅提高，一般可达 0.8 以上，这无疑对数值计算是非常有利的。

8.6 混合网格生成技术

前面已经介绍了各种结构网格和非结构网格生成方法,将这两者有机地结合起来,就构成了混合网格。如8.2.3节中所述,混合网格的混合方案很多,其中"Zipper"网格和"DRAGON"网格等都是几种比较简单的混合方案,这里就不一一详述了。本节主要介绍矩形/非结构混合网格。

8.6.1 无黏流的多层次矩形/非结构混合网格

矩形网格在CFD计算中最早使用,因为矩形网格不仅易于生成而且具有计算简单快捷的显著优点。但是它不能处理复杂曲面边界;而非结构网格正有模拟复杂外形的优势;因此将两者结合起来必能充分发挥它们各自的特长。这样一方面可以提高网格生成和流场计算的效率,另一方面可以处理复杂外形绕流问题。

生成多层次矩形网格的最好方法是Quadtree/Octree方法,而非结构网格的生成,前面介绍的三种方法均可使用。考虑到非结构网格仅局限于物面附近,而Quadtree/Octree方法在物面附近生成的网格质量较差,且Delaunay方法容易破坏边界的完整性,因此我们建议采用阵面推进法。于是具体的混合网格生成过程如下。

(1) 复杂外形的定义与描述。

(2) 建立矩形结构背景网格。

(3) 表面三角形网格自动生成。

(4) 按全场最大的网格步长,用直角坐标网格覆盖全流场,并建立树状层次数据结构。

(5) 按背景网格步长控制参数的要求不断细分各直角坐标网格,直到网格分布达到所需要的步长分布。

(6) 删除物面附近的直角坐标网格(一般两三层即可),构成包含物体的"洞",并将洞边界(由矩形组成)划分为三角形,由洞边界和物面网格组成封闭的初始"阵面"。

(7) 阵面推进自动生成“洞”内的非结构网格，随即进行非结构网格的优化。

可以看出，混合网格的生成过程仅在非结构网格生成的基础上增加了直角坐标网格生成部分(第(4)～(6)步)。通过以上各步可以生成任意复杂外形的多层次矩形/非结构混合网格。如图8-48给出了带翼梢小翼的翼身组合体的混合网格，图 8-49 生成的是类“哥伦比亚”航天飞机的混合网格。

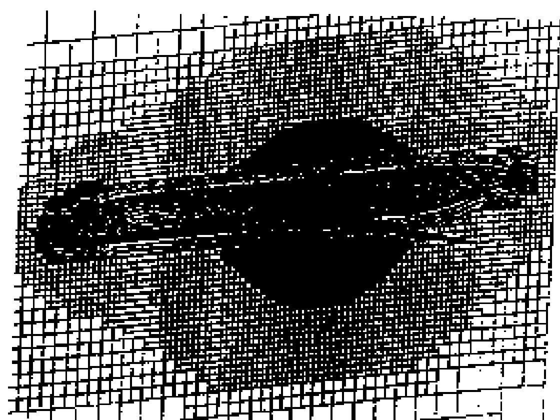


图 8-48　带翼梢小翼的翼身组合体的混合网格

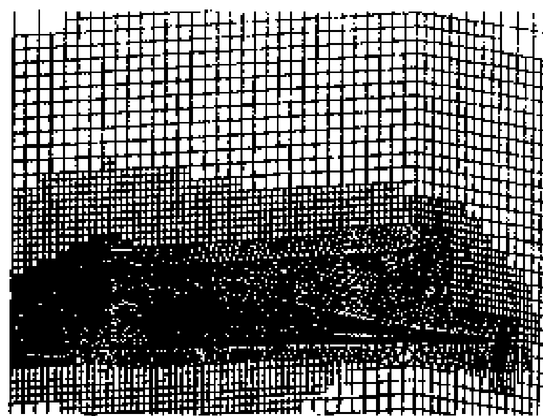


图 8-49　类“哥伦比亚”航天飞机的混合网格

8.6.2　黏性流的多层次矩形/非结构/半结构混合网格

为了较好地模拟黏性边界层，需要在物面的法线方向分布足够密的网格。如果仍采用四面体网格，在网格数量受计算机条件

限制的情况下，势必要求物面附近的四面体具有一定的拉伸比。高拉伸比四面体网格的生成相当困难，而且网格畸变对计算的精度有较大的影响。为此可在边界层内采用有一定压缩比的三棱柱网格。这样一方面可以发挥三角形网格的优点，模拟真实的复杂几何外形；同时另一方面又可以满足黏性计算的要求。

黏性混合网格的生成过程大体与无黏混合网格的生成过程相同，只是在无黏混合网格生成的第(3)步和第(4)步之间插入三棱柱网格生成步。三棱柱网格由"层推进"方法生成。对于任意复杂外形，要得到合适的三棱柱网格，"层推进"必须满足以下要求：①确定适当的推进步长以保证黏性网格层的光滑度，并能做到与外部的四面体网格光滑连接；②确定适当的推进方向以保证"层推进"过程中网格不相交；③各网格层内的网格分布应尽可能光滑。为了达到上述要求，可以采取了如下的具体措施。

(1) 层推进的总步长控制在 a_1 * splocal(这里 splocal 为背景网格上的局部无黏网格步长分布参数，a_1 一般取为 2.0～3.0)的范围内；最外层的推进步长控制在 a_2 * splocal(a_2 一般取为 0.4)以上，以保证三棱柱网格与其外的四面体网格的体积大致相等；层与层之间的步长$(\delta S_p)^k$ 按如下的指数形式分布

$$
\left.\begin{aligned}
(\delta S_p)^k &= (S^k - S^{k-1}) * \text{splocal} \\
S^k &= 1.0 + \beta * (1.0 - C^k)/(1.0 + C^k) \\
C^k &= [(\beta + 1.0)/(\beta - 1.0)]^{B^k} \\
B^k &= (N - k)/(N - 1)
\end{aligned}\right\} \tag{8.5.18}
$$

这里 N 为总的层数，β 为某一压缩因子。

(2) 各点的推进方向由预估——校正法确定。首先由与点 P 相关联的表面三角形的法向算术平均求得一个预估的推进方向 V_1；然后由与点 P 相关联的周围点的法向加权平均求得 V_2。加权平均的权函数取为点 P 与关联点 $I(I=1,\cdots,M；M$ 为关联点

的总数)的法向夹角的平方。然后由 V_2 和 δs_p 预估下一层的网格点坐标 $X^{(k+1)}$;最后松弛得到最终的下一层网格坐标

$$\hat{X}_p^{(k+1)} = (1-\alpha) * X_p^{(k+1)} + \alpha * \left(\sum_I^M (X_I^{(k+1)} * d_I)\right) \Big/ \left(\sum_I^M d_I\right) \tag{8.5.19}$$

式中 d_I 为点 P 与点 I 间的距离,α 为某一小于 0.5 的参数。

(3) 层推进完成后,对层间的网格进行一定的松弛优化。松弛方法为

$$X_p^{(k)} = S^{(k)}/(S^{(k-1)} + S^{(k)}) * X_p^{(k-1)} + S^{(k-1)}/(S^{(k-1)} + S^{(k)}) * X_p^{(k+1)} \tag{8.5.20}$$

以下给出几种外形的黏性混合网格。图 8-50(a)为双椭球外形的混合网格,图 8-50(b)为两椭球结合部的放大网格。可以看到,三棱柱网格由物面光滑过渡到四面体网格,然后通过几层四面体网格光滑过渡到外场的直角网格。图 8-51(a)为某航天飞机基本型的混合网格,图 8-51(b)为相应的在出口处的局部放大网格。可以看到,在翼身结合部和翼尖的剧烈拐角处三棱柱网格的品质相当令人满意。

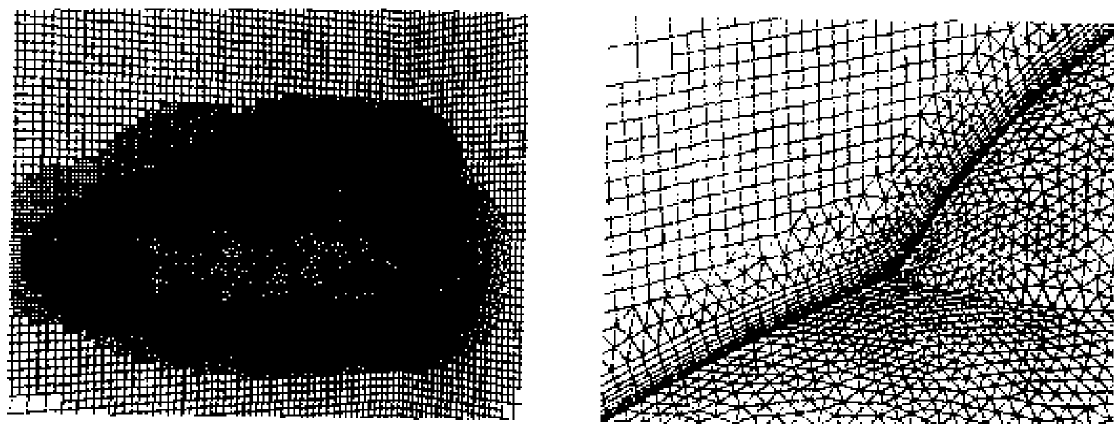


图 8-50 双椭球的黏性混合网格和局部放大网格

(a)双椭球的黏性混合网格;(b)局部放大网格。

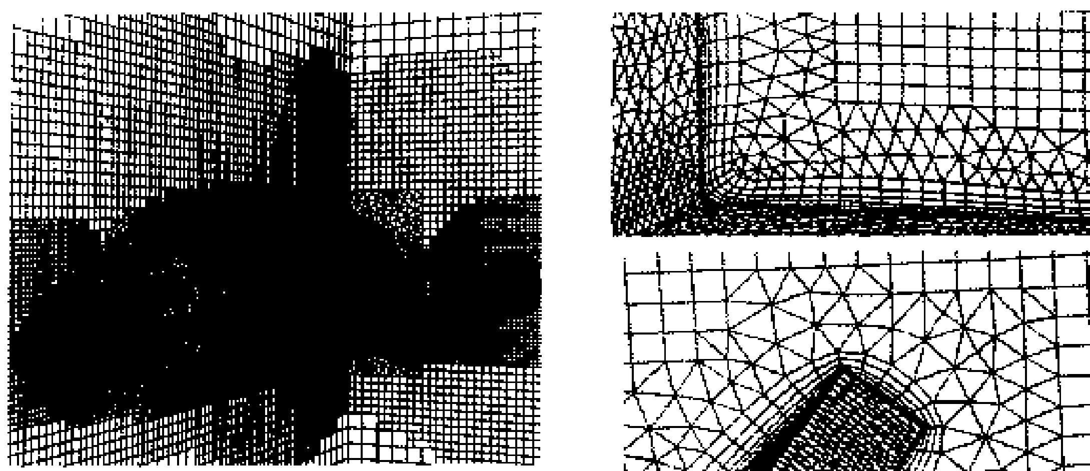


图 8-51　航天飞机基本型的黏性混合网格及局部放大网格

(a)航天飞机基本型的黏性混合网格；(b)局部放大网格。

第 9 章　表面流与横向流的拓扑规律

在计算飞机、导弹等物体绕流时，为了从计算结果中获得流动的形态和特征，例如旋涡演化的情况和流动分离的性状，常常作出物体表面的流态图和流动横截面上的流态图。利用分析方法研究表面流和横向流的拓扑结构，找出流动拓扑结构所遵循的规律，再和数值模拟结合起来，对分析流动特征和机理是非常有益的。同时掌握流动拓扑规律和流动机理后，在数值计算时，哪个地方应该加密网格，哪个地方应作细的计算，也能提出指导意见。另外，对于计算结果不够精细，局部区域流动结构模糊的地方，拓扑规律的研究可以帮助阐明流态的细节。所以开展这方面的研究是非常必要的。

本章第 1 节介绍表面流态的拓扑规律，第 2 节介绍二维绕流时流动平面上流态的拓扑规律，第 3 节介绍垂直于旋涡轴线的横截面上流态的拓扑规律，第 4 节介绍垂直于体轴横截面上流态的拓扑规律。第 3、4 节是对三维流动而言的。在介绍所有拓扑规律时，为了简单，我们略去所有的证明过程，但分别列出了含有这些证明的文献。

9.1　表面流的拓扑[1,2]

9.1.1　表面流的表述

设 x,y,z 为正交坐标系，其中 x,y 在物体表面上，z 沿物面的外法向，$h_1,h_2,h_3=1$ 是相应坐标的尺度因子，u,v,w 是 x,y,z 方向的速度分量，于是流线的方程可写成

$$\left.\begin{aligned}\frac{h_2\partial y}{h_1\partial x}&=\frac{v}{u}\\ \frac{1}{h_1}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{w}{u}\end{aligned}\right\}\tag{9.1.1}$$

下面来研究物面附近的情况。设流动是有黏性的，它满足 Navier-Stokes 方程，在物面上满足无滑移条件，即

$$z=0,u_0=v_0=w_0=0\tag{9.1.2}$$

式中下标“0”表示在物面上(下同)。于是在物面附近，u,v,w 可表示成

$$\left.\begin{aligned}u&=\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_o z+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_o z^2+\cdots\\ v&=\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_o z+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)_o z^2+\cdots\\ w&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)_o z^2+\cdots\end{aligned}\right\}\tag{9.1.3}$$

这里应用了连续方程在物面上给出的$\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_o=0$ 的条件。利用式(9.1.3)，式(9.1.2)，物面附近流线方程可写成

$$\left.\begin{aligned}\frac{h_2\partial y}{h_1\partial x}&=\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_o+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)_o z+\cdots}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_o+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_o z+\cdots}\\ \frac{1\partial z}{h_1\partial x}&=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)_o z+\cdots}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_o+\cdots}\end{aligned}\right\}\tag{9.1.4}$$

当 $z\to 0$ 时，式(9.1.4)给出

$$\left.\begin{aligned}\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial y}{\partial x}&=\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_o}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_o}\\ \frac{1}{h_1}\frac{\partial z}{\partial x}&=0\end{aligned}\right\}\tag{9.1.5}$$

即在这种极限情况下,流线的方程可用式(9.1.5)表示。因它在表面上$\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial z}{\partial x}=0\right)$,故称式(9.1.5)第一式为表面流线,也称为极限流线。在式(9.1.5)中,$\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_o$ 和 $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_o$ 都是 x,y 的函数。如果被研究的流动是牛顿流体,它遵循牛顿摩擦定律,在物体表面上将有

$$\tau_{zx} = \left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)_o$$

$$\tau_{zy} = \left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)_o$$

式中 μ 是黏性系数。将此式代入式(9.1.5)第一式可得

$$\frac{h_2\mathrm{d}y}{h_1\mathrm{d}x} = \frac{\tau_{zy}}{\tau_{zx}} \tag{9.1.6}$$

式(9.1.6)是极限流线的另一种表达式。因为它用摩擦力表述,故极限流线在这种情况下也称为摩擦力线。

所谓表面流,就是表面极限流线所表述的流动。一个常微分方程所描述的积分曲线,其定性结构与常微分方程的临界点密切相关。当在平面 x,y 上,常微分方程的临界点都可以找出,并且其临界点的性质都可确定时,常微分方程所定义的积分曲线的结构就可定性给出。所以研究表面流态的拓扑,很重要一个方面就是研究极限流线方程临界点的分布及临界点的性态。此外,流动的分离、附着也在表面流态上有不同的性态,搞清它们,对研究流动的分离、附着有重要意义。下面,为了说明表面流的拓扑结构,将讨论其临界点和分离线、附着线的性状。

9.1.2 极限流线方程的临界点

所谓极限流线方程的临界点,就是指物面上由以下方程

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_o &= 0\\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_o &= 0\end{aligned}\right\} \tag{9.1.7}$$

确定的点。在以后的分析中，临界点也叫奇点，并且为了简单，常常略去方程式(9.1.5)、式(9.1.7)中的下标“o”。

设(x_s, y_s)是极限流线方程的奇点，可以证明，以下结论成立

(1) 若 $J=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)_s \cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}\right)_s-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)_s \cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}\right)_s$，

$q=-\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)_s+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}\right)_s\right]$，这里下标 s 表示在(x_s, y_s)点上取值，则当 $J>0, 4J-q^2>0$ 时，(x_s, y_s)为极限流线方程的螺旋点，并且 $q>0$ 时为稳定的，此时极限流线由外部指向奇点；$q<0$ 时为不稳定的，此时极限流线由奇点走向外部。根据连续性方程，$q=h_1 h_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)_o$，因此在上述情况下，$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)_s>0$ 奇点是稳定的螺旋点，$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)_s<0$ 为不稳定的螺旋点。

当 $J>0, 4J-q^2<0$ 时，(x_s, y_s)为极限流线方程的结点，并且 $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)_s>0$ 时为稳定的，$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)_s<0$ 时为不稳定的。

当 $J<0$ 时，奇点(x_s, y_s)为鞍点。

因为一般情况，$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)_s \neq 0$，所以物面上的奇点一般仅有螺旋点，结点和鞍点三种形态。为了以后讨论方便，螺旋点和结点统称为结点，并且用 N 来表示，鞍点用 S 表示。

(2) 若物体表面是单连通的，物面上结点和鞍点的总数遵守以下规律

$$\Sigma N-\Sigma S=2 \tag{9.1.8}$$

式(4.8)是 Lighthill 首先给出的。

9.1.3 分离线的性状

可以证明，以下结论成立。

(1) 若设 y 轴沿着分离线，x 轴在物面上并与分离线垂直，z

轴沿物面外法线方向(图 9-1)。在分离线上,满足以下条件

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)_o = 0 \\ \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)_o < 0 \\ \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)_o > 0 \end{cases} \tag{9.1.9}$$

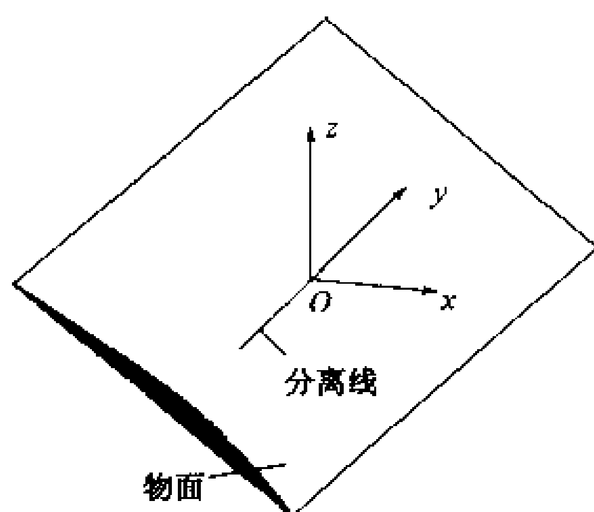


图 9-1　与分离线固结的正交坐标系

(2) 若分离流动用 Navier-Stokes 方程描述,分离线必定是一条极限流线,且周围的极限流线向它收拢渐近。但是反过来说,周围的极限流线向某一极限流线收拢渐近,并不能说该极限流线一定是分离线。因为在研究流动附着时,可以证明,存在一条极限流线,它是周围极限流线的收拢渐近线。

若分离流动用边界层方程的正问题描述,在分离线上可能出现 Goldstein 奇性。此时分离线是周围极限流线的包络。

(3) 若分离线上有很多奇点,其鞍点和结点是交替分布的。

(4) 若分离线由奇点始,该奇点一定是鞍点,若分离线到奇点终点,其终点必定是结点。

(5) 分离线有三种起始形态。第一种为 Lighthill 提出,分离线起始于鞍点,文献中称这种形态为闭式分离;第二种分离线起始于鞍、结点的组合,文献中有时称为螺鞍点,第三种分离线起始于

正常点,这是王国璋首先发现的。

(6) 开式分离是王国璋首先提出的。它包含两种形态,一种是分离线起始于正常点,另一种是分离线起始于螺鞍点极其靠近的情况。

9.1.4 俯仰对称物体有迎角绕流时,物面背风子午线附近表面流的性状

在这种情况下,设 x 轴沿着背风子午线并指向后方,且在头部和尾部其物面附近的流动也指向后方,则背风子午线是一条极限流线,其上要么没有奇点,要么有偶数个奇点。当没有奇点时,背风区若出现分离,那一定是开式的,当存在偶数个奇点且位于表面流线向外扩张的区域内时,沿背风面对称子午线,鞍点、结点是交替分布的,且最前面的一个奇点一定是鞍点,这时背风区是闭式分离。

9.1.5 附着线的性状

可以证明,存在两种附着线,一种是 Legendre 首先提出的分离流面的附着,另一种是附着线。对于第一种附着线,在其上任一点 o,以下条件成立

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_o = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)_o > 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)_o < 0 \tag{9.1.10}$$

由该条件进一步可以证明,这种附着线是一条极限流线,周围的极限流线由它向外发散。

对于第二种附着相关的线,其上任一点 o,以下条件成立

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_o = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)_o < 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)_o < 0 \qquad (9.1.11)$$

由此条件可以得到，第二种与附着相关的线也是一条极限流线，但周围的极限流线是以它为收拢渐近线。

这种情况表明，第二种附着线的表面流态和分离线是相同的。这也就是上面所说的不能单单根据极限流线的收拢来判定分离。

9.2 二维绕流时流动的拓扑

对于二维绕流，用流线来表征流动的结构与形态。如流动定常，流线不随时间改变，如流动非定常，我们研究的流线形态将是对瞬时而言的。

在二维绕流情况下，流线描述的流动结构，遵守以下拓扑规则。

（1）规则 1

对于定常或非定常不可压缩流动，流场内部（不包含物面边界）流线方程的奇点（临界点）仅有两种：鞍点和中心点。设奇点为 s，当奇点处

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_s^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_s\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_s > 0 \text{ 时，奇点为鞍点；}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_s^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_s\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_s < 0 \text{ 时，奇点为中心点；}$$

这里 x, y 是直角坐标系，u, v 为 x, y 方向的速度分量。

若流动是可压缩的定常流动，上述结论仍成立。若流动是非定常的，当 $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ 时，流场内部的奇点有三种：鞍点、螺旋点和结点。当奇点 s 处

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_s\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_s - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_s\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_s > 0$$

$$且\ \Omega_s^2 > \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)_s^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)_s^2$$

时为螺旋点；

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_s\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_s - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_s\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_s > 0$$

$$且\ \Omega_s^2 < \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)_s^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)_s^2$$

时为结点。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_s\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_s - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_s\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_s < 0\ 时为鞍点。$$

这里 $\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$表示旋涡强度。由此可以看出，在螺旋点，旋涡强度一定大于零。

（2）规则 2

如果设 x，z 为物面边界层正交坐标系，其中 x 沿着物面，z 轴垂直于物面而向外，u，w 是沿 x，z 轴的速度分量，对于物面静止的定常黏性绕流，物面是 $z \to 0$ 的极限流线，物面上流线方程的奇点全为鞍点，并且在鞍点处$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_s = 0$。由于物面上的奇点，仅一半在流场内，故称为半奇点(此处为半鞍点)。进一步可以证明，当半鞍点上满足$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_s = 0$ 和$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)_s < 0$ 时，它是分离点，当半鞍点上满足$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_s = 0$ 和$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)_s > 0$ 时它是再附着点。

（3）规则 3

如果绕流流场是左右对称的，对于不可压缩定常和非定常流动，以及可压缩定常流动，在流场的对称线上若有奇点，它只能是鞍点。

（4）规则 4

对于二维物体绕流，在包含物面边界的流场内(复连域)，其奇点的总数是

$$\Sigma N + \frac{1}{2}\Sigma N' - \Sigma S - \frac{1}{2}\Sigma S' = I(\infty) - I(C) \quad (9.2.1)$$

式中 ΣN 和 ΣS 分别表示流场内结点(螺旋点和结点)和鞍点的总数,$\Sigma N'$ 和 $\Sigma S'$ 表示物面上结点和鞍点的总数。$I(\infty)$ 表示"∞"处的 Poincare 指数,$I(C)$ 表示沿物面的 Poincare 指数。

对于二维定常物体绕流,物面上没有半结点,因此 $\Sigma N'=0$。如果在∞处,若来流是均匀的,可以证明 $I(\infty)=0$,当物体静止时,$I(C)=1$,这样,式(9.2.1)给出

$$\Sigma N - \Sigma S - \frac{1}{2}\Sigma S' = -1 \quad (9.2.2)$$

式(9.2.2)指出,物面的半鞍点必有偶数个。

9.3 垂直于旋涡轴线的横截面流态的拓扑[3,4]

为了简单,设旋涡的轴线为直线,再设 x, y, z 为直角坐标系,其中 x, y 在垂直于旋涡轴线的横截面上,z 轴和旋涡的轴线一致。可以证明,在这种情况下,于旋涡的横截面上,截面流线 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{v}{u}$ 可进一步写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_o x - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_o + \lambda\right] y + N(x, y, \lambda)}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_o x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_o y + M(x, y, \lambda)} \quad (9.3.1)$$

式中 u, v, w 是 x, y, z 轴上的速度分量。

$$\lambda = \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right)_o$$

是表征旋涡沿其涡轴变化的特征参数。下标"o"表示在涡轴上取值,$N(x, y, \lambda)$ 和 $M(x, y, \lambda)$ 是取决于参数 λ 的 x, y 二阶以上的小量项,它们都是解析函数。

根据含参数常微分方程的定性理论,可以给出如下结论。

(1) 若沿旋涡的轴线,$\lambda>0$,则涡轴附近的截面流线具有稳定的螺旋点形态(图 9-2(*a*)),如果 $\lambda<0$,为不稳定的螺旋点形态(图 9-2(*b*))。

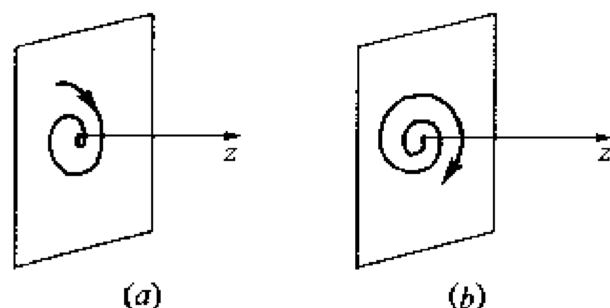


图 9-2 $\lambda>0$ 和 $\lambda<0$ 的截面形态

(*a*) $\lambda>0$; (*b*) $\lambda<0$。

(2) 若沿旋涡轴线,λ 由正变为负,则横截面流态从 $\lambda=0$ 的位置起出现 Hopf 分叉,产生稳定的极限环(图 9-3)。如 λ 由负变为正,则由 $\lambda=0$ 位置起出现 Hopf 分叉,产生不稳定的极限环(图 9-4)。

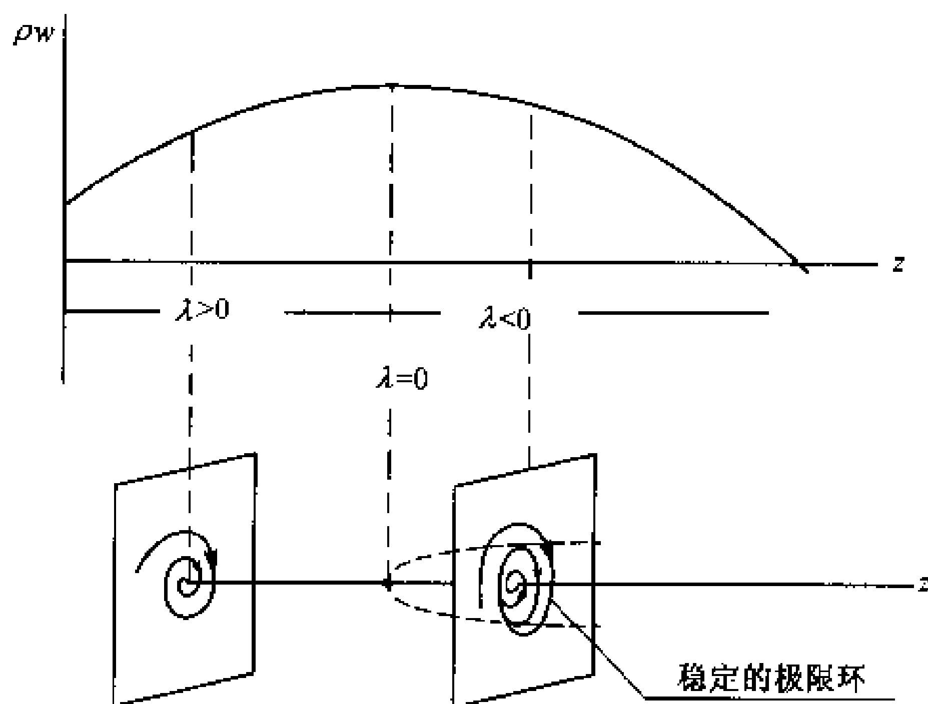


图 9-3 $\lambda>0$ 到 $\lambda<0$ 时旋涡的横截面流态

(3) 如果 λ 沿旋涡轴线有 n 次变号,将出现 n 个极限环,并且稳定的和不稳定的极限环是交替分布的。

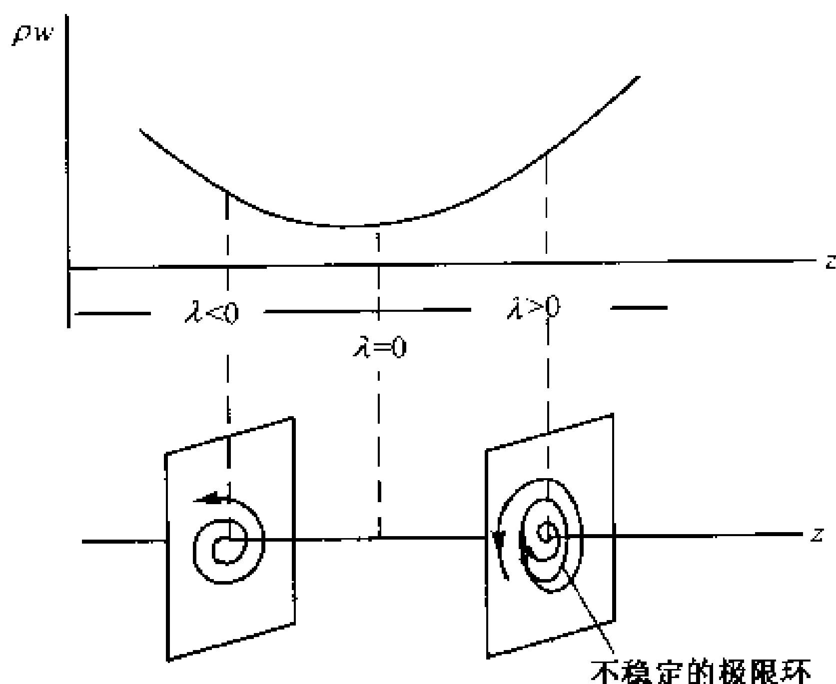


图 9-4　λ<0 到 λ>0 时旋涡的横截面流态

应用 Navier-Stokes 方程，可以得到

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= (1 - Ma_z^2)_o\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_o + \varepsilon_1\left(\frac{1}{Re}\right)\\ \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_o &= -\left(\frac{1}{\rho w}\frac{\partial p}{\partial z}\right)_o + \varepsilon_2\left(\frac{1}{Re}\right)\end{aligned}\right\} \tag{9.3.2}$$

这里 Ma_z 和$\frac{\partial p}{\partial z}$是沿着涡轴的马赫数和压力梯度。$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是取决于 Reynolds 数的函数。当 $Re \gg 1$，即黏性的贡献可以忽略不计时，有

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= (1 - Ma_z^2)_o\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_o\\ \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_o &= -\left(\frac{1}{\rho w}\frac{\partial p}{\partial z}\right)_o\end{aligned}\right\} \tag{9.3.3}$$

式(9.3.3)表明，λ 取决于$(Ma_z)_o$ 和$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_o$。由此可得到如下结论。

(4) 对于轴向速度为亚声速($Ma_z < 1$)的旋涡，当由顺压区进入反压区时，在顺压区，其横截面流态是稳定的螺旋点形态，且沿

轴向，流动是加速的，但是进入反压区，出现稳定的极限环，环内横截面流态是不稳定的螺旋点形态，并且沿涡轴，流动是减速的，环外截面流线是由外部走向极限环（图 9-5）。

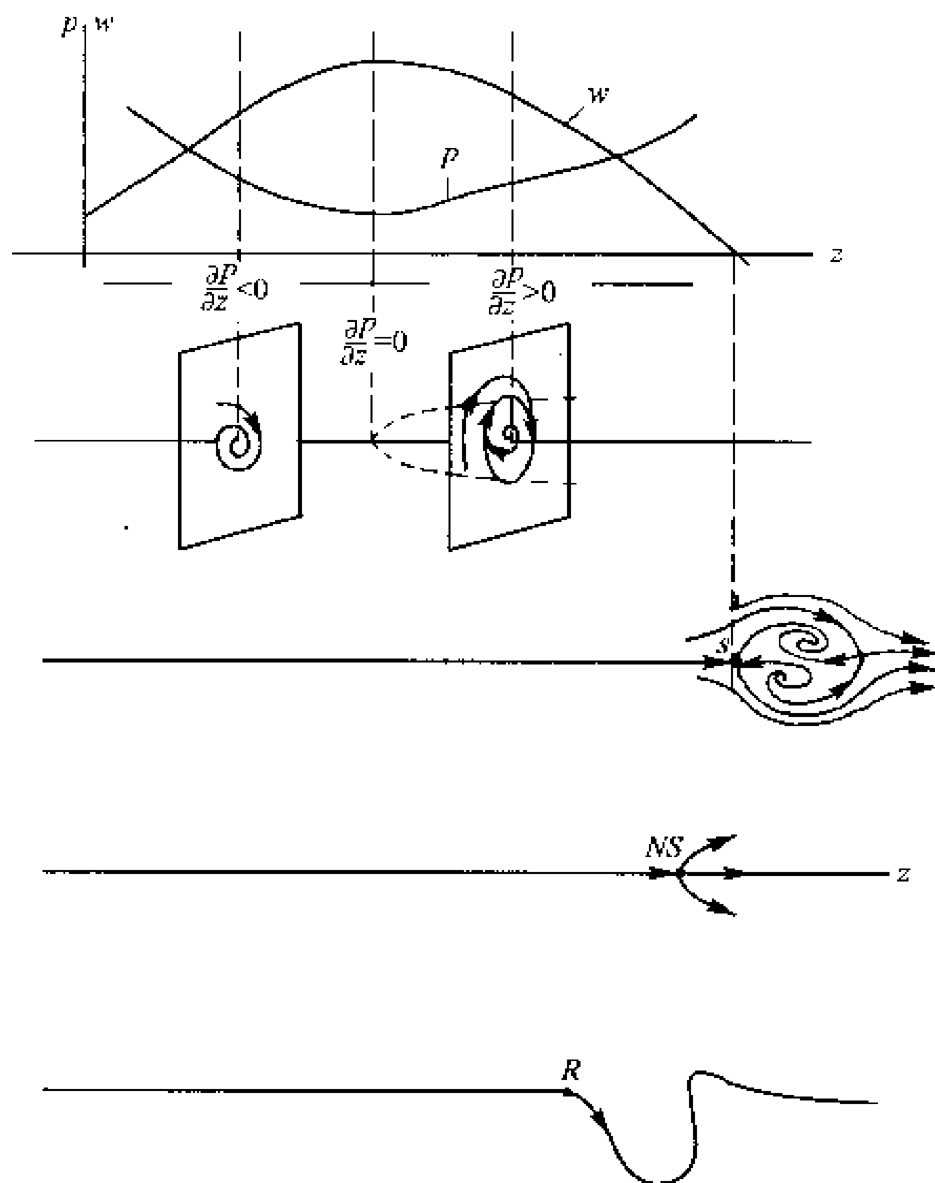


图 9-5　$Ma_z<1$ 的旋涡沿轴向的发展

（5）对于轴向速度为亚声速（$Ma_z<1$）的旋涡，当由顺压区进入反压区时，由于在反压区，涡轴附近的流态是不稳定的螺旋点形态且沿流向是减速的，因此旋涡可能在反压区的涡轴附近破裂。进一步借助于非线性分叉理论可以阐明，旋涡破裂可能有三种基本形态：第一种为泡状破裂，其破裂点为驻点；第二种为螺旋型破

裂，其破裂点为正常点；第三种为鞍、结点组合形式的破裂，其破裂点也是驻点(图 9-5)。

(6) 对于轴向速度为超声速的旋涡($Ma_z>1$)，当由顺压区进入反压区时，在顺压区，沿轴附近的截面流态是不稳定的螺旋点形态，但进入反压区，出现不稳定的极限环，环内截面流态是稳定的螺旋点形态，并且轴向流动减速。环外，截面流线是由极限环走向外部的(图 9-6)。

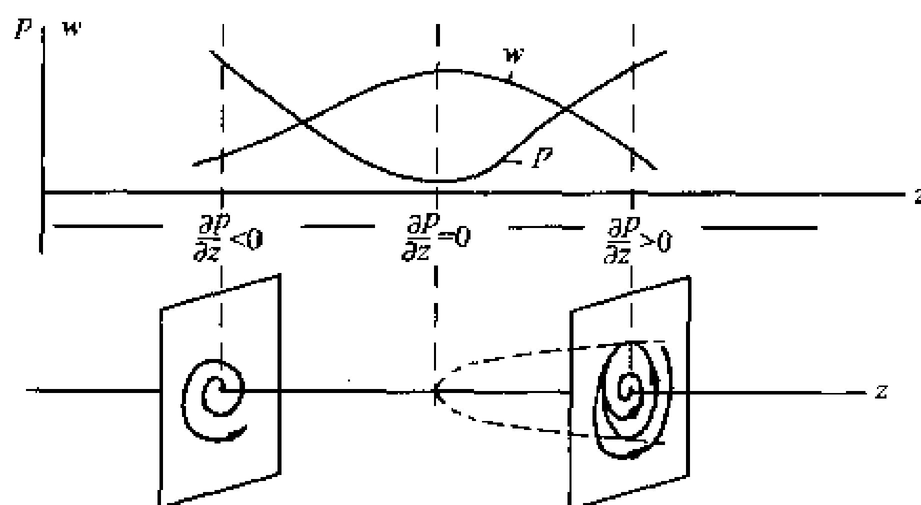


图 9-6　$Ma_z>1$ 的旋涡沿轴向的发展

由于涡破裂发生在截面流态不稳定和同时轴向速度减小的情况，所以轴向速度为超声速的旋涡，一般不易破裂，除非有激波与之相互作用，使它变成轴向速度为亚声速的旋涡。

9.4　垂直于体轴的横截面流态的拓扑[5]

为了简单，这里仅研究具有俯仰对称平面的三维绕流，并且假设被绕物体的物面与体轴处有正的或负的夹角。现在来研究垂直于体轴横截面上截面流线的拓扑结构，主要研究横截面上截面流线方程奇点分布的规律。可以证明，以下结论成立。

(1) 物面与横截面的交线——截面轮廓线，不是一条截面流线。如果轮廓线不穿过物体表面极限流线方程的奇点，则轮廓线

上无横截面流线方程的奇点。如果轮廓线穿过物体表面极限流线方程的奇点，则该点也是截面流线方程的奇点，且两者奇点的性质相同。

(2) 如果在俯仰平面上，物面子午线向外倾斜，当无纵向反流时，则在此情况下的横截面上的迎风对称线上有奇数个奇点，而背风对称线上有偶数个奇点。

如果背风面有纵向反流，则背风对称线上的奇点也变成奇数个。

(3) 如果在俯仰平面上，物面子午线向内倾斜，当无纵向反流时，则在此情况下的横截面上的迎风对称线上有偶数个奇点，而在背风对称线上，有奇数个奇点。

如果背风区有纵向反流，则背风对称线上的奇点数也变为偶数个。

(4) 在整个横截面上，奇点总数可用以下公式计算

$$\Sigma N - \Sigma S + \frac{1}{2}\Sigma N' - \frac{1}{2}\Sigma S' = -I$$

式中 ΣN 和 ΣS 分别表示轮廓线以外结点和鞍点总数，$\Sigma N'$ 和 $\Sigma S'$ 表示轮廓线上结点和鞍点总数，I 表示绕轮廓线的 Poincare 指数。如果物面没有纵向反流区，横截面位于其内，则 $I = 1$。如果存在一个纵向反流区，横截面穿过此区域，则 $I = 0$。因此，Poincare 指数由 1 变为零，是纵向分离起始的标志，如果 Poincare 指数由零变为 1，是纵向分离区结束的标志。

应该指出，以上讨论的横截面流态的拓扑规律，适用于有对称俯仰平面和物面与其体轴倾斜的情况。在实际复杂绕流问题中，物面与体轴的夹角有时为零，这时截面流态的拓扑须作另外的分析。有时人们想研究其它截面上流态的拓扑结构，在这种情况下，其拓扑规律也须另作研究；因为不同截面流态的拓扑结构是不同的。

以上给出了二维流动和三维流动的表面流及横截面流的拓扑规律。这些规律已被不少学者用于分析数值模拟结果和实验结果，由于篇幅限制，这里不引人拓扑规律的应用。

第 10 章 二维、三维流动问题上的应用

10.1 绕二维翼型 NACA0012 的流动

作为第一个例子，我们引用呙超对 NACA0012 翼型绕流的研究[1]。出发方程分别为 Euler 方程和 Navier-Stokes 方程。对于 Euler 方程，壁面采用法向速度为零的条件，对于 Navier-Stokes 方程，壁面采用无滑移和绝热条件。来流条件为：$Ma_\infty = 0.8$，$\alpha = 1.25°$，对于黏性流动，Reynolds 数为 10^5。计算域在黏性和无黏性情况，其纵向和横向各取 10 倍的弦长。计算网格的情况是：在无黏性情况下，采用矩形网格。对于黏性绕流，采用三层网格，壁面附近为贴体结构网格，最外为矩形网格，中间为三角形网格。两种情况，其矩形网格都占领了绝大部分计算域。计算中网格的外边界，采用根据特征信号传播规律而建立的特征边界条件。在无黏性情况下，壁面边界条件也是通过特征边界条件来实现物理边界条件的。在黏性情况下，除了物理边界条件外，还补充了数值边界条件，即壁面法向压力梯度为零。可以证明，在 Re 数很大的情况下，这个条件可由法向动量方程给出。计算中为了良好地捕捉激波，采用了网格自适应技术。具体求解时，出发方程中的空间对流项采用二阶 NND 有限体积格式，黏性项采用中心格式，时间项采用四阶精度的 Runge-Kutta 格式。在获得最后收敛解时，无黏性流的网格单元数约为 30000 个，而黏性流情况约为 80000 个。图 10-1 是计算得到的 Euler 方程的等 Mach 数线分布。计算时，先由粗网格开始，然后逐步加密和采用自适应技术，最后达到所要求的

细网格的解，为了说明计算过程，图 10-1 左方给出了网格的加密和自适应过程，右边是相应的等 Mach 线分布。可以看出最后获得的激波，其厚度是相当薄的。在无黏性情况下，最后获得的是稳定收敛解。但是在黏性情况下，所获得的解和无黏性情况很不相同：① 上表面的激波前移了，并且上、下表面的激波都有微小的弦向振荡；②翼的尾部出现周期性脱落，图 10-2 给出了一个尾迹脱落周期内等 Mach 数线的演化情况。

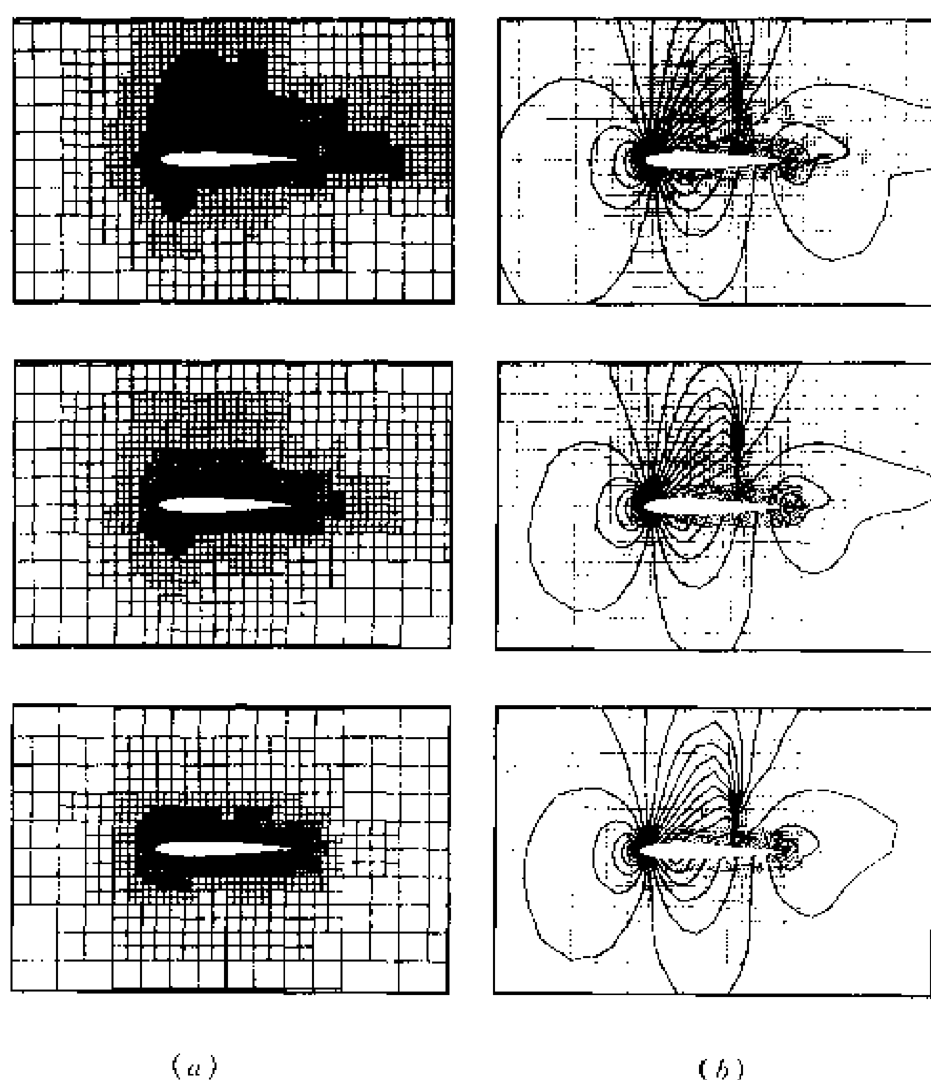


图 10-1　NACA0012 翼型的无黏绕流

($Ma_\infty=0.8, \alpha=1.25°$)

(a) 网格自适应过程，(b) 等马赫线。

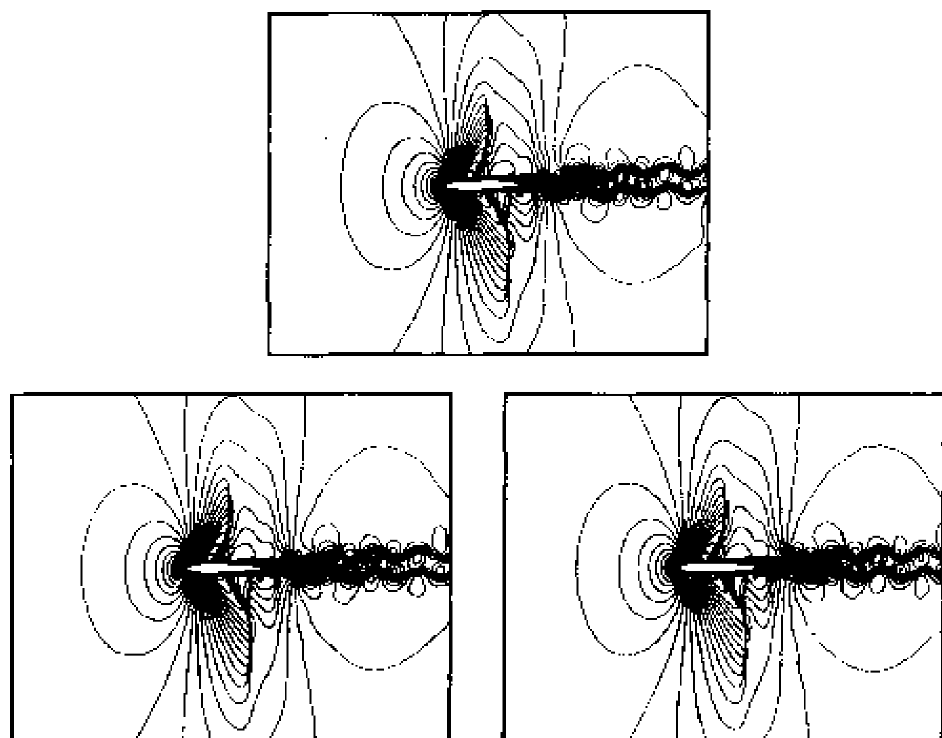


图 10-2 求解 Navier-Stokes 方程给出的 NACA0012 翼型绕流的等马赫线分布($Ma_\infty=0.8$, $\alpha=1.25°$, $Re_\infty=10^5$)

10.2 二维管道内激波的绕射和反射

作为第二个例子,图 10-3 给出了二维管道的外形和计算网格的分布[2],初始时,气体在管道内静止,在管道进口,有一与管道轴线垂直的激波进入,其激波运动的 Mach 数 $Ma_S=2$。出发方程为 Euler 方程。网格的情况是:在细管径区均匀分布的网格为 100 × 100(纵向 × 横向);在粗管区,均匀分布的网格为 900 × 200(纵向 × 横向)。计算时壁面采用法向速度为零的条件。并分别采用了三种计算格式:二阶 NND 格式、五阶 ENN 紧致格式和激波附近为 NND 格式、激波外为五阶 ENN 的混合格式。图 10-4、10-5、10-6给出了 $t=3.0, 4.0, 4.5$ 流场等密度线分布。三种格式的计算结果均能正确地表达流场的主要结构,但是细微比较表明,五阶 ENN 格式能反映出更多的流动细节,但靠近激波的区域有微小的

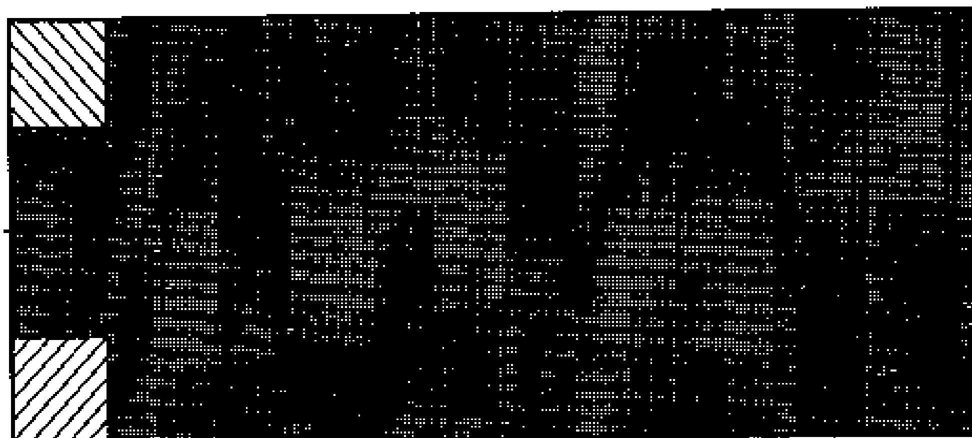


图 10-3 突然扩张圆管及其计算网格

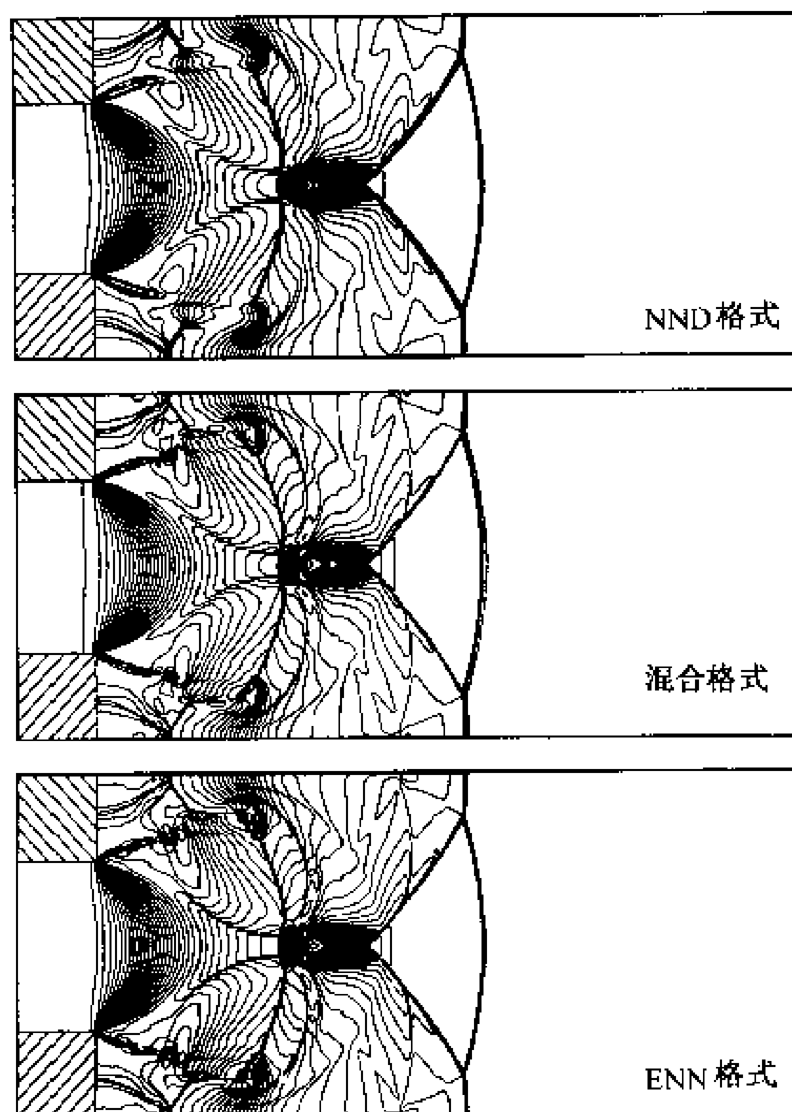


图 10-4 求解 Euler 方程给出的等密度线分布
($Ma_S = 2, t = 3.0$)

波动，二阶 NND 格式所获得的结果比较光滑，但对个别区域细节的刻画没有五阶格式好，混合格式的结果既能反映流场的细节，也能消除非物理的波动。

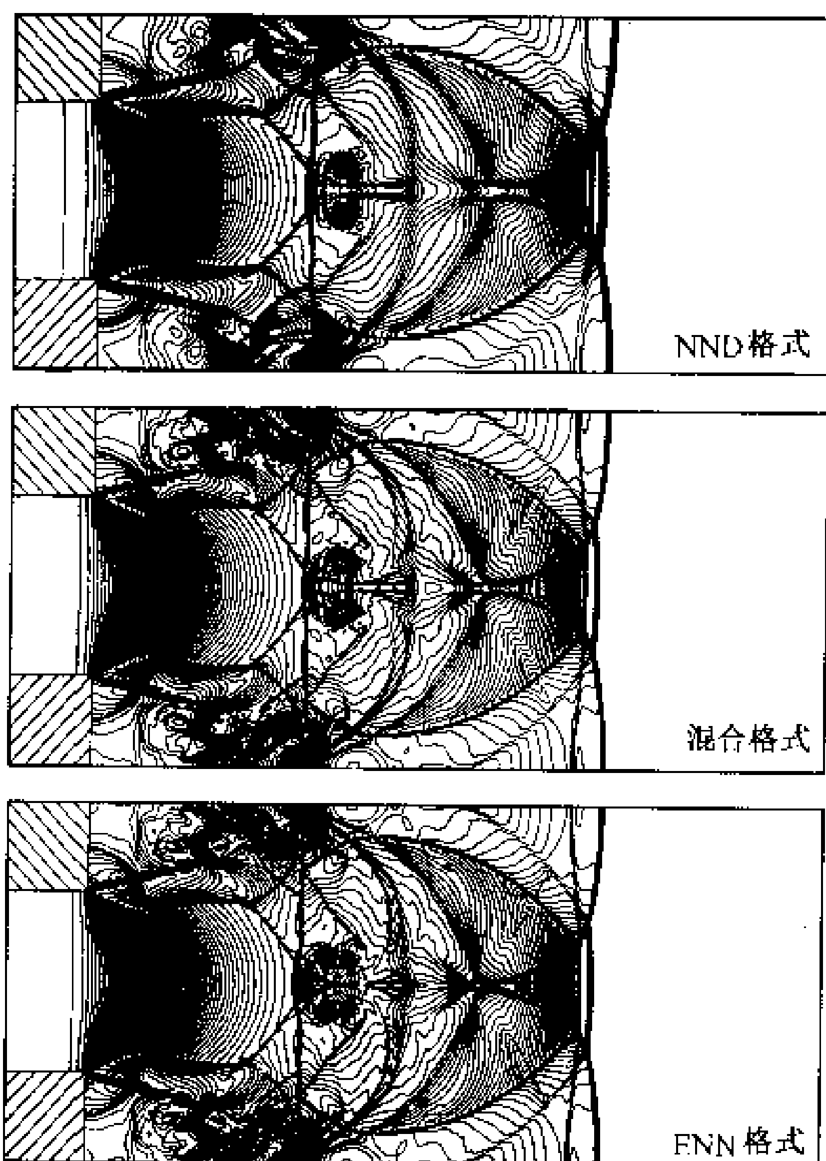


图 10-5 求解 Euler 方程给出的等密度线分布

($Ma_S=2, t=4.0$)

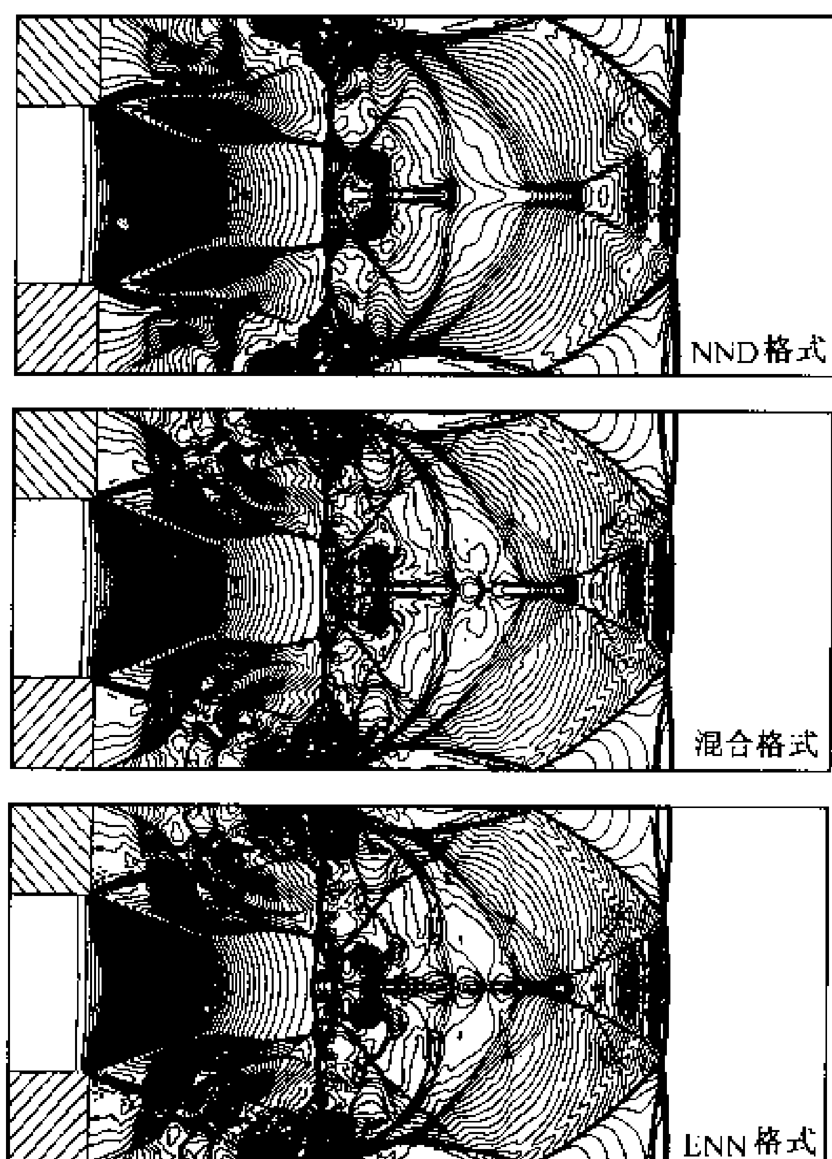


图 10-6　求解 Euler 方程给出的等密度线

（$Ma_S=2, t=4.5$）

10.3 超声速黏性气流在扩张圆形管道内的流动

图 10-7 为扩张管道的外形，进口半径为 R，管长为 $4R$，出口半径为 $2R$，进口来流条件如下：$T_\infty = 2\ 000\text{K}$，$P_\infty = 10^5\text{Pa}$，半径小于 $0.5R$ 的范围内介质为氧气(O_2)，其余区域介质为氢气(H_2)。

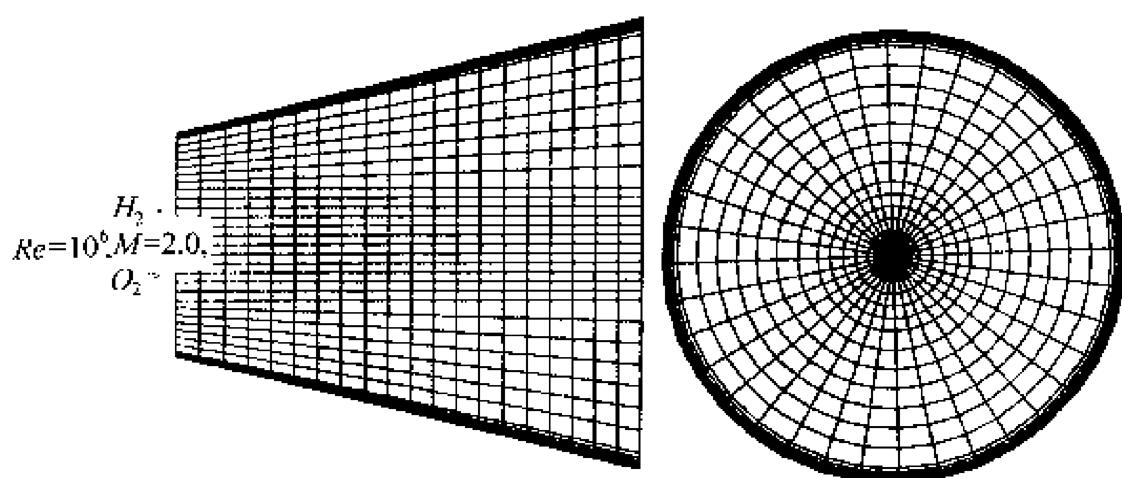


图 10-7 扩张管道的外形和网格，$(Re)_{t=0} = 4.25\times10^4$

进口条件：
$$r\leqslant 0.5,\ u_z = e^{-r^2},\ u_\theta = \frac{4}{r}(1-e^{r^2}),\ T = 2000\text{K};$$
$$r > 0.5,\ u_z = e^{-r^2},\ u_\theta = 0,\ T = 2000\text{K}。$$

进口速度剖面按具有轴向流动的 Burgers 旋涡的速度分布给出，其中螺旋数在本文中取为 4，而且氧气介质旋转，氢气介质不转，进口处轴上的 Mach 数为 2。其进口处气流在轴上的 Regnolds 数为 $Re_R = 4.25\times10^4$(以氧介质物理量为特征量)。计算时，其出发方程为考虑非平衡化学反应的、包含 6 组元和 8 反应的完全 Navier-Stokes 方程。6 组元是：H,O,H_2,O_2,OH 和 H_2O,8 个反应是


$$H + O_2 \Leftrightarrow OH + O$$

$$O + H_2 \Leftrightarrow OH + H$$

$$H_2 + OH \Leftrightarrow H + H_2O$$

$$2OH \Leftrightarrow O + H_2O$$

$$H_2 + X \Leftrightarrow 2H + X$$



$$H_2O + X \Leftrightarrow OH + H + X$$



$$OH + X \Leftrightarrow O + H + X$$



$$O_2 + X \Leftrightarrow 2O + X$$

这里 X 为催化组元，例如它可以是 O_2。这里为了简单不列出组元方程和 Navier-Stokes 方程，有需要者可参考陈坚强的论文[3]。求解时使用三阶 ENN 格式，为了减少计算工作量采用了隐式杂交通量法。在处理化学生成的源项时，采用了点隐式处理方法。壁面采用无滑移和绝热边界条件，同时采用了法向压力梯度为零的数学条件，出口由于气流是超声速的，采用线性外推条件。

图 10-8 是计算给出的沿管轴的 Ma 数分布和压力分布，图 10-9是 $Z/R=1.2,2.0$ 和 2.4 三个垂直于管轴的横截面上的流线分布，这里 Z 是由进口截面算起的沿管轴的坐标。图 10-8 表明，

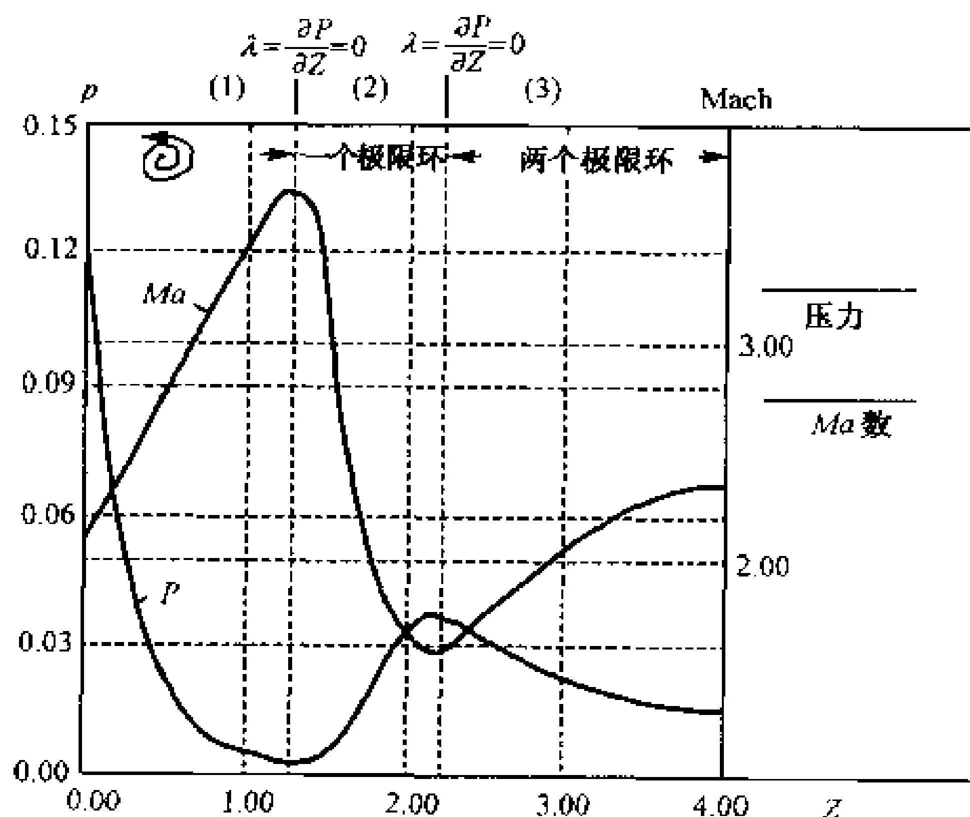


图 10-8 沿管轴的压力和 Mach 数分布

沿管轴，流动 Ma 数 $Ma_Z>1$，即流动是超声速的，但压力分布图指出，沿管轴气流先经历顺压区，中间是反压区，再后是顺压区。上

面指出的三个横截面分别安放在起始顺压区、中间反压区和后面第二顺压区。根据第 9 章的定性分析理论可以预测：第一顺压区的横截面上（$Z/R=1.2$）横截面流线是由中心转向外部的；在中间反压区的横截面上（$Z/R=2.0$），一定存在一个不稳定的极限环，环内截面流线由极限环转向中心，环外截面流线由极限环转向外部；在第二顺压区（$Z/R=2.4$），一定存在两个极限环，外边一个是不稳定的，里边一个是稳定的。这种预测和计算结果给出的图 10-9 完全一致。

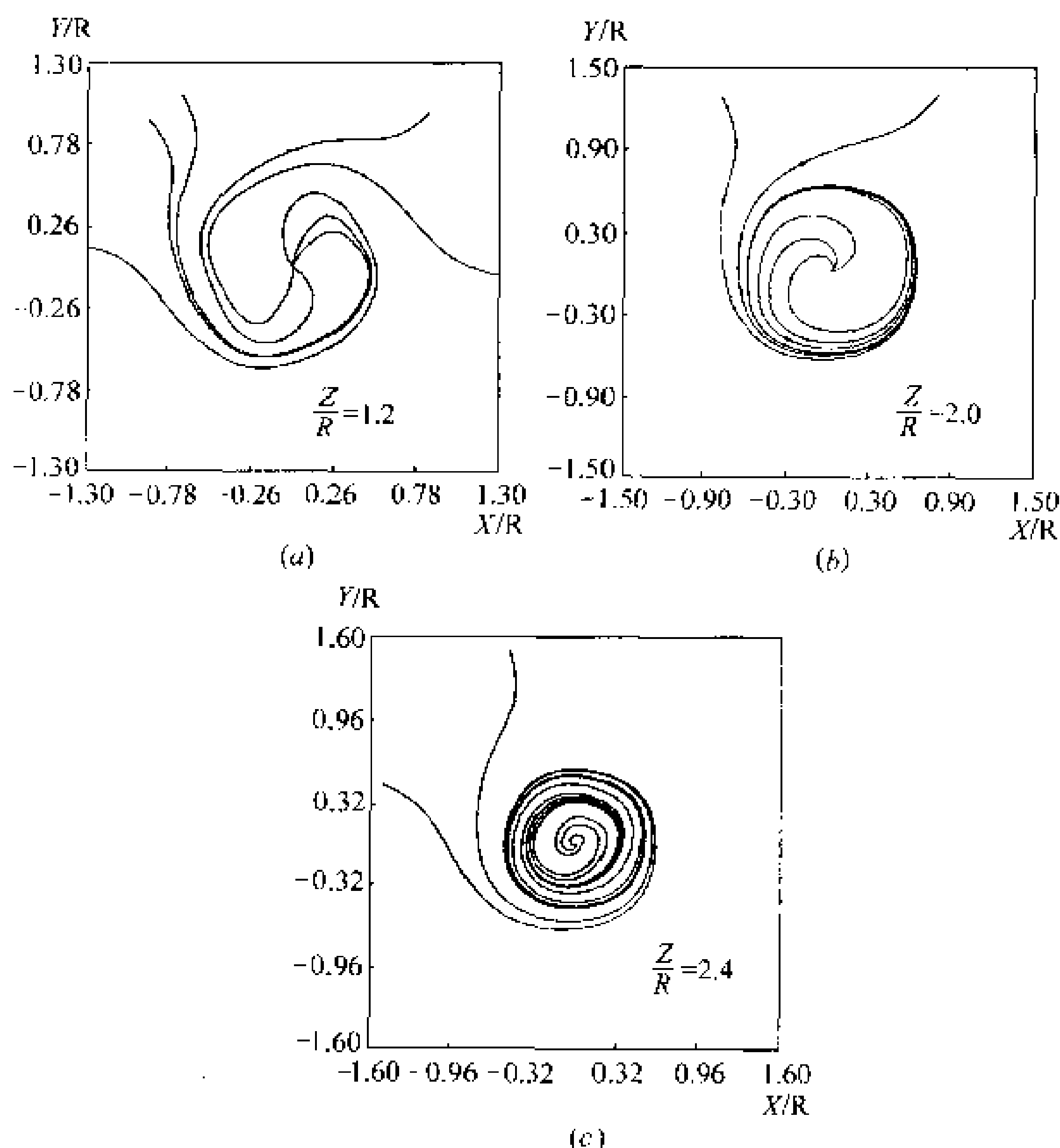


图 10-9　管道横截面上的流态

10.4 三角翼有迎角绕流

张树海、庞勇等人[4,5]曾研究了这个问题,其三角翼的几何参数是:后掠角为63°,边缘切角 $\beta=10°$,弦长 $c=100\text{mm}$,厚度 $h=2.3\text{mm}$(见图10-10)。来流 $Ma_{\infty}=0.8$,迎角 $\alpha=21.8°$,$Re=1.0\times10^{6}$。计算域的边界是:上游边界取在离翼尖0.5倍的弦长处,下游边界离尾缘的边界为5倍弦长位置,侧边界到物面的法向距离分别为1.5倍弦长,出发方程为完全气体的Navier-Stokes方程,气体的绝热指数为1.4。壁面满足无滑移、绝热条件以及法向压力梯度为零的数学条件,外边界满足根据特征信号传播规律而建立的条件。为了计算简单,计算仅在以俯仰对称平面为边界的半空间域内进行。采用时间、空间均为二阶精度的混合通量隐式NND格式。计算模拟了涡破裂演化发展的过程以及沿涡轴横截面流态演化的情况。

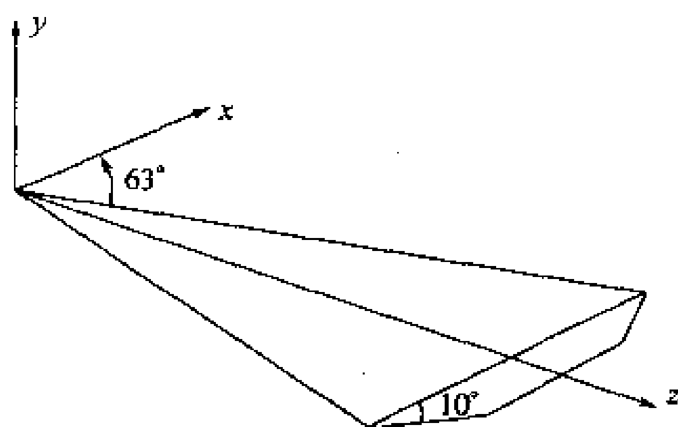


图10-10 三角翼的外形

图10-11是计算采用的网格,图10-12给出了三个无量纲时刻 $T=\dfrac{tV_{\infty}}{C}=1.265$、2.041和6.652涡轴附近流线情况,同时也给出了过涡轴的纵向截面流态图及沿涡轴的速度分布。可以看出,在 $T=1.265$ 时,出现旋涡的泡状破裂;$T=2.041$ 时,为螺旋型破裂;$T=6.652$ 时,又演变为泡状破裂。图10-12清楚表明,螺

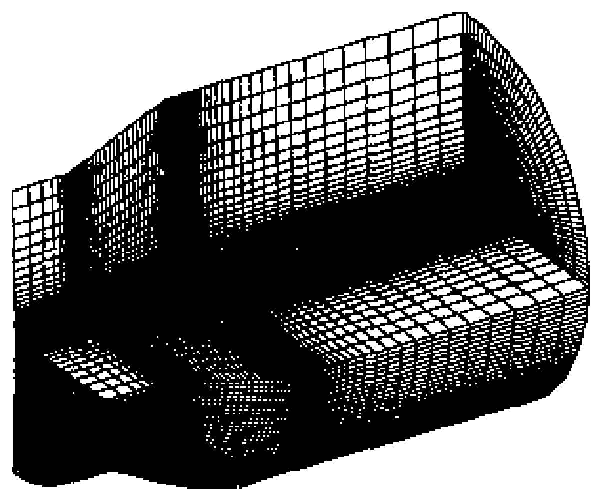
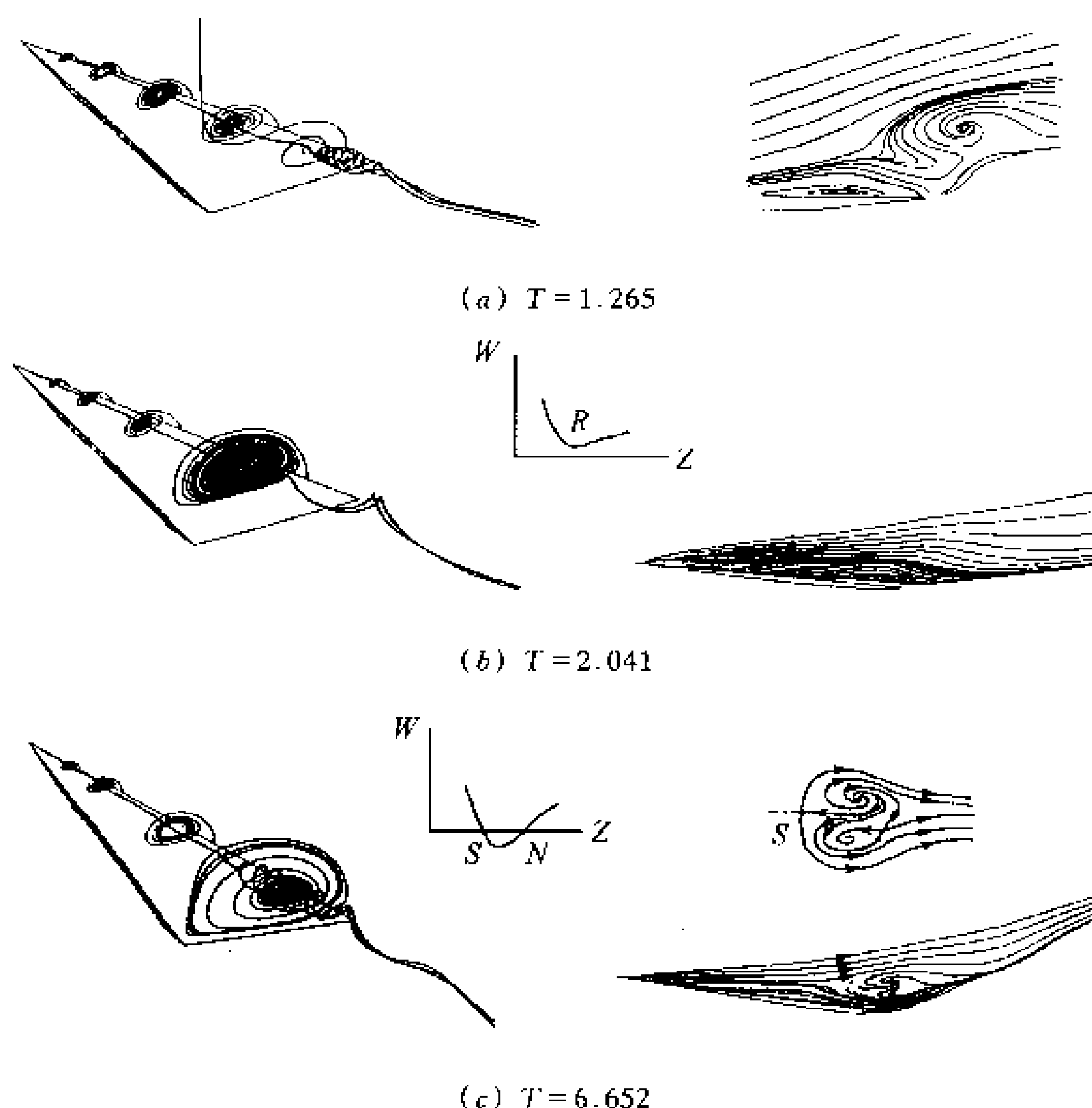


图 10-11　三角翼绕流的网格

旋型破裂，其破裂点为正常点，在破裂点附近，沿涡轴速度大于零($w>0$)。泡状破裂，其破裂点为驻点，$T=6.652$ 的纵向截面流态指出，此时破裂点为鞍点，在此以后，出现倒流，进入鞍点的倒流流线来自破裂点后的螺旋点，如果把过鞍点倒流的流线看成是涡轴的延续线，那么，在泡状破裂点附近，沿涡轴的速度分布将如图 10-12(c)所示。显然 $T=2.041$ 和 $T=6.652$ 代表了两种不同的流态结构。$T=6.652$ 的流态是由 $T=2.041$ 的流态演化而来，如果这种演化是连续变化的，那么两种结构之间，必须存在这样一个极限流态，即 w 的曲线恰好和轴线 z 相切。此时沿涡轴的速度 w，正好在破裂点为零，且 $\frac{\partial w}{\partial z}$ 在这里也为零，这相当于图 10-12(c)中鞍点与螺旋点充分接近的情况，这是流动结构的分叉状态。在数值模拟中，由于选取的时间步长大些，没有正好计算出这种分叉情况。

图 10-13 给出了泡状破裂情况下物理量 ρw 沿涡轴 z 的分布，可以看出沿涡轴存在三个 $\lambda=\left(\frac{\partial \rho w}{\partial z}\right)_0$ 的区域：靠近前缘为 $\lambda>0$ 的区域，接着是 $\lambda<0$ 的区域，再后是 $\lambda>0$ 的区域。根据第 9 章讲述的定性分析理论，可以推知，在第一个 $\lambda>0$ 的区域，在垂直旋涡的横截面上，涡轴附近流线是从外走向内部的，在中间 $\lambda<0$ 的区域，存在一个稳定的极限环，环外截面流线由外部转向极限



(a) $T=1.265$

(b) $T=2.041$

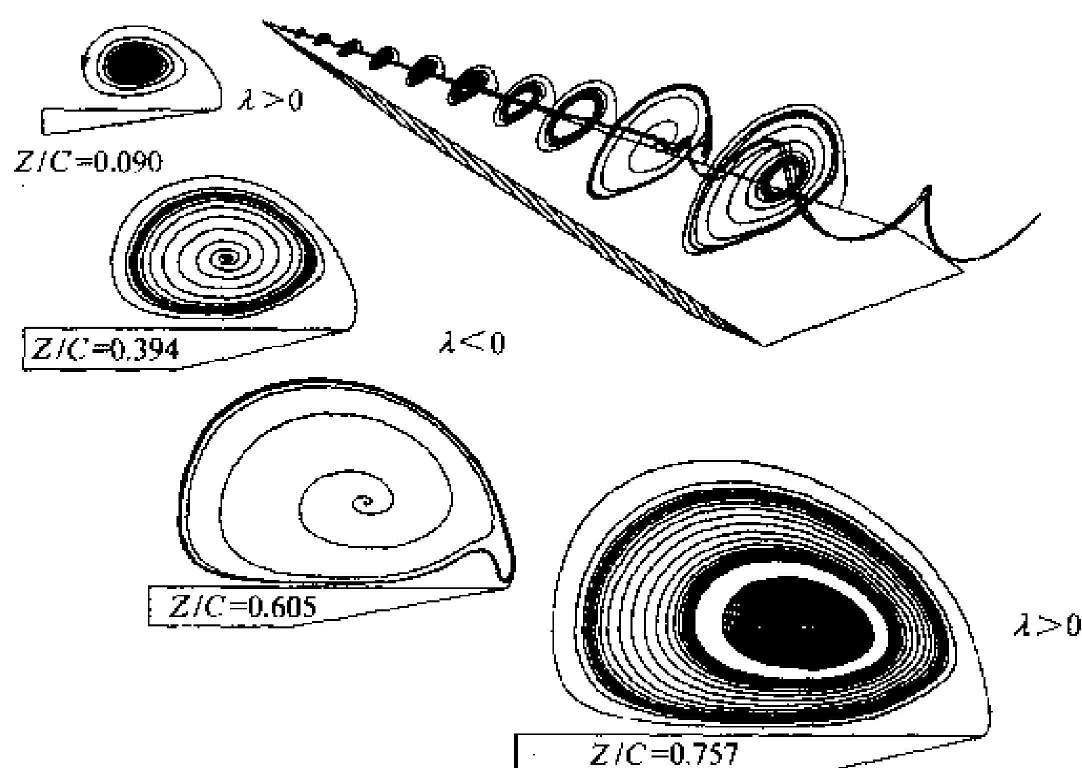
(c) $T=6.652$

图 10-12　三角翼背风区旋涡随时间的演化

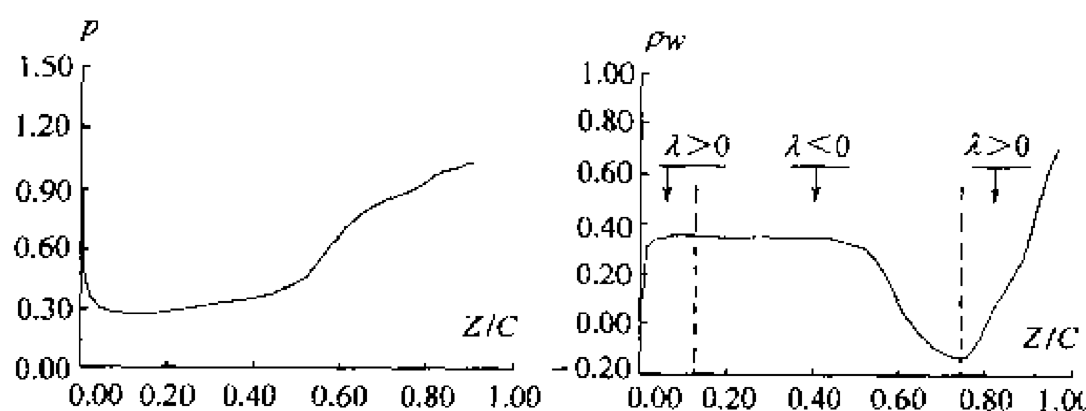
环，环内流线由涡心转向极限环。在后面一个 $\lambda>0$ 的区域，有两个极限环，最外一个为稳定的，最内一个为不稳定的。图 10-13 给出的三个截面，正好分别落在上述三个 λ 的区域，计算结果和理论分析完全一致。

图 10-14 是粒子的痕迹图，即在三角翼顶点的横截面上，人为地均匀布撒很多(有限个)粒子，此后让粒子随流运动，记录这些粒子穿过以后各个横截面上的位置，于是就得到各个横截面上粒子所在位置的痕迹图。在 $\lambda<0$ 的区域，由于流线向外旋转，涡轴附近的粒子是向外散开的，所以在此区域内，沿涡轴向下游发展，涡

心附近的粒子数越来越少，特别是涡破裂后，粒子更向外散开，因此在破裂点附近，形成明显的粒子孔洞，这就是实验发现的"黑洞"现象。



(a) 空间流线和截面流线



(b) 沿涡轴的压力和速度分布

图 10-13　旋涡横截面流态沿其轴向的变化及沿涡轴的压力和速度分布

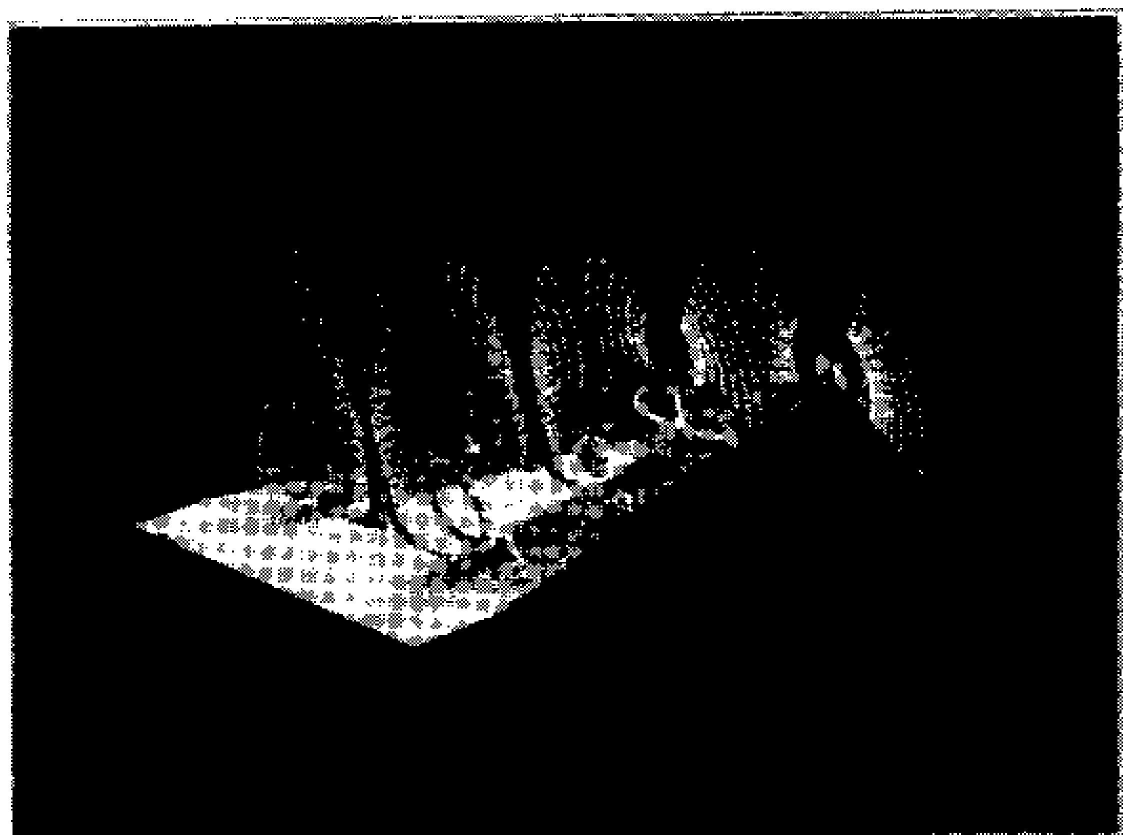
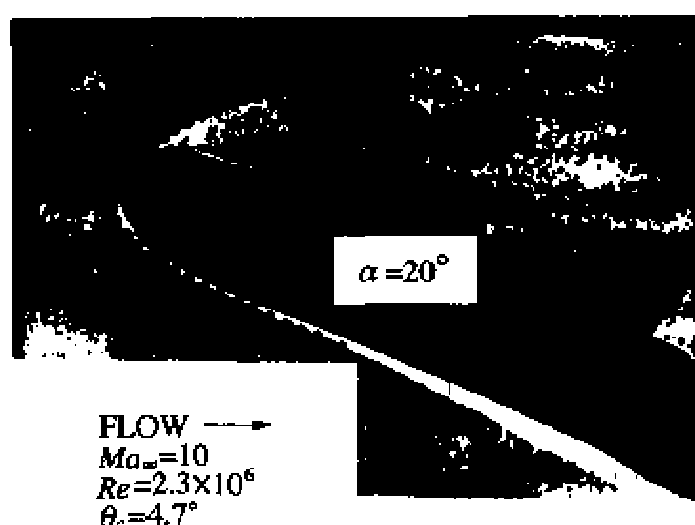


图 10-14 粒子痕迹图

10.5 绕钝锥的高超声速流动

沈清、宗文刚、国义军等人利用 NND 格式通过求解层流运动的 Navier-Stokes 方程数值求解了钝锥高超声速绕流[6,7]，气体是常比热完全气体，$\gamma=1.4$。物面上流动满足无滑移边界条件，壁面温度 T_w 假设已经给定或者假设物面是绝热的。沈清在来流 $Ma_\infty=10$，$Re_\infty=2.3\times10^6$，$T_w=49\text{K}$，半锥角 $\theta_c=4.7°$ 和迎角 $\alpha=20°$ 的情况下，求得了钝锥表面的压力分布、热流分布、流场物理量的分布和激波形状。图 10-15 是计算给出的迎风、背风和子午角 $\varphi=\pi/2$ 等母线上的压力分布，图 10-16 是 $z/L=0.05$、0.11 和 0.445 轴向位置上横截面的压力分布，这里 z 是沿体轴的坐标，L 是钝锥的长度。图 10-17 是 $z/L=0.885$、0.425 和 0.25 位置上的横截面的热流分布，图中 $\varphi=0$ 是迎风母线。为了和实验



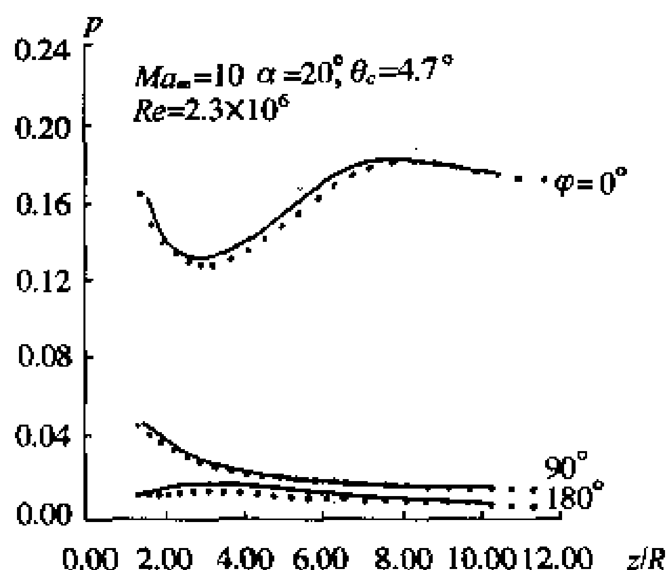


图 10-15 计算给出的钝锥表面上的压力分布及激波形状（R 为头部半径）

结果比较，在图 10-15、10-16 和 10-17 中，相应的实验结果也被画出，可以看出，两者的一致性是相当好的。在此基础上，宗文刚在 $Ma_\infty=10$，$Re_\infty=10^6$ 和 $\alpha=5°$、$10°$、$20°$、$30°$、$40°$、$50°$对 $\theta_c=4.7°$ 的钝锥进行了数值模拟，图 10-18 是计算给出的表面摩擦力线。可以看出，在 $\alpha=5°$时，流动没有出现明显的分离，当迎角增大到 10°、20°和 30°时，流动出现开式分离，但无纵向分离存在。迎角增大到 40°，流动变为闭式分离，即在背风区出现纵向分离，由于背

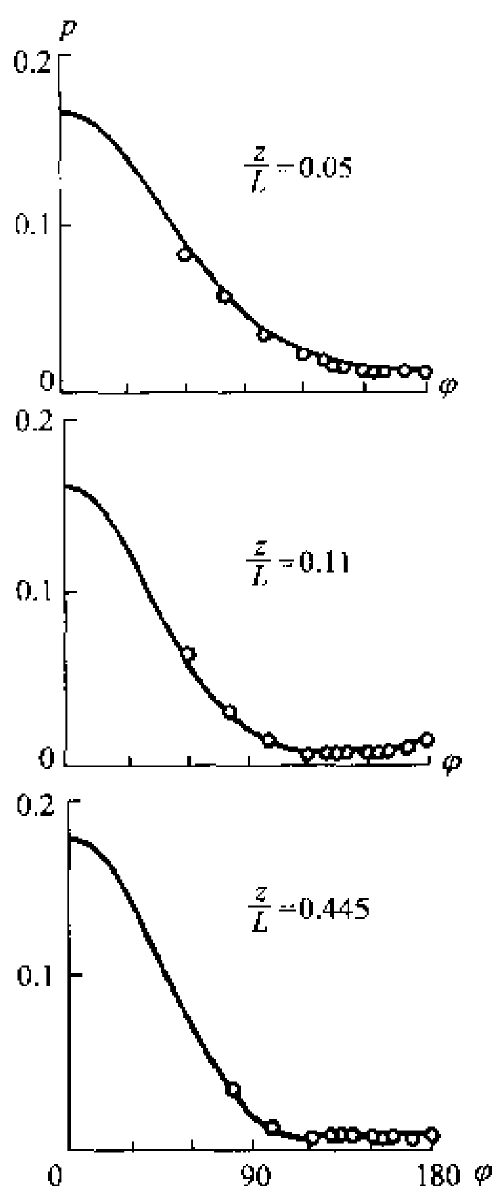


图 10-16 计算给出的钝锥周向压力分布

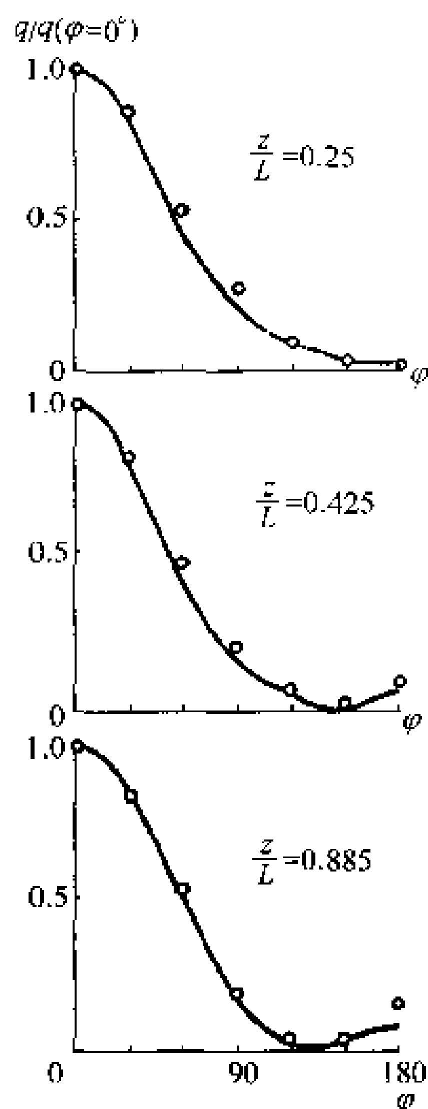


图 10-17 计算给出的钝锥周向热流分布

风纵向分离区前、后，流动均为主流方向，且其横向流由背风对称母线向两方扩张，根据第 9 章的定性分析，将在背风母线上，出现两个摩擦力线的奇点，前方的一个为鞍点，后面的一个为结点，数值结果正是这种情况。如果迎角进一步增大到 50°，则主分离线将变为鞍点、结点组合起始的分离形状，此时，在背风母线两侧的主分离线上，分别出现一个鞍点，由鞍点出发的分离线，一方面向后方延伸，另一方面，向前沿延伸，并在背风母线上以结点的形式

终结。计算结果表明，分离线是一条极限流线，周围的极限流线向它收缩。在分离线上，物面法向速度的二阶导数大于零，分离线上的奇点是交替分布的。分离线有三种起始形态，这些均证明第 9 章的拓扑理论是正确的。

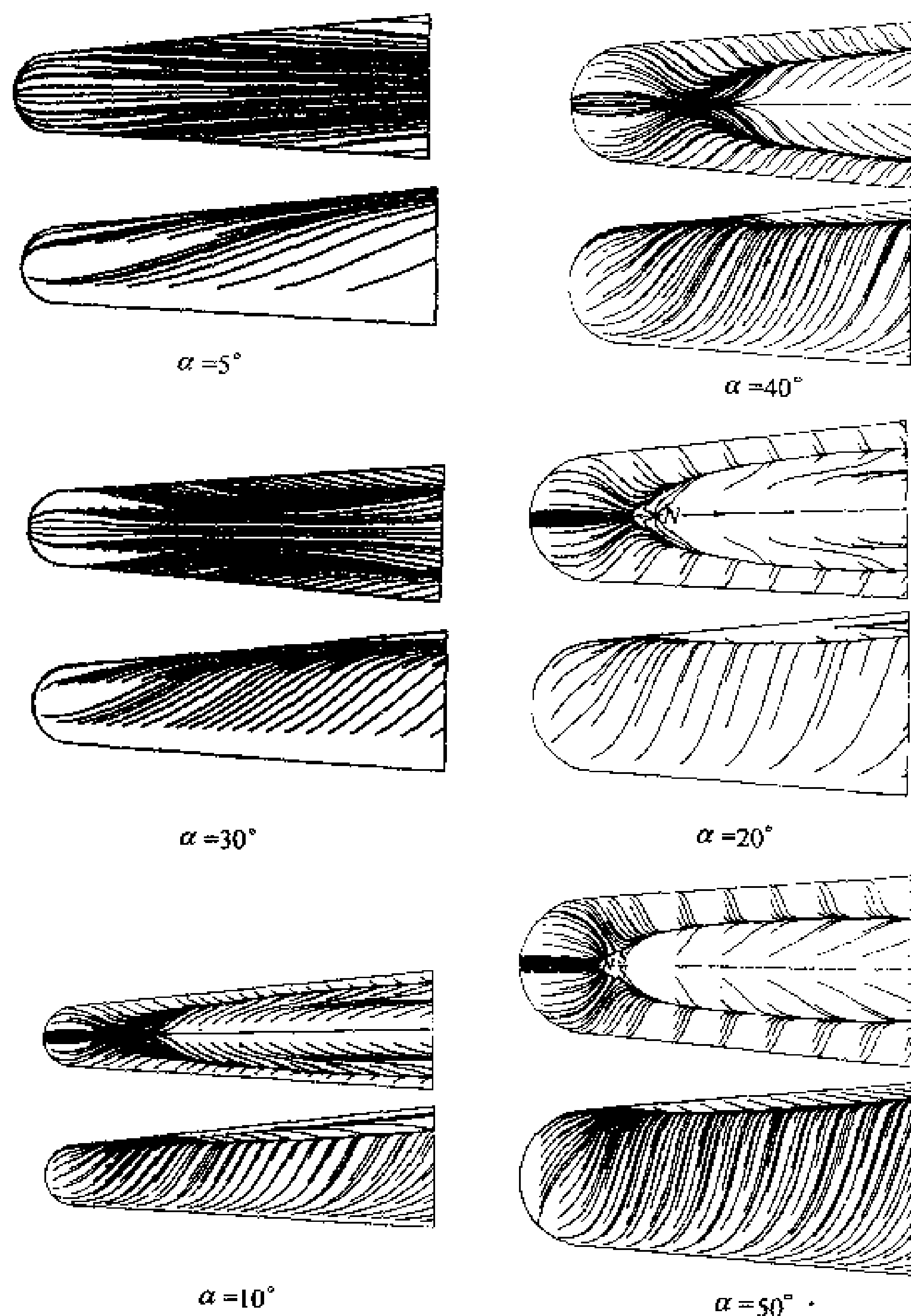


图 10-18 计算得到的钝锥的表面摩擦力线

宗文刚还给出了各种迎角情况下垂直于体轴的各个横截面上的流态。这里为了简单，仅引入 $\alpha = 40^{\circ}$ 的结果。图 10-19(*a*)(*b*)

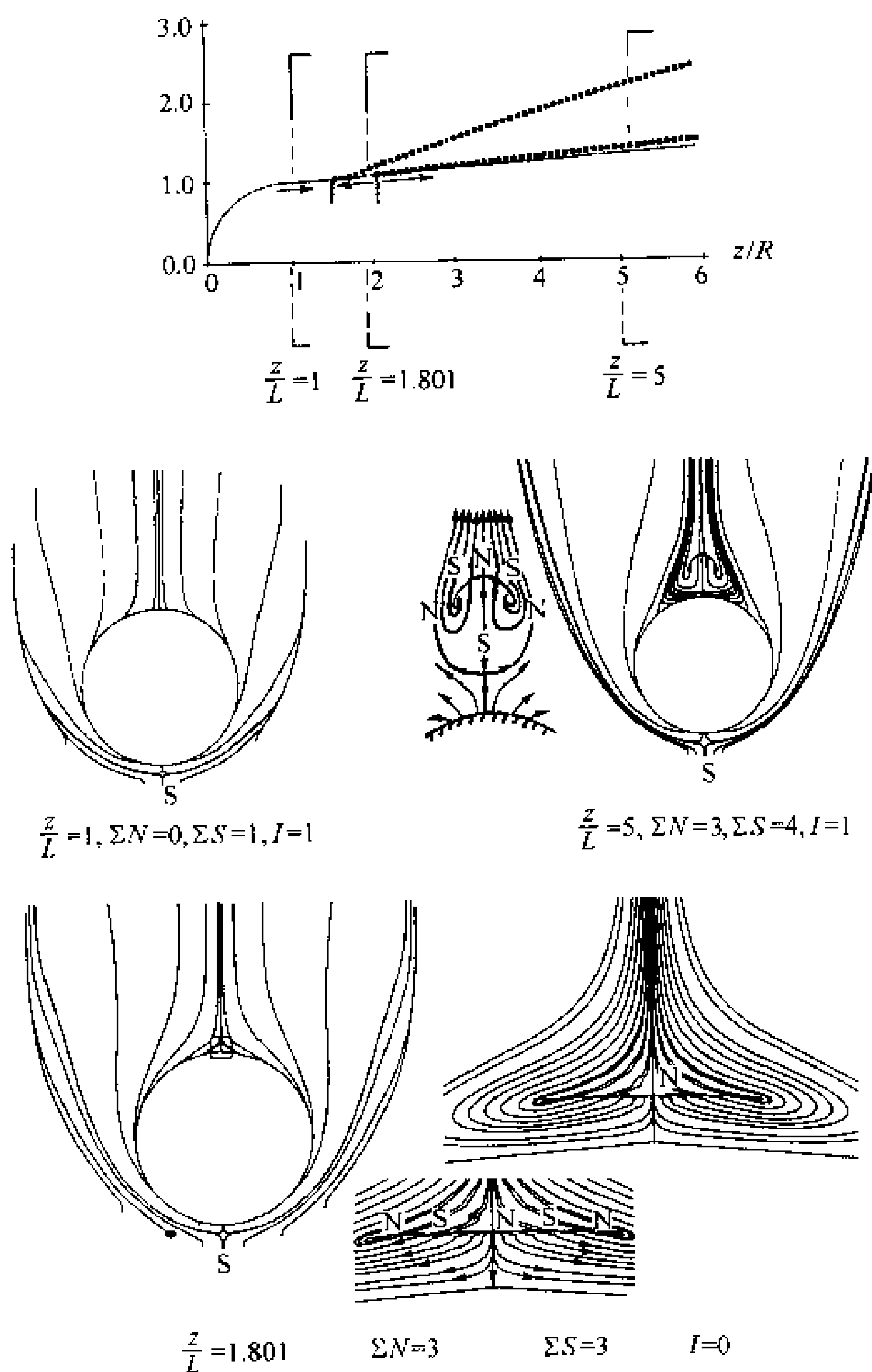


图 10-19 计算给出的钝锥的横截面流态

(c)分别给出了轴向位置 $z/L=1$、1.801 和 5 的横截面流态，其中 $z/L=1$ 位于纵向分离区前的顺流区，$z/L=1.801$ 位于纵向分离区内，$z/L=5$ 位于纵向分离区的顺流区后，图中给出了迎风对称线上，背风对称线上及整个截面上的奇点分布及奇点数。可以看出，它们与第 9 章拓扑分析的结论完全一致。

10.6 飞船有迎角的高超声速绕流

贺国宏利用二阶 NND 格式和三阶 ENN 格式通过求解 Navier-Stokes 方程分别数值模拟了图 10-20 所示飞船的高超声速绕流[8]。计算采用贴体坐标网格，由代数方法生成。流向、周向

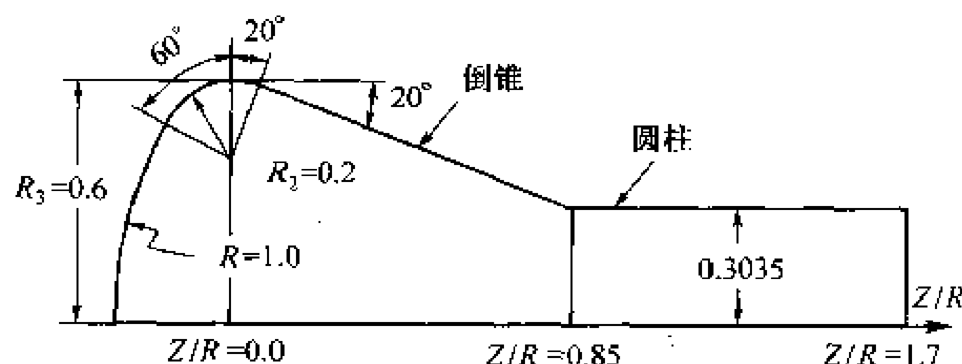


图 10-20 飞船的几何外形

和法向的网格点数分别为 60、38 和 35。物面速度满足无滑移边界条件，壁面温度 $T_w=300\text{K}$，同时采用了法向压力梯度为零的数学条件。来流条件为：$Ma_\infty=7.0$，$Re_\infty=4.5\times10^5$，$T_\infty=67\text{K}$，迎角 α 分别取值为 5°、20°、30°和 40°，图 10-21 是计算采用的网格，图 10-22 是计算给出的压力分布和热流分布，为了比较还列出了 Yamamoto的计算结果，一致性是满意的。图 10-23，图10-24，图 10-25，图 10-26 分别给出了 $\alpha=5°$、20°、30°、40°情况下计算得到的表面流谱，图中标出了摩擦力线的鞍点和结点。从图中可以看到，由于流向分离和横向分离的相互作用，流场在倒锥的背风面上产生了一对螺旋型分离结点，并且随迎角增大，倒锥表面上的分离结点向上游背风区移动。当迎角为 5°时，在圆柱表面上，由于没有

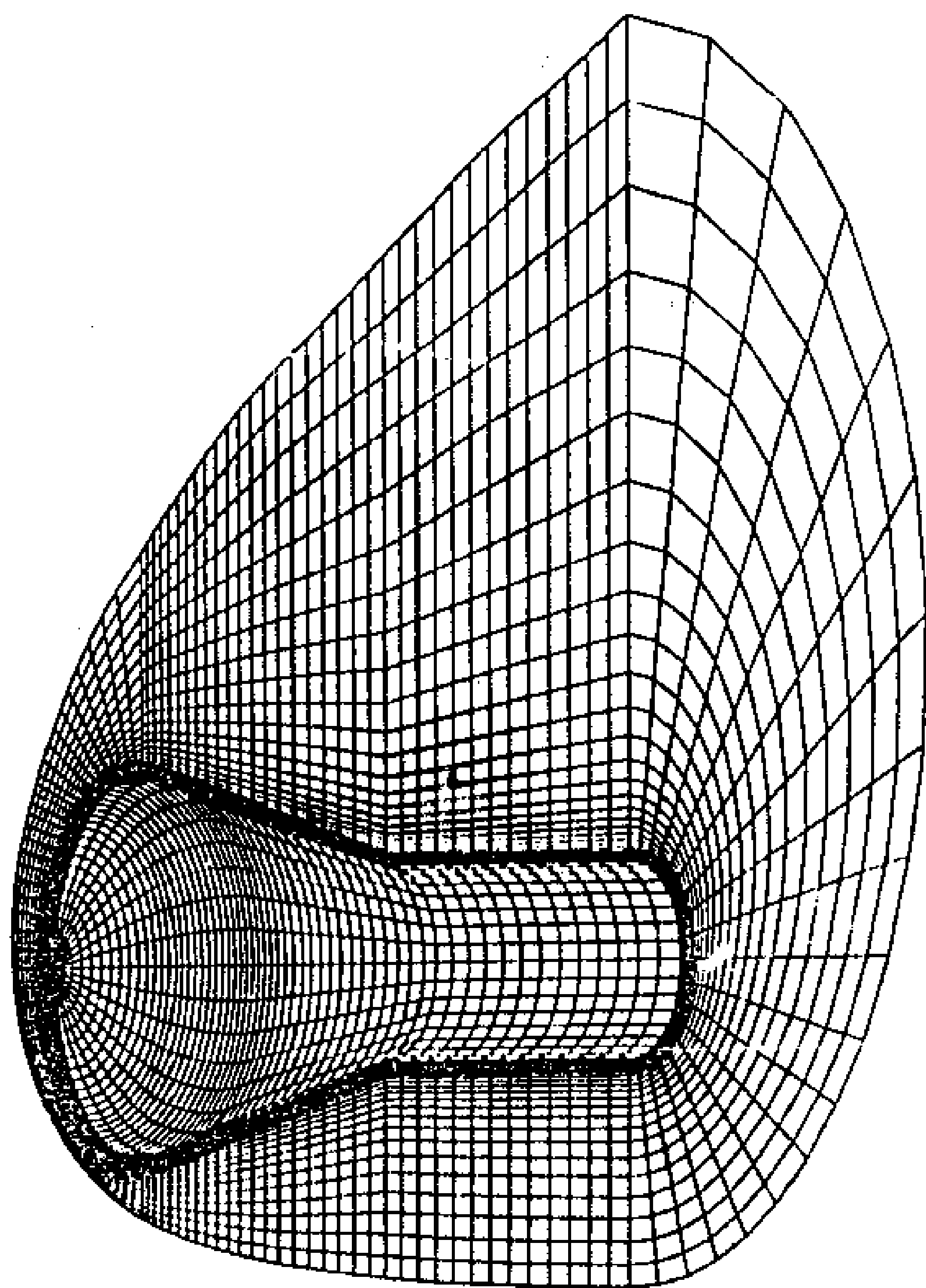
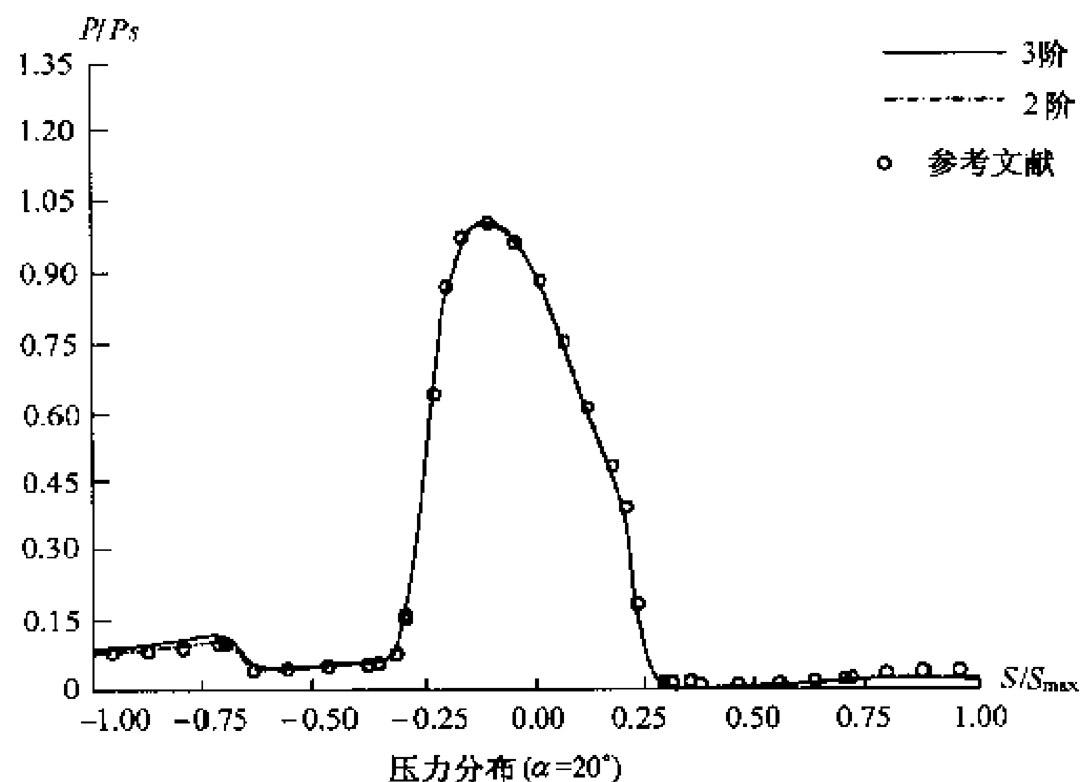
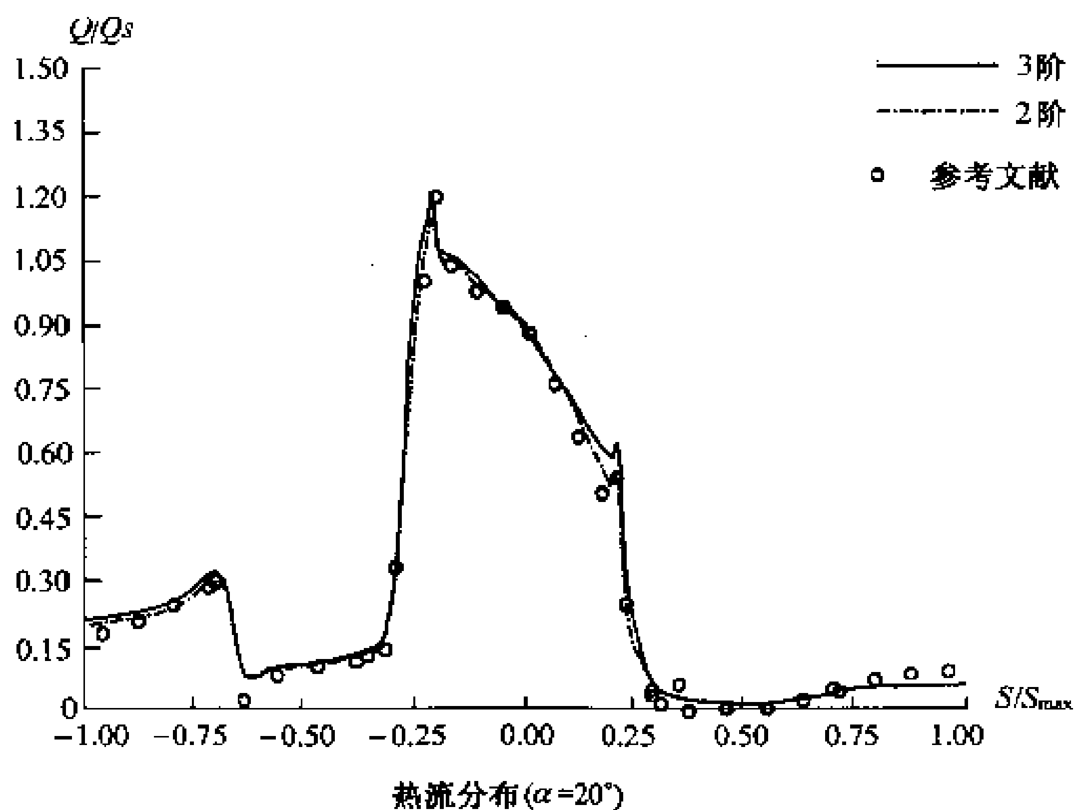


图 10-21　飞船绕流的计算网格



压力分布(α=20°)



热流分布(α=20°)

图 10-22　计算给出的飞船表面的压力和热流分布

横向分离，背风面只有一个再附鞍点。当迎角达到 20°以后，由于横向分离的作用，图 10-23 中的再附鞍点分解为一个结点和两个再附鞍点，此时背风母线上于分离鞍点处，出现一个结点（见图 10-24）。迎角达到 30°后，倒锥表面上产生二次分离，此时表面流的拓扑结构发生了相应的变化。迎角等于 40°时，表面流的结构又有新的变化。随迎角增大，流态越来越复杂。尽管如此，表面流的拓扑还是满足如下规律：分离线若从奇点开始，该奇点一定是鞍点；若分离线到奇点终，该奇点一定是结点；在分离线上，鞍点、结点是交替分布的；在物体表面上，奇点总数满足 $\Sigma N-\Sigma S=2$ 的拓扑规则。

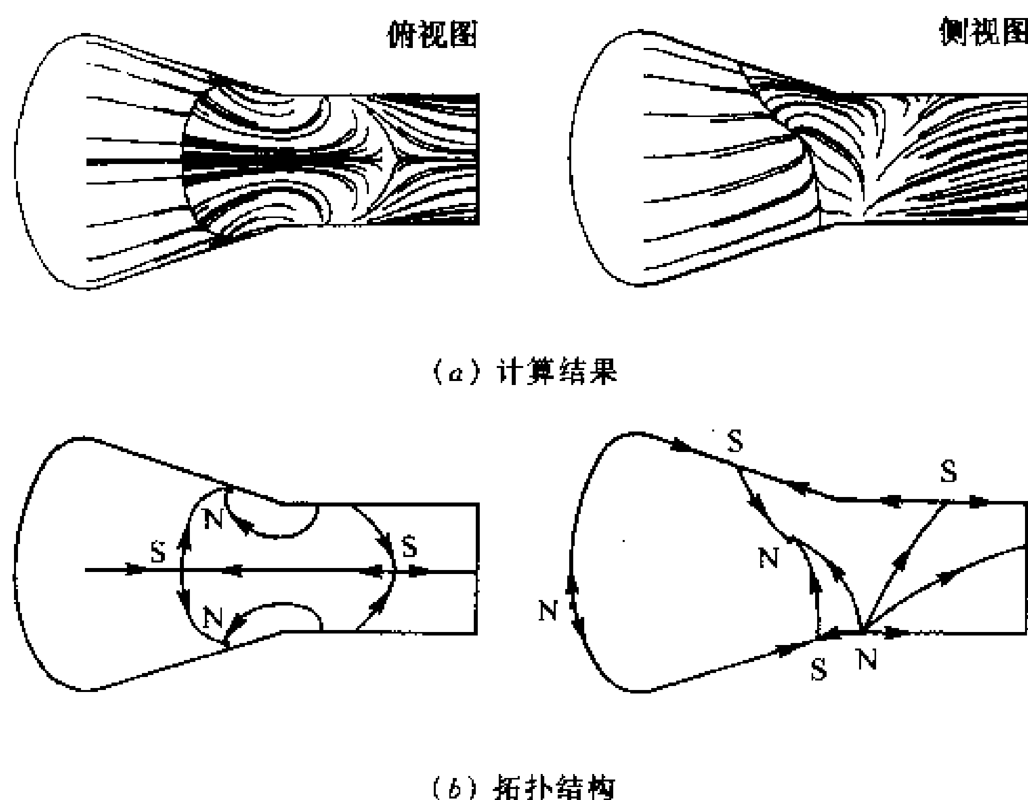
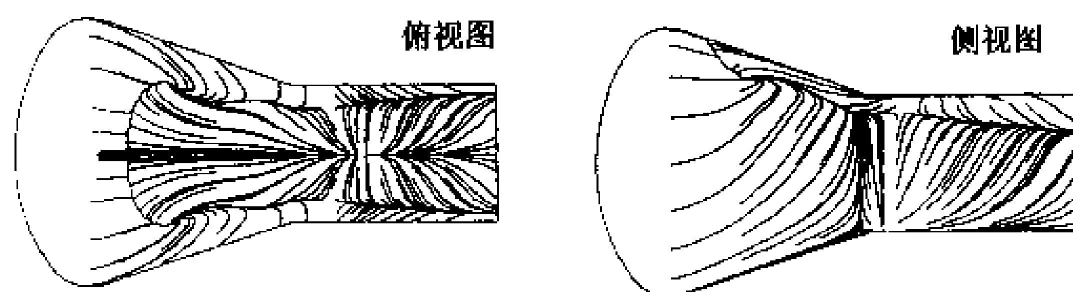


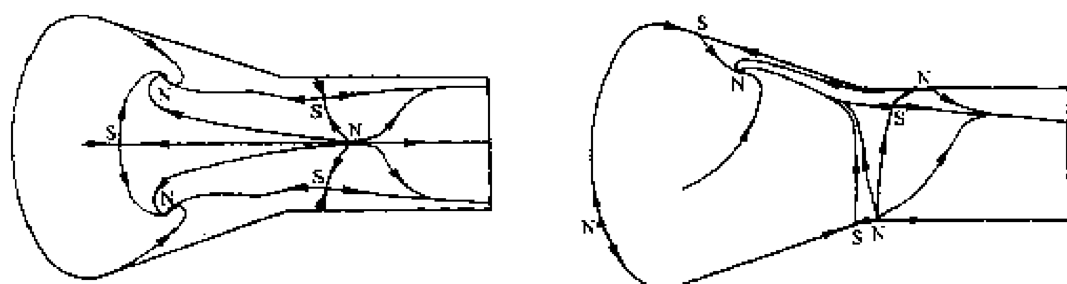
图 10-23　计算给出的飞船表面的摩擦力线

（$\alpha=5°,\Sigma N=5,\Sigma S=3$）

为了研究横截面流态，图 10-27 给出了 $\alpha=20°$垂直于体轴各个横截面上的流态（$z/R=0,0.12,0.39,1.08$ 等），其中 $z/R=0$ 是倒锥与球头的切点（见图 10-20），$z/R=0.85$ 是倒锥与圆柱段的交点坐标。由图 10-20 和图 10-24 容易看出，$z/R=0$ 和 $z/R=$

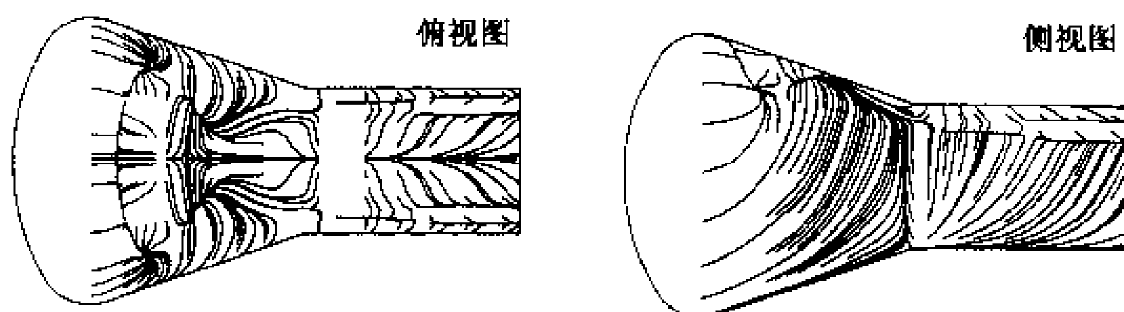


（a）计算结果

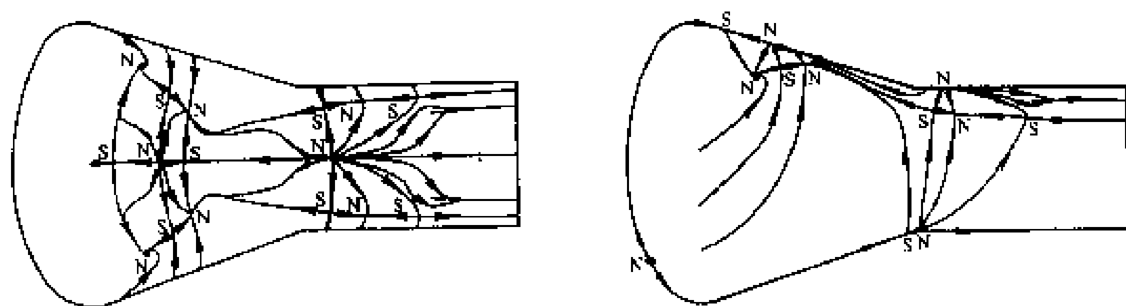


（b）拓扑结构

图 10-24　计算给出的飞船表面的摩擦力线（$\alpha = 20°, \Sigma N = 6, \Sigma S = 4$）

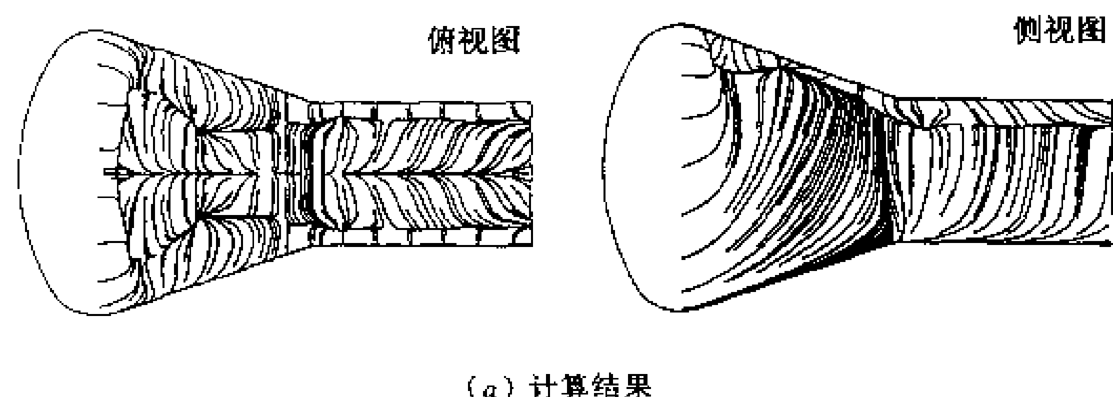


（a）计算结果

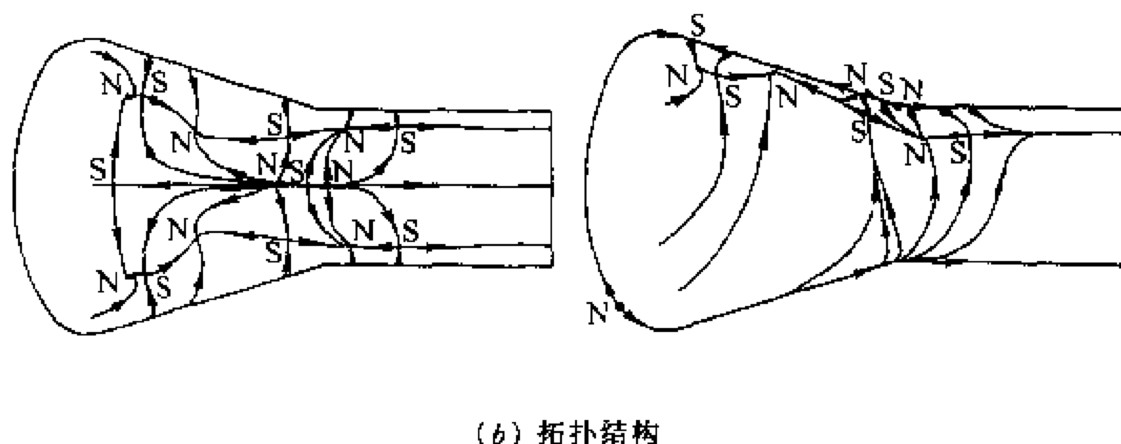


（b）拓扑结构

图 10-25　计算给出的飞船表面的摩擦力线（$\alpha = 30°, \Sigma N = 11, \Sigma S = 9$）



（a）计算结果

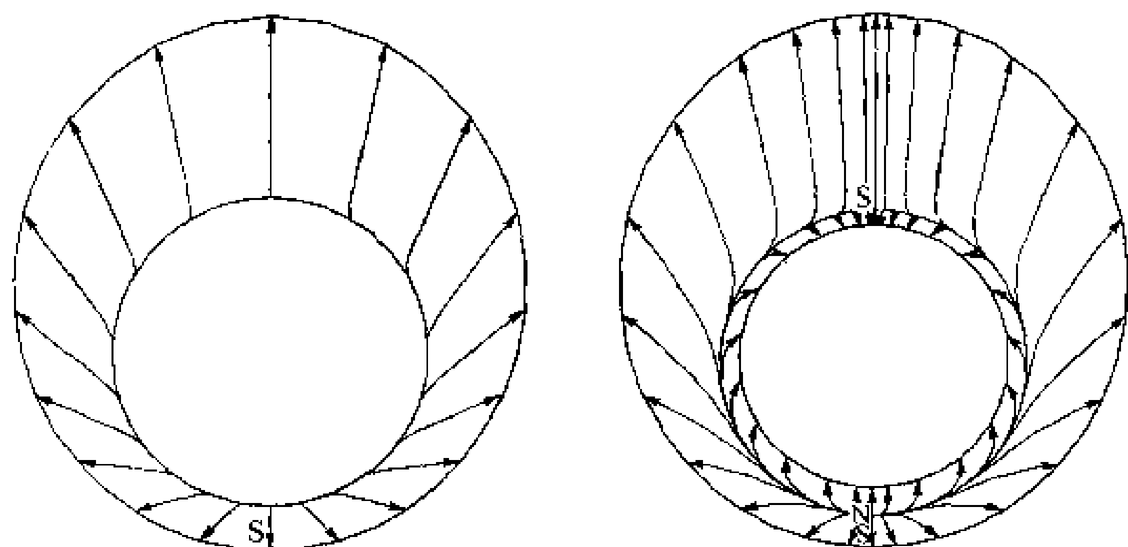


（b）拓扑结构

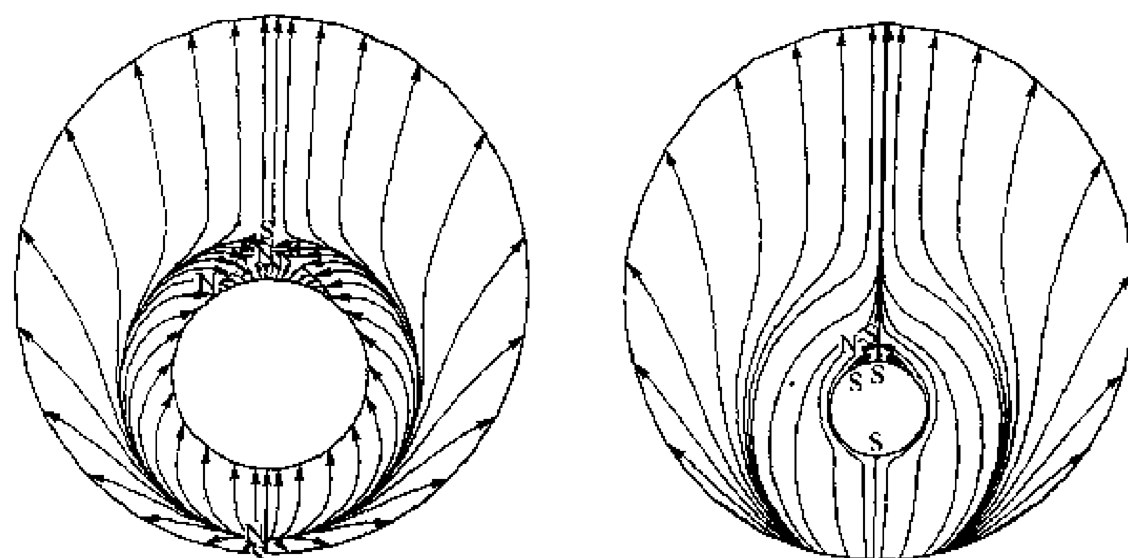
图 10-26　计算给出的飞船表面的摩擦力线

（$\alpha=40^{\circ}$，$\Sigma N=10$，$\Sigma S=8$）

0.12 两截面分别位于闭式纵向分离区以前，且 $z/R=0.12$ 的横截面位于倒锥区。$z/R=0.39$ 的截面位于倒锥的纵向分离区，$z/R\geqslant1.08$ 的截面位于纵向分离区后的圆柱段上。在这些截面流态图上，截面轮廓线上、迎风和背风对称线上以及在截面上的奇点与相应的 Poincare 指数均被给出。这些结果和第 9 章拓扑分析的结论完全一致，这表明第 9 章的定性分析结论是正确的，它既可验证计算结果，又可帮助和指导作图，因为当计算结果对局部区域不能细微刻画时，利用拓扑分析理论，可以帮助阐明该处流态的定性特征。



(a) $z/R=0.0, \Sigma N=0, \Sigma S=1, I(c)=1$　(b) $z/R=0.12, \Sigma N=1, \Sigma S=2, I(c)=1$



(c) $z/R=0.39, \Sigma N=0, \Sigma S=1, I(c)=1$　(d) $z/R=1.08, \Sigma N=1, \Sigma S=2, I(c)=1$

图 10-27　计算给出的垂直于体轴各横截面上的流态($\alpha=20°$)

10.7　高超声速气流绕航天飞机的流动

黎作武等人利用 NND 格式，通过求解完全气体流动的 Navier-Stokes 方程，数值模拟了图 10-28 所示航天飞机绕流[9]，计算条件是：$Ma_\infty=8$，$\alpha=0°$、$20°$，来流相应于 $H=60\text{km}$ 高度的大

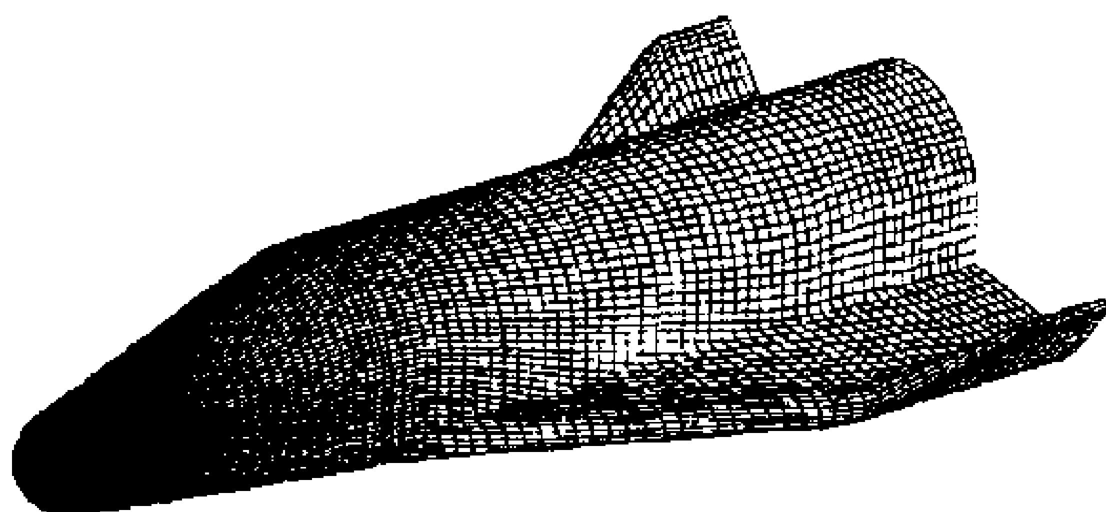
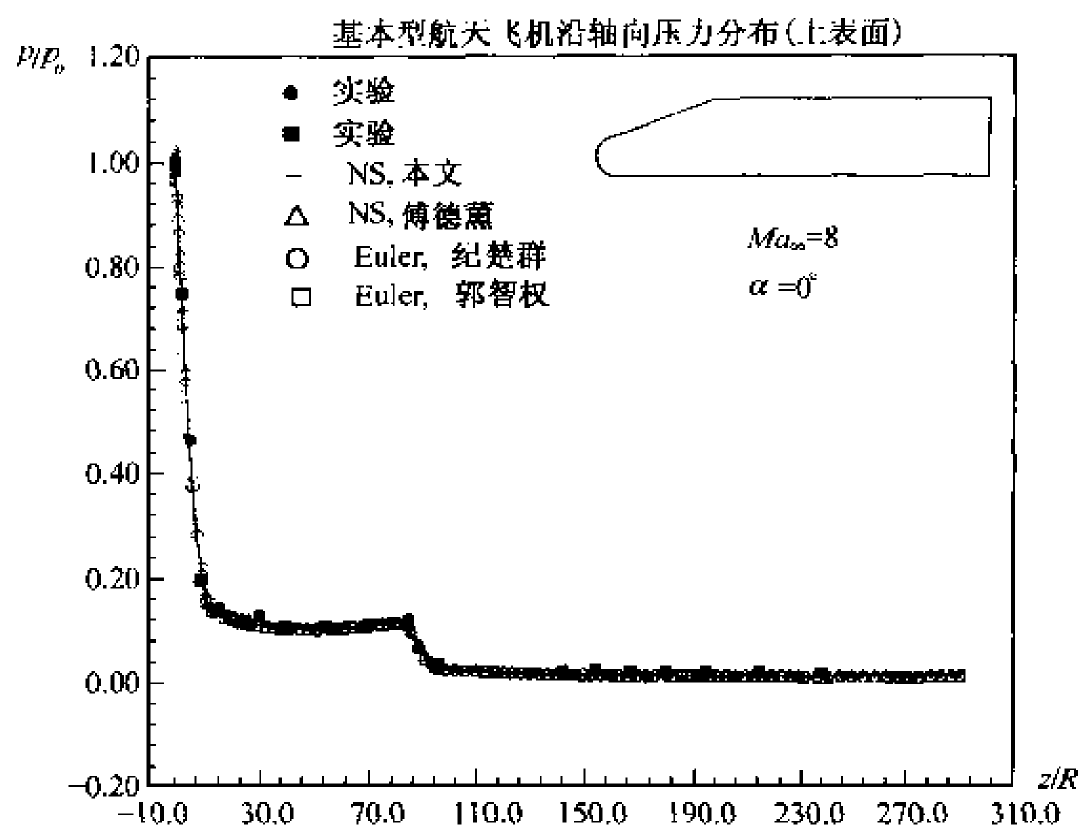


图 10-28 航天飞机外形

气状态。物面采用无滑移边界条件，壁温为 300K，图 10-29 给出了 $Ma_\infty=8, \alpha=0°$时航天飞机上、下表面中心俯仰子午线上的压力分布，图 10-30 是 $z/R=70$ 和 180 轴向位置上周向压力分布，图 10-31 是航天飞机弦向位置 1 上、下表面的压力分布。图 10-32 画出了 $Ma_\infty=8, \alpha=20°$时计算给出的俯仰上、下表面中心子午线上的压力分布，图 10-33 是 $z/R=70$ 和 180 时两个截面上的周向压力分布，图 10-34 是弦向位置 1 上、下表面的压力分布。为了比较，在以上这些压力分布图上我们列出了李素循等人的实验结果和纪楚群、傅德薰、邬华谟等人的计算结果，不难看出，一致性是满意的。

黎作武等人，还对航天飞机在 $Ma_\infty=8, \alpha=0°$、$20°$的热流作了计算。图 10-35 是航天飞机上、下中心表面上的热流分布，图 10-36 是 $z/R=70$ 和 180 两个横截面上热流沿周向的分布。在这些热流图上，为了比较，还画出了李素循等人的实验结果和傅德薰等人的计算结果。和压力一致性相比较，热流的一致性差些。

黎作武等人还对 $Ma_\infty=8, \alpha=10°$、$20°$完全气体绕流和化学非平衡流动作了计算。图 10-37 是表面极限流线；图 10-38 是 $z/R=4.71$ 和 19.7 时横截面上的流态。和定性分析结论比较，计算和分析结论完全一致。



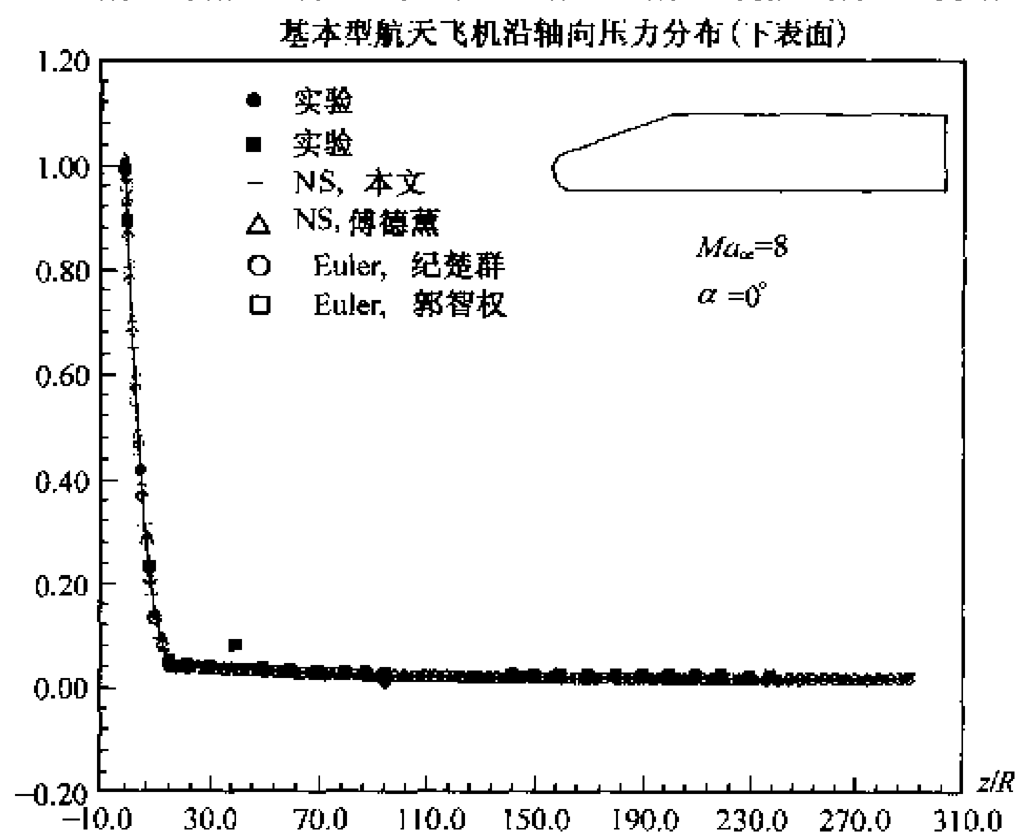
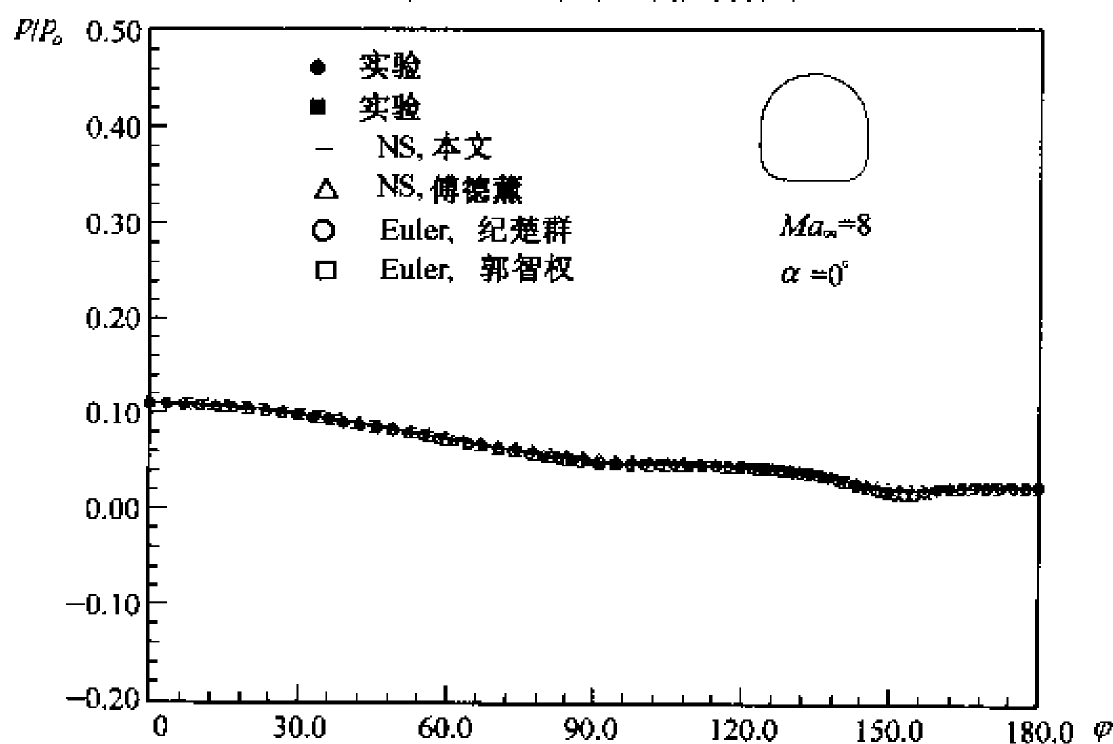


图 10-29 航天飞机上、下表面中心俯仰子午线上的压力分布

($Ma_\infty=8, \alpha=0°$)



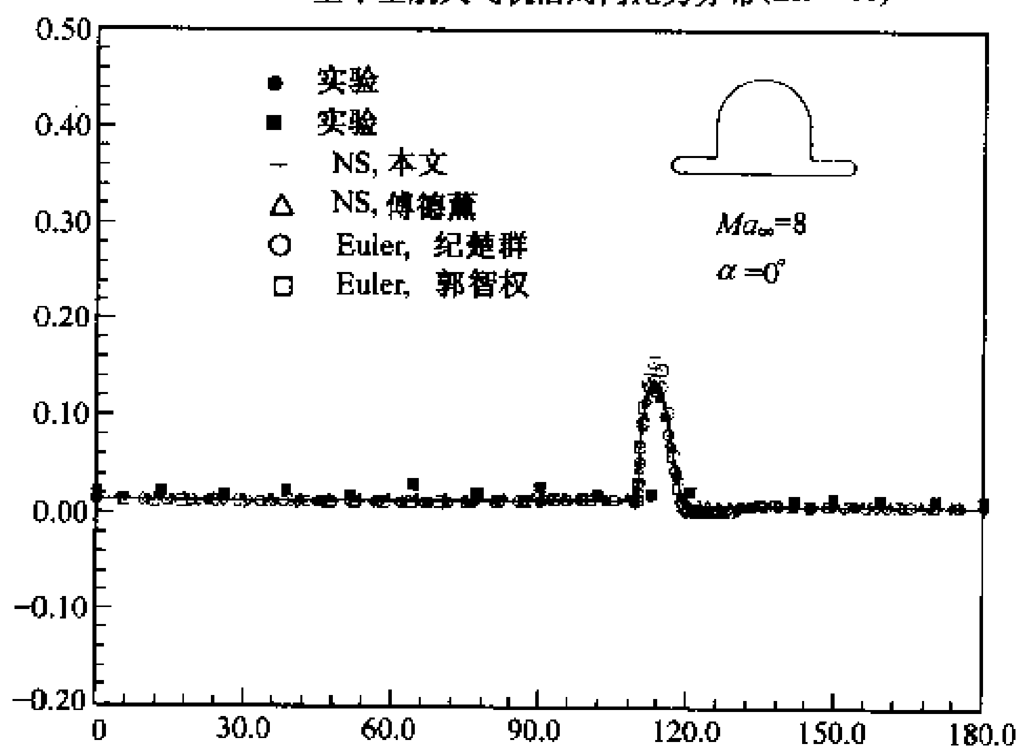


图 10-30　航天飞机周向压力分布

（$Ma_\infty = 8, \alpha = 0°$）

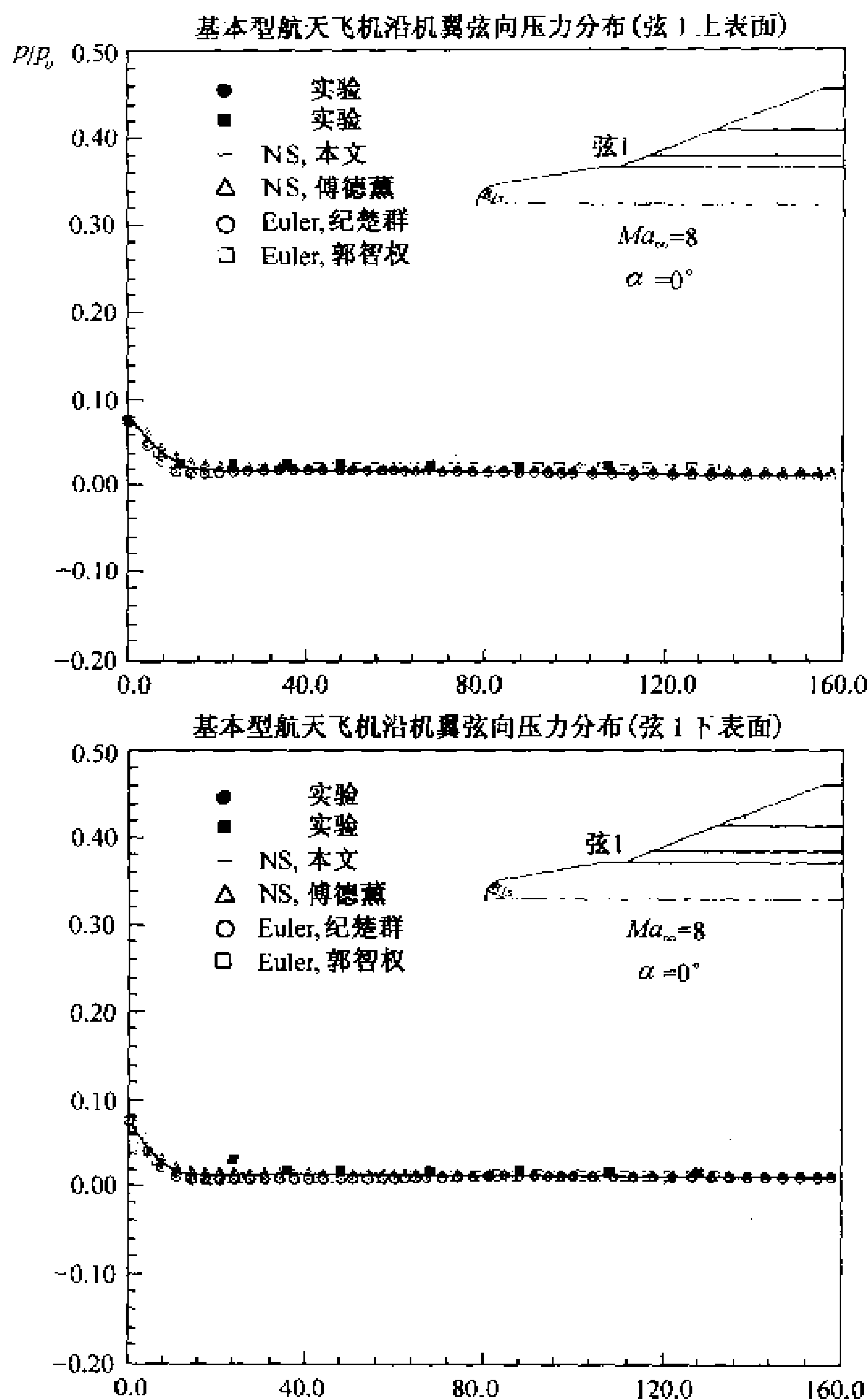
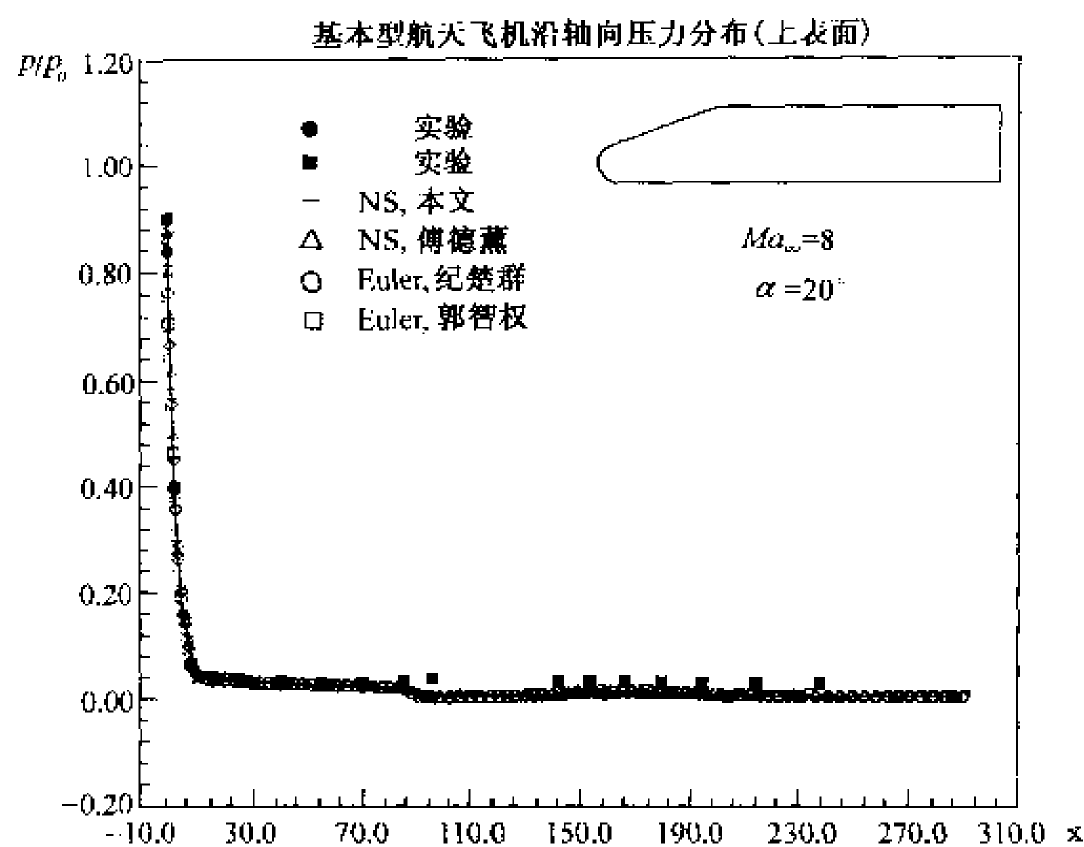


图 10-31 航天飞机弦向位置 1 上、下表面的压力分布

($Ma_{\infty}=8, \alpha=0°$)



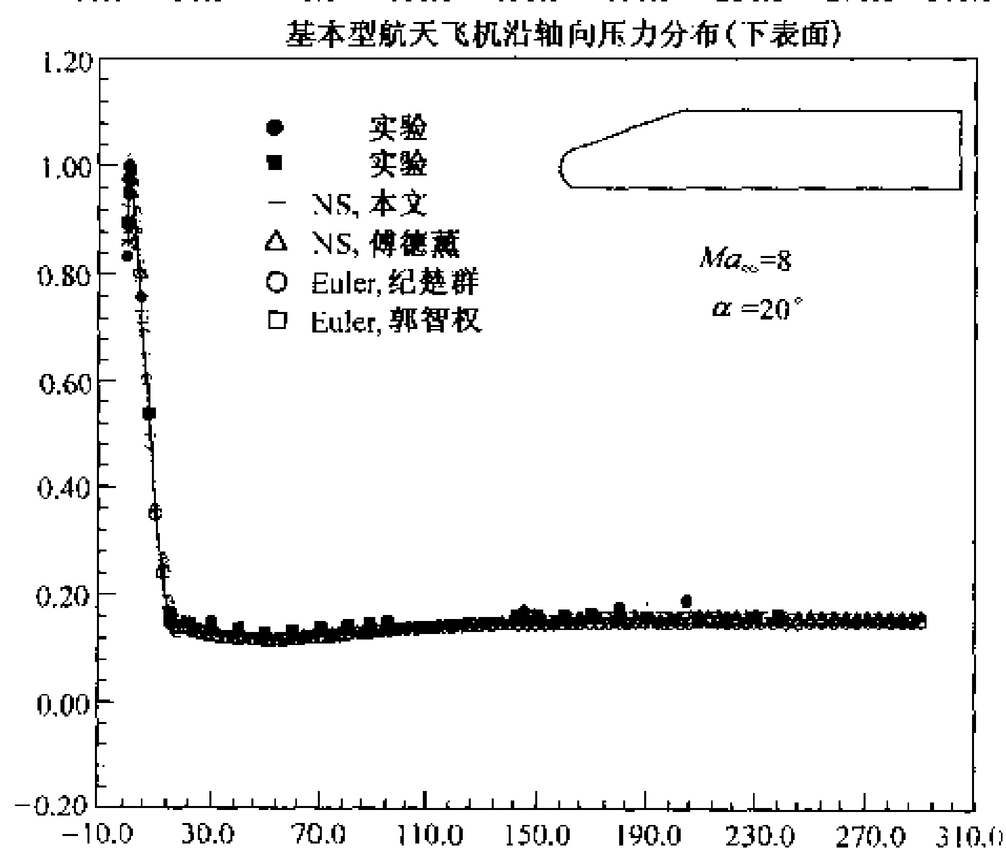


图 10-32　航天飞机上、下表面中心俯仰子午线上的压力分布

($Ma_\infty = 8, \alpha = 20°$)

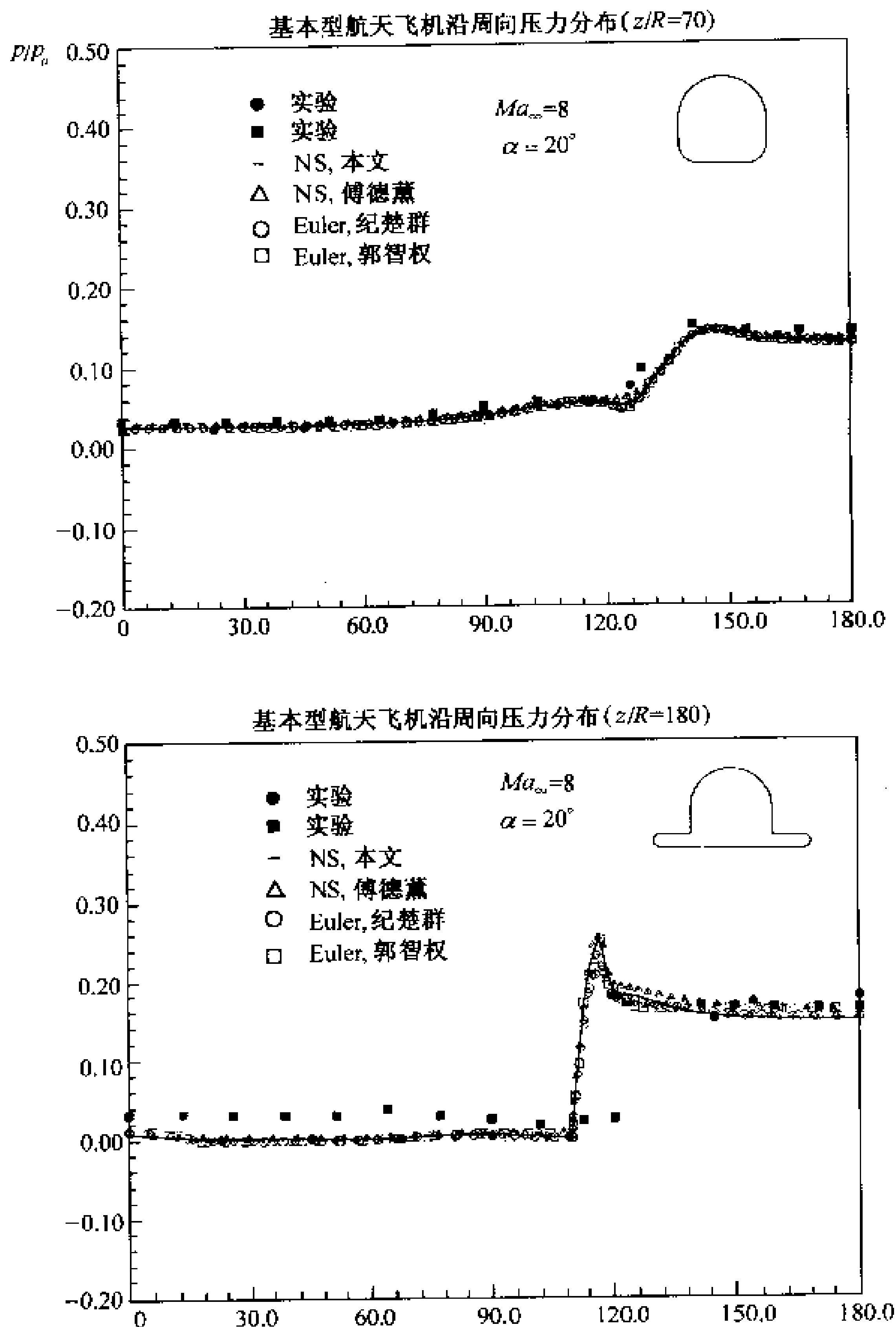


图 10-33 航天飞机周向压力分布($Ma_\infty=8, \alpha=20^\circ$)

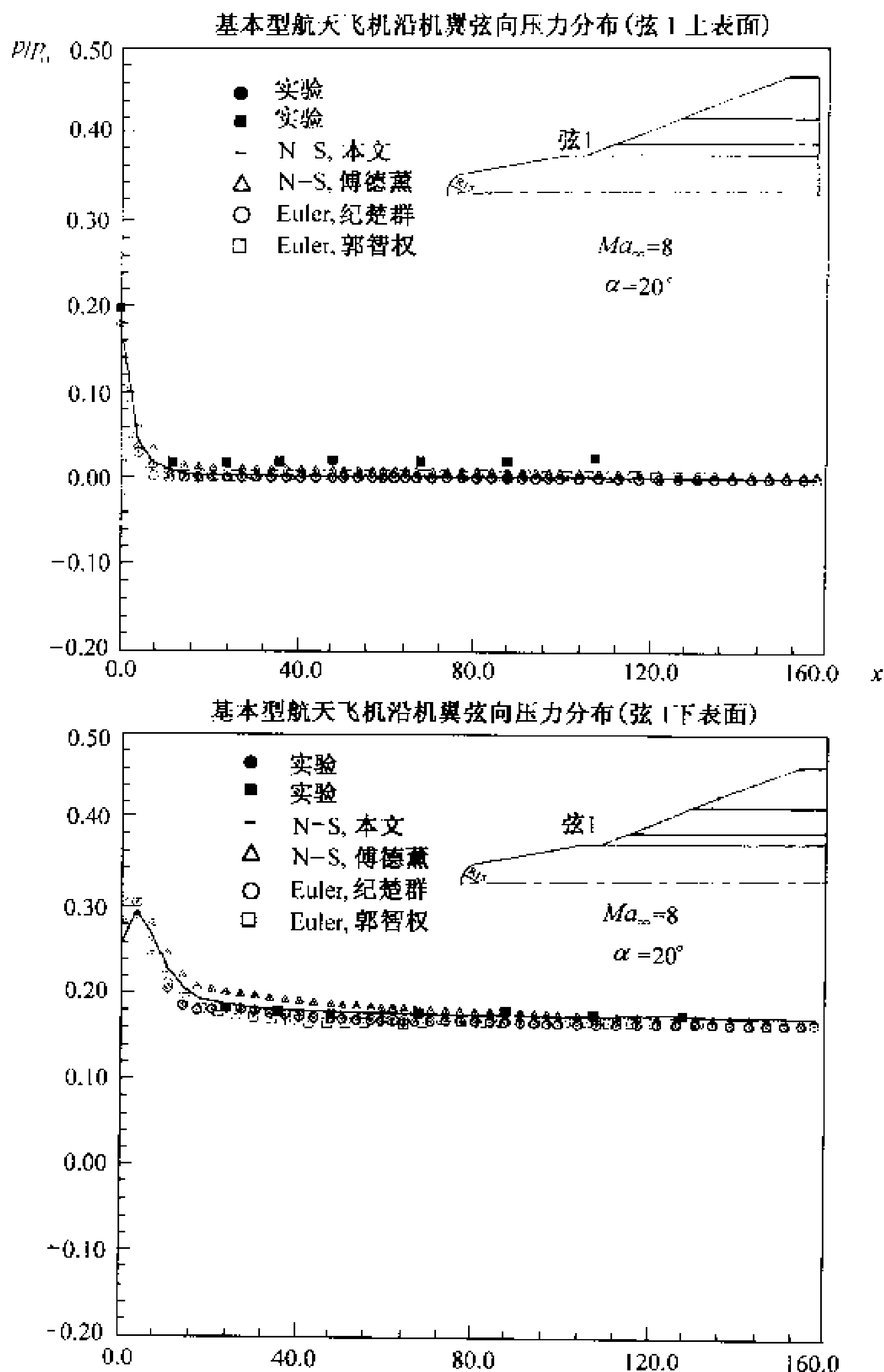


图 10-34　航天飞机弦向位置1上、下表面的压力分布($Ma_\infty=8, \alpha=20°$)

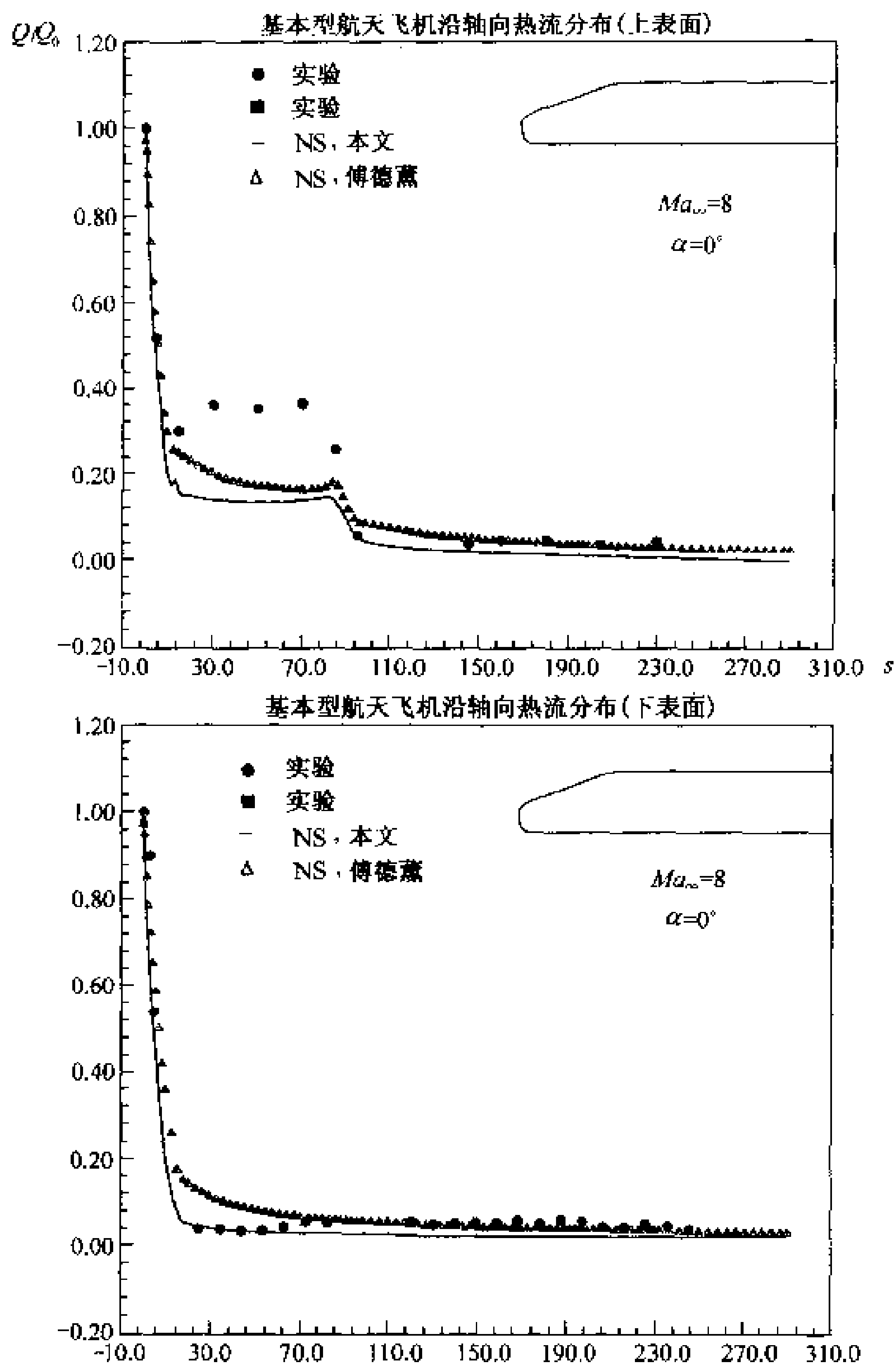
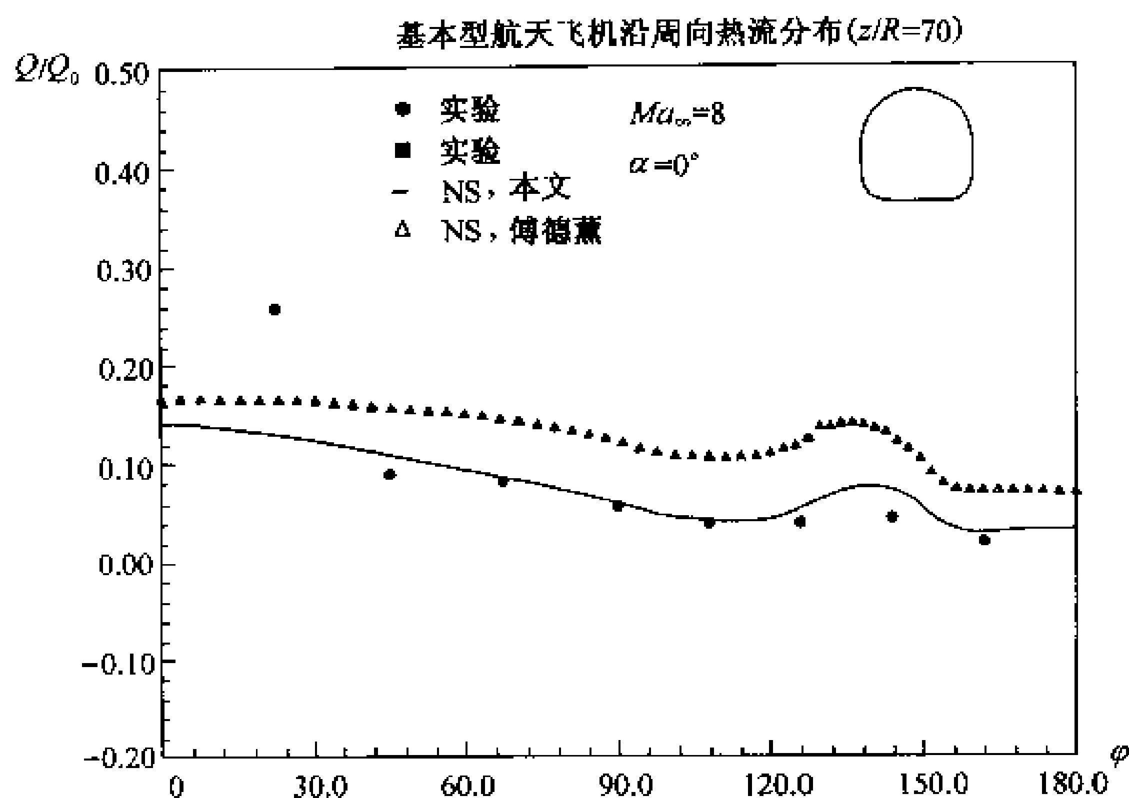


图 10-35 航天飞机上、下表面中心俯仰子午线上的热流分布

($Ma_{\infty}=8, \alpha=0°$)



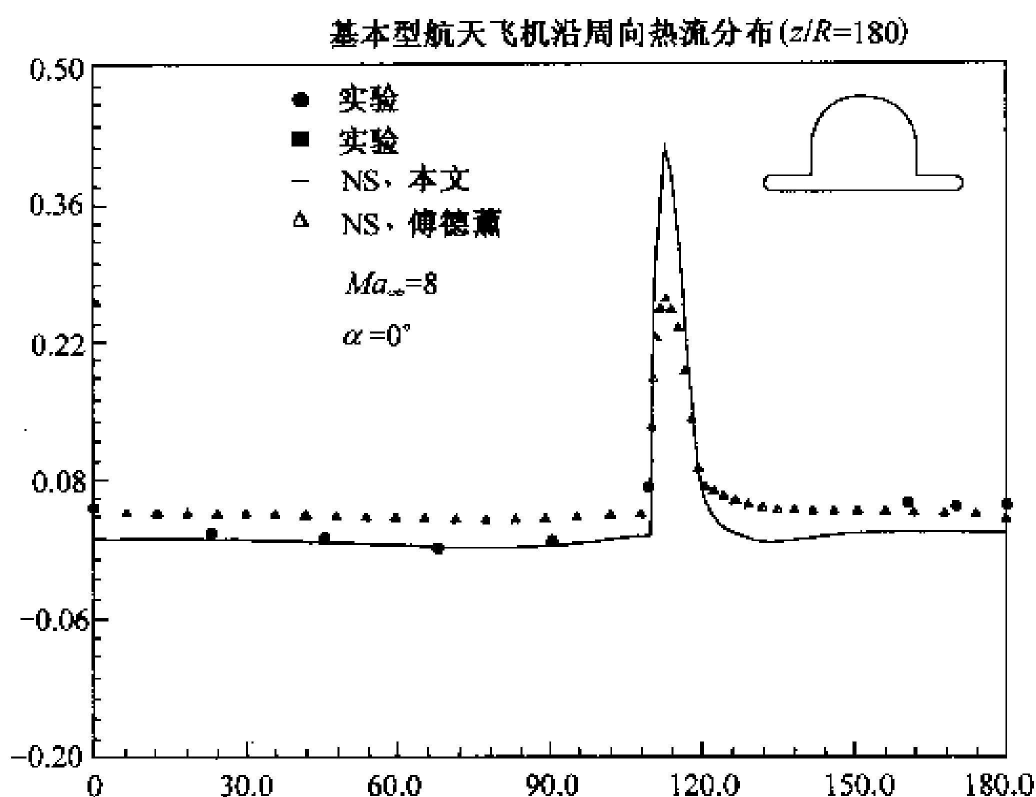
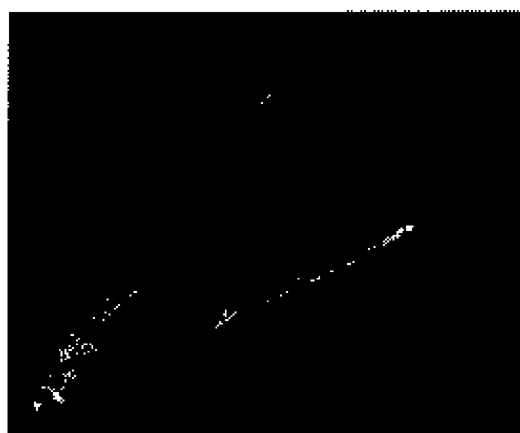
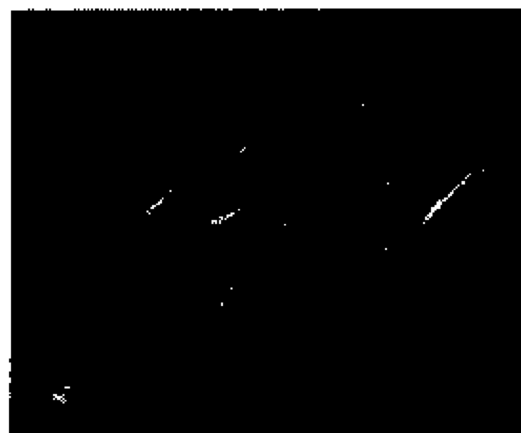


图 10-36　航天飞机周向热流分布($Ma_\infty=8, \alpha=0°$)

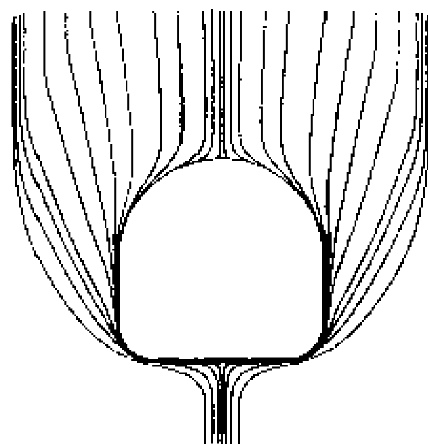


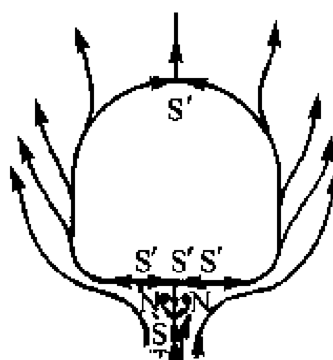


（a）（b）

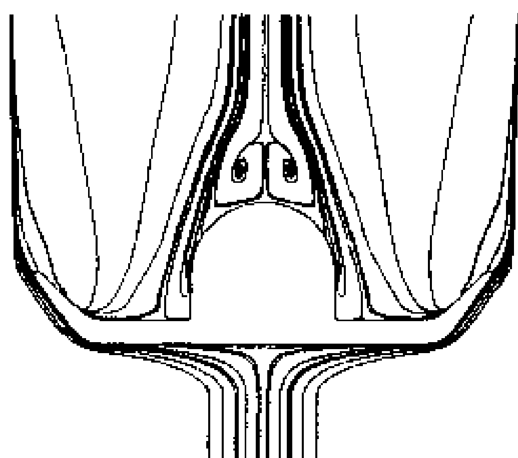
图 10-37 航天飞机表面摩擦力线

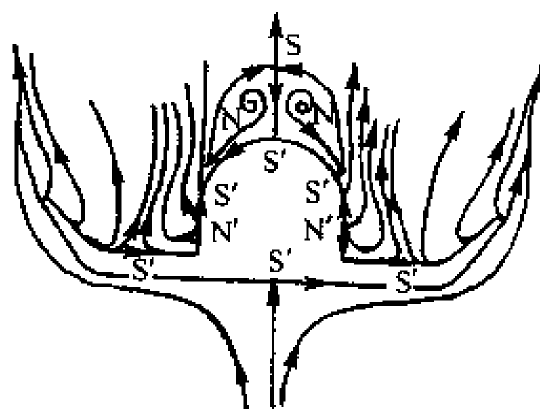
（a）$Ma_{\infty}=8, \alpha=0°$；（b）$Ma_{\infty}=8, \alpha=20°$。





(a) z/R =4.71





(b) z/R=19.7

图 10-38 航天飞机表面流态

参 考 文 献

第1章

1 Anderson D A, Tannehill J C, Pletcher R H. Computational fluid mechanics and heat transfer. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1984

2 王连祥等. 数学手册. 北京: 高等教育出版社, 1979

3 张涵信. 差分计算中的几个问题. 全国第三届计算流体力学会议邀请报告, 1984

第2章

1 Richtmyer R D and Morton K W. Difference methods for initial value problems. Wiley-Interscience, 1967

2 Anderson D A, Tannehill J C, Pletcher R H. Computational fluid mechanics and heat transfer. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1984

3 张涵信. 数值模拟和物理分析(与物理分析相结合的 CFD). 中法计算流体力学会议大会系列讲座, 西安交通大学, 1999

4 Лойцянский Л Г. Механика Жидкости и газа. Москва: Физиматгиз, 1959

5 张涵信. 差分计算中激波上、下游解出现波动的探讨. 空气动力学学报, 1984, 2(1): 12～19

第3章

1 MacCormack R W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. AIAA paper 69-354, 1969

2 MacCormack R W. Numerical Solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer. Lecture notes in physics, 1971, 8: 151～163

3 张涵信等. 超声速、高超声速黏性气体分离流动的数值模拟. 力学学报, 1981, 13(4): 334～346

4 张涵信等. 关于混合差分格式中一些问题的讨论. 计算空气动力学文集, 中国空气动力研究与发展中心, 1981

5 Jameson A and Yoon S. Multigrid solution of the Euler equations using implicit schemes. AIAA paper 85—0293, 1985.

6 Beam R M and Warming R F. An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations. AIAA Journal, 1978, 16: 393～401

7 张涵信. 求解气动方程的混合反扩散方法. 力学进展, 1991, 21(3): 284～296

第4章

1 Harten A. A high resolution scheme for the computation of weak solution of hyperbolic conservation laws. J. Comp. Phys., 1983, 49: 357～393

2 Osher S and Chakravarthy S R. Very high order accurate TVD schemes. UCLA Math. Report, 1984

3 Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme V: a second order sequel to Godunov's method. J. Comp. Phys., 1979, 32: 101～136

第5章

1 Anderson D A, Tannehill J C, Pletcher R H. Computational fluid mechanics and heat transfer. New York: Hemisphere publishing corporation, 1984

2 张涵信,贺国宏,张雷.高精度差分求解气动方程的几个问题.空气动力学学报,1993,11(4):347～356

3 张涵信,庄逢甘.关于建立高阶精度差分格式的问题.旋涡运动的分析研究与数值模拟(第一集),中国空气动力研究与发展中心计算空气动力学研究所,1996

4 马延文,傅德薰.计算空气动力学中一个新的激波捕捉法——耗散比拟法.中国科学(A辑),1992,22(3):263～271

5 Harten A, Osher S. Uniformly high-order accurate essentially non-oscillatory schemes I. SIAM J Numer Anal, 1987, 24(2): 279～309

6 Harten A, Engquist B, Osher S, Chakravarthy S R. Uniformly high-order accurate essentially non-oscillatory schemes Ⅲ. J Comput Phys, 1987, 71: 231～303

7 水鸿寿.一维流体力学差分方法.北京:国防工业出版社,1998

8 Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shockcapturing schemes I. J Comput Phys, 1988, 77: 439～471

9 Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shockcapturing schemes Ⅱ. J Comput Phys, 1989, 83: 32～78

10 Wu H M, Wang L. Non-existence of third order accurate semi-discrete MUSCL-type schemes for nonlinear conservation laws, and unified construction of high accurate ENO schemes. Proc Sixth Intern Symp on CFD, Lake Tahoe, Nevada, 1995, Sept. 4～8, 1381～1386

11 Liu X D, Osher S, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes. J Comput Phys, 1994, 115: 200～212

12 Jiang G S, Shu C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes. J Comput Phys, 1996, 126: 202～228

13 Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. J Comput

Phys,1992,103:16～42

14 Halt D W, Agarwal R K. Compact higher order characteristic-based Euler solver for unstructed girds. AIAA J,1992,30:1993～1999

15 傅德薰,马延文.迎风紧致格式及多尺度物理问题的直接数值模拟.北京计算流体力学讨论会文集,1992,43～48

16 Ma Y W, Fu D X. Super compact finite difference method with uniform and nonuniform grid system. Proc Sixth Intern Symp on CFD, Lake Tahoe, Nevada, 1995, Sept. 4～8, 1435～1439

17 刘秋生,沈孟育,刘晔.求解常微分方程边值问题新的数值方法.清华大学学报,1996,36(4):7～12

18 李海东.高精度解析离散法及其应用.清华大学博士学位论文,1997,63～73

19 沈孟育,李海东,刘秋生.用解析离散法构造 WENO－FCT 格式.空气动力学学报,1998,16(1):56～63

20 Boris J P, Book D L. Flux-corrected transport. 1. SHASTA, a fluid transport algorithm that works. J Comput Phys, 1973, 11:38～69

21 Zalesak S T. Fully multidimensional flux-corrected transport algorithm for fluids. J Comput Phys, 1979, 31:335～362

22 沈孟育,蒋莉.满足"熵增原则"的高精度高分辨率格式.清华大学学报,1999,39(4):1～5

23 Chang S C. The method of space-time conservation element and solution element—a new approach for solving the Navier-Stokes and Euler equations. J Comput Phys, 1995, 119:295～324

24 Wang X Y. Computational fluid dynamics based on the method of space-time conservation element and solution element. Ph. D. Dissertation, Department of Aerospace Engineering, University of Colorado, Boulder, CO. 1995

25 Yu S T, Chang S C. Treatments of stiff source terms in hyperbolic conservation systems by the method of space-time conservation element and solution element. AIAA paper 97-0435

26 Yu S T, Chang S C. Application of the space-time conservation element and solution element method to chemically reacting flows. AIAA paper 97-2099

27 张增产.一种新的保证时一空守恒的数值方法.北京计算流体力学讨论会文集(第八辑),1996,50～54

28 Zhang Z C, Shen M Y. New approach to obtain space-time conservation schemes. Chinese Journal of Aeronautics, 1997, 10(2):87～90

29 张增产,沈孟育.改进的时—空守恒元和解元方法.清华大学学报,1997,37(8):65～68

30 张增产.一种改进的满足时—空守恒律的数值方法.计算力学学报,1997,14(增刊):741~744

31 张增产,沈孟育.一种严格保证时—空守恒律的数值方法.计算物理,14(6):835~840

32 Zhang Z C, Shen M Y and Li H D. Modified space-time conservation schemes for 2-D Euler equations. Proc Seventh Intern Symp on CFD, Beijing, China, 1997, Sept. 15~19, 253~258

33 张增产,沈孟育.求解二维 Euler 方程的时—空守恒格式.力学学报,1999,31(2):152~158

34 张增产,沈孟育.一般坐标系下的二维 Euler 方程时—空守恒格式.应用力学学报,1999,16(1):10~14

35 张增产,沈孟育.用时—空守恒方法求解带源项及刚性源项的守恒律方程.清华大学学报,1998,38(11):87~90

36 Zhang Z C, Li H D and Shen M Y. Space-time conservation schemes for 3-D Euler equations. Proc. Seventh Intern Symp on CFD, Beijing, China, 1997, Sept. 15~19, 259~262

第 6 章

1 Pulliam T H and Chaussee D S. A diagonal form of an implicit approximate-factorization algorithm. J Comput Phys, 1981, 39: 347~363

2 Steger J L and Warming R F. Flux vector splitting of the inviscid gas dynamic equations with application to finite difference method. J Comput Phys, 1981, 40: 263~293

3 沈桨华,冯果忱.微分方程数值解法.北京:人民教育出版社,1980

4 Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes Ⅰ. J Comput Phys, 1988, 77: 439~471

5 Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes Ⅱ. J Comput Phys, 1989, 83: 32~78

6 Peaceman D W and Rachford H H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. J Soc. Ind. Appl, Math, 1955, 3: 28~41

7 Douglas J and Rachford H H. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. Trans. Amer. Math. Soc, 1956, 82: 421~439

8 Yanenko N N. The method of fractional Steps: the solution of problems of mathematical physics in several variables, (M. Holt, ed.), Springer-Verlag, New York

9 Beam R M and Warming R F. An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations. AIAA J, 1978, 16: 393~401

10 Yoon S and Jameson A. An LU-SSOR scheme for the Euler and Navier-Stokes equations. AIAA-87-0600

第7章

1 Kreiss H O. Initial boundary value problems for hyperbolic equations. Comm Pure Appl Math, 1970, 23:277~298

2 Kreiss H O. Initial boundary value problems for hyperbolic equations. Lecture Notes in Mathematics, No. 363, Berlin: Springer-Verlag, 1974

3 Engquist B and Majda A. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. Math Comput, 1977, 31:629~651

4 Gustafsson B and Sundström A. Incompletely parabolic problems in fluid dynamics. SIAM J Appl Math, 1978, 35:343~357

5 Oliger J and Sundström A. Theoretical and practical aspects of some initial boundary value problems in fluid dynamics. SIAM J Appl Math, 1978, 35:419~446

6 Poinsot T J and Lele S K. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. J Comput Phys, 1992, 101:104~129

7 朱自强等. 应用计算流体力学. 北京:北京航空航天大学出版社, 1998

8 Thompson K W. Time-dependent boundary conditions for hyperbolic systems, Ⅱ. J Comput Phys, 1990, 89:439~461

9 Strikwerda J C. Initial boundary value problems for incompletely parabolic systems. Comm Pure Appl Math, 1977, 30:797~822

10 Dutt P. Stable boundary conditions and difference schemes for Navier-Stokes equations. SIAM Numer Anal, 1988, 25:245~267

11 Jiang L, et al. Non-reflecting boundary conditions for DNS in curvilinear coodinates. private communication

第8章

1 Baker T J. Developments and trends in three-dimensional mesh generation. Applied Numerical Methematics, 1989, 5:275~304

2 Steger J L, Dougherty F C and Benek J A. A chimera grid scheme, presented at Applied mechanics, bioengineering and fluids engineering conference. Houston, Texas, Jun. 20~22, 1983

3 Lee K D. 3-D transonic flow computations using grid systems with block structure. AIAA 81-0998, 1981

4 Rai M M. An implicit, conservative, zonal-boundary scheme for Euler equations calcula-

tions. AIAA 85-0488, 1985

5 Merry M A and Shephard M S. A modified quadtree approach to finite element mesh generation. IEEE Computer Graphics Applications, 1983, 3(1): 39~46

6 Weatherill N P. Adaptive mesh generation and flow solution method for the Euler equations on unstructured grids. J Comput Phys, 1994, 110: 23~38

7 Parikh P, Pirzadth S and Lohner R. A package for 3D unstructured grid generation, finite-element flow solution and flow field visualization. NACA CR-182090, 1990

8 Kao K H and Liou M S. Advance in overset grid schemes: from chimera to DRAGON grids. AIAA J 1995, 33(10): 1809~1815

9 Chan W H and Buning P G. Zipper grids for force and moment computation on overset grids. AIAA 95-1681, 1995

10 Parthasarathy V, Kallinderis Y and Nakajima K. Hybrid adaption method and directional viscous multigrid with prismatictetrahedral meshes. AIAA 95-0670, 1995

11 张来平,张涵信,高树椿.矩形/三角形混合网格技术及在二维/三维复杂无黏流场数值模拟中的应用.空气动力学学报, 1998, 16(1): 79~88

12 Olynick D and Tam T. Trajectory based validation of the shuttle heating environment. J Spacecraft and Rockets, 1997, 34(2): 172~181

13 Lohner R. Some useful data structures for generation of unstructured grids. Comm Appl Num Math, 1988, 4: 123~135

14 Kuizrock J W and Novick A S. Transonic flow around compressor rotor blade elements. AD 766248, 1976

15 数学手册编写组.数学手册.北京:高等教育出版社, 1979

16 Smith R E. Algebraic grid generation, in Numerical grid generation. North-Holland: Amsterdam, Holland, 1982, 137~170

17 Thompson J F, Thames F C and Mastin C W. TOMCAT-A code for numerical generation of boundary fitted curvilinear coordinates systems on fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. J Comput Phys, 1977, 24: 274~302

18 Thompson J F, Warsi E U A and Mastin C W. Numerical grid generation. North-Holland: Elsevier science publishing co., 1985

19 Sorenson R L. A Computer program to generate two-dimensional grids about airfoils and other shapes by the use of Poisson's equation. NASA TM 81198, 1980

20 Steger J L and Chaussee D S. Generation of body fitted coodinates using hyperbolic partial differential equations. SIAM J Sci Stat Comput, 1980, 1: 431~437

21 Steger J L and Rizk Y M. Generation of three-dimensional body fitted coodinates using hyperbolic partial differential equations. NASA TM 86753, 1985

22 Chan W M and Steger J L. A generated scheme for three-dimensional hyperbolic grid

generation. AIAA 91-1588,1991

23 陈海昕,李凤蔚,鄂秦,高超.复杂外形的网格生成及在流场数值模拟中的应用.第九届全国计算流体力学会议论文集,1998,11,3~7,云南,景洪

24 毛枚良.一种贴体网格生成方法.空气动力学研究文集,1996

25 朱自强等.应用计算流体力学.北京:北京航空航天大学出版社,1998

26 鄂秦,李凤蔚,李杰,陈海昕.多块网格生成技术及应用.第九届全国计算流体力学会议论文集,1998.11,3~7,云南,景洪

27 Marstin C W and McConnaughey H V. Computational problems on composite grids. AIAA 84-1611,1984

28 Slotnik J P,Kandula M and Buning P G. Navier-Stokes simulation of the space shuttle launch vehicle flight transonic flow field using a large scale chimera grid system. AIAA 94-1860,1994

29 Takakura Y,Ogawa S and Wada Y. Computations of transonic wind-tunnel flows about a fully configured model of aircraft by using multi-domain technique. AIAA 93-3022, 1993

30 Bowyer A. Computing Dirichlet tessellation. The Computer J,1981,24(2):162~167

31 Waston D F. Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to voronoi polytopes. The Computer J,1981,24(2):167~172

32 Jameson A,Baker T J and Weatherill N P. Calculation of inviscid transonic flow over a complete aircraft. AIAA 86-0103,1986

33 Pirzadth S. Structured background grids for generation of unstructured grids by advancing front method. AIAA J,1993,31(2):257~265

第9章

1 张涵信.三维定常黏性分离流动的分离条件及分离线附近流动的性状.空气动力学学报,1985,3(1):1~12

2 Zhang H X. Numerical Simulation of three dimensional separated flow and applications of topological theory. Advances in Science of China,Mechanics,1,1991

3 张涵信.旋涡沿轴线的非线性分叉.空气动力学学报,1994,12(3):243~251

4 张涵信.亚、超声速旋涡流动特征的定性分析研究.空气动力学学报,1995,13(3):259~264

5 张涵信.分离流和涡运动横截面流态的拓扑.空气动力学学报,1997,15(1):1~12

第10章

1 呙超.三角形及三角形/四边形混合网格求解 N-S 方程.国家 CFD 实验室论文集,

1998
2 宗文刚.突然放大圆管内激波的传播.中国空气动力研究与发展中心报告,1998
3 陈坚强.超声速燃烧关键技术研究进展.国家CFD实验室论文集,1998
4 张树海.跨,超三角翼背风区旋涡运动的数值模拟.国家CFD实验室论文集,1998
5 庞勇.跨声速三角翼背风区旋涡破裂特别演化规律的数值模拟.国家CFD实验室论文集,1998
6 沈清.三维复杂高超声速黏性流场的数值模拟.中国空气动力研究与发展中心博士论文,1991
7 国义军等.钝锥高超声速绕流空间分离形态的数值模拟及分析研究.国家CFD实验室论文集,1998
8 贺国宏.带座舱高超声速黏性绕流的分离形态及流场结构分析.国家CFD实验室论文集,1998
9 黎作武.航天飞机绕流的数值模拟.国家CFD实验室研究报告,1999

主题词索引

六划

七划

八划

九划

十划

十一划

十二划